УДК 517.95
MSC2000 76D55

© Г.В. Алексеев, О.В. Соболева*

Об устойчивости решений экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Рассматриваются обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений массопереноса. В качестве функционала качества выбирается среднеквадратичное отклонение скорости либо завихренности течения от заданного в некоторой части области течения поля скоростей либо завихренности. Роль управлений играют поток вещества через часть границы и плотность объемных источников вещества. Устанавливаются достаточные условия, наложенные на исходные данные рассматриваемой задачи и обеспечивающие единственность и устойчивость решений.

Ключевые слова: *массоперенос, экстремальные задачи, система оптимальности, оценки устойчивости.*

1. Постановка краевой задачи

В настоящей работе исследуются обратные экстремальные задачи для следующей модели массопереноса:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,p = \mathbf{f} + \mathbf{b}C,\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$-\lambda\Delta C + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,C = f \text{ в } \Omega,\ C|_{\Gamma_D} = \psi,\ \lambda\partial C/\partial n|_{\Gamma_N} = \chi. \tag{2}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ с границей Γ, состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N, $\mathbf{u}$ и C – скорость и концентрация вещества, $p = P/\rho$, где P – давление, ρ=const – плотность среды, $\nu > 0$, $\lambda > 0$ – постоянные коэффициенты кинематической вязкости и диффузии вещества, $\mathbf{f}$ – объемная плотность внешних массовых сил, f – объемная плотность источников вещества, $\mathbf{b} = \beta_C\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения, β_C, $\mathbf{g}$, ψ и χ – некоторые функции.

Теоретическому исследованию задач управления и обратных экстремальных задач для стационарных моделей тепломассопереноса посвящен ряд работ, из которых отметим [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В этих работах исследована разрешимость экстремальных задач, выведены и исследованы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. В [5, 6, 7, 8, 9] также установлены достаточные условия единственности и устойчивости решений задач управления в частных случаях, отвечающих чисто гидродинамическим, температурным либо диффузионным функционалам качества и управлениям. Ниже будут установлены достаточные условия, наложенные на исходные данные рассматриваемых экстремальных задач, обеспечивающие устойчивость решений относительно возмущений

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: alekseev@iam.dvo.ru

функций, входящих как в рассматриваемый функционал качества, так и в уравнения модели.

Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет следующим условиям:

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., N$; $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$.

Аналогично [10] будем использовать следующие обозначения. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$, где $Q \subset \Omega$ – подобласть области Ω, либо в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_Q$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_N}$; норму в $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ – через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_Q$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$; норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ – через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$; норму в $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ либо в $H^{1/2}(\Gamma_D)$ – через$\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ либо $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_D}$; отношение двойственности для пары X и X^* – через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или просто через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p, 1) = 0\}$, $\mathcal{T} = H^1(\Omega, \Gamma_D) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S|_{\Gamma_D} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : (\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(i)}} = 0, i = 1, 2, \ldots, N, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{g} = \mathbf{v}|_\Gamma : \ \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\}$. Пусть в дополнение к (i) выполняются условия

(ii) $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$; (iii) $\chi \in L^2(\Gamma_N)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Справедлива следующая техническая лемма (см [10]).

Лемма 1. *При выполнении условий (i) существуют константы δ_0, δ_1, γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, β_1, зависящие от Ω, с которыми выполняются неравенства*

$$(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) \geq \delta_0\|\mathbf{v}\|_1^2 \ \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \ (\nabla S, \nabla S) \geq \delta_1\|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathcal{T}, \tag{3}$$

$$|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1, \ |(\mathbf{u}\cdot\nabla C, S)| \leq \gamma_1\|\mathbf{u}\|_1\|C\|_1\|S\|_1, \tag{4}$$

$$|(\mathbf{b}S, \mathbf{v})| \leq \beta_1\|\mathbf{v}\|_1\|S\|_1, \ |(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|S\|_1, \tag{5}$$

$$\|\mathbf{v}\|_Q \leq \gamma_4\|\mathbf{v}\|_1, \ \ |(\zeta_d, \mathbf{v})_Q| \leq \gamma_4\|\zeta_d\|_Q\|\mathbf{v}\|_1, \ \ \|\operatorname{rot}\mathbf{v}\| \leq \gamma_3\|\mathbf{v}\|_1. \tag{6}$$

Кроме того,

$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ с } \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{7}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla C, C) = 0 \ \ \forall\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \text{ с } \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ \ C \in \mathcal{T}. \tag{8}$$

Умножая уравнения в (1), (2) на тестовые функции и интегрируя, стандартным образом приходим к слабой формулировке задачи для модели 1. Она заключается в нахождении тройки $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, C) \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) = \langle\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + (\mathbf{b}C, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{9}$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla C, S) = (f, S) + (\chi, S)_{\Gamma_N} \ \forall S \in \mathcal{T}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \ \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \ \ C|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{11}$$

Хорошо известно (см, например, [10]), что при выполнении условий (i), (ii), (iii) существует по крайней мере одно решение $(\mathbf{u}, p, C) \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ задачи (9)–(11) и справедливы оценки $\|\mathbf{u}\|_1 \leq M_\mathbf{u}$, $\|p\| \leq M_p$, $\|C\|_1 \leq M_C$. Здесь $M_\mathbf{u}$, M_p и M_C – неубывающие непрерывные функции норм $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|f\|$. Если к тому же функции $\mathbf{g}, \mathbf{f}, \chi, \psi, f$ "малы" (либо вязкость ν "велика") в том смысле, что

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0\nu}M_\mathbf{u} + \frac{1}{\delta_0\nu}\frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}M_C < 1, \tag{12}$$

где константы δ_i, γ_i и β_1 введены в (3)–(5), то решение единственно.

2. Постановка экстремальной задачи

Разобьем множество всех исходных данных задачи (1), (2) на две группы: группу управлений, куда внесем функции χ и f, играющие роль искомых управлений, и группу фиксированных данных, куда внесем неизменяемые в дальнейшем функции $\mathbf{b}, \mathbf{g}$ и ψ. Положим $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, C)$, $u_0 = (\mathbf{b}, \mathbf{g}, \psi)$, $u = (\chi, f)$. Будем считать, что u может изменяться на множестве $K = K_1 \times K_2$, где

(j) $K_1 \subset L^2(\Gamma_N)$, $K_2 \subset L^2(\Omega)$ – непустые замкнутые выпуклые множества.

Полагая $X = \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, введем оператор $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) : X \times K \times \mathbf{L}^2(\Omega) \to Y$, где

$$\langle F_1(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \mathbf{v}\rangle = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) - (\mathbf{b}C, \mathbf{v}) - \langle\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle$$

$$\langle F_4(\mathbf{x}, \chi, f), S\rangle = \lambda(\nabla C, \nabla S) + (\mathbf{u}\cdot\nabla C, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N},$$

$$\langle F_2(\mathbf{x}), q\rangle = -(\operatorname{div}\mathbf{u}, q),\ F_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathbf{u}|_\Gamma - \mathbf{g},\ F_5(\mathbf{x}, \psi) = C|_{\Gamma_D} - \psi.$$

Используя введенный оператор F, запишем слабую формулировку (9)–(11) задачи (1), (2) в виде $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f}) = 0$.

Пусть $I(\mathbf{u})$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Рассмотрим следующую задачу условной минимизации:

$$J(\mathbf{u}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|f\|^2 \to \inf,\ F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f}) = 0,\ (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{13}$$

Здесь μ_0, μ_1 и μ_2 – положительные размерные параметры (см подробнее об их смысле в [7, 8]). Введем в рассмотрение два функционала качества:

$$I_1(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|^2_Q = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_d\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)},\ \ I_2(\mathbf{u}) = \|\operatorname{rot}\mathbf{u} - \zeta_d\|^2_Q. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{v}_d \in \mathbf{L}^2(Q)$ (либо $\zeta_d \in \mathbf{L}^2(Q)$) моделирует измеренное или желаемое в некоторой подобласти Q области Ω поле скоростей (либо завихренности).

Предположим, что объемная плотность массовых сил $\mathbf{f}$ может изменяться на некотором множестве $\mathbf{Z} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) \equiv (\mathbf{u}_1, p_1, C_1, \chi_1, f_1) \in X \times K$ (произвольное) решение задачи (13) для заданной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 \in \mathbf{Z}$. Существование его при выполнении условий (i), (ii) и (j) вытекает из [10]. Через $(\mathbf{x}_2, u_2) \equiv (\mathbf{u}_2, p_2, C_2, \chi_2, f_2) \in X \times K$ обозначим решение близкой к (13) задачи

$$\tilde{J}(\mathbf{u}, u) = \frac{\mu_0}{2}\tilde{I}(\mathbf{u}) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N} + \frac{\mu_2}{2}\|f\|^2 \to \inf,\ F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f}) = 0, \tag{15}$$

полученной заменой функционала I в (13) близким функционалом $\tilde{I}$, а функции $\mathbf{f}$, входящей в уравнение (1), близкой функцией $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{Z}$. В силу результатов §1 для троек $(\mathbf{u}_i, p_i, C_i)$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_i\|_1 \le M^0_{\mathbf{u}},\ \ \|p_i\| \le M^0_p,\ \ \|C_i\| \le M^0_C, \tag{16}$$

где

$$M^0_{\mathbf{u}} = \sup_{u\in K, \mathbf{f}\in\mathbf{Z}} M_{\mathbf{u}}(u_0, u, \mathbf{f}),\ M^0_p = \sup_{u\in K, \mathbf{f}\in\mathbf{Z}} M_p(u_0, u, \mathbf{f}),\ M^0_C = \sup_{u\in K, \mathbf{f}\in\mathbf{Z}} M_C(u_0, u, \mathbf{f}).$$

Введем модельные числа Рейнольдса $\mathcal{R}e$, Рэлея $\mathcal{R}a$ и Прандтля $\mathcal{P}$ формулами

$$\mathcal{R}e = \frac{\gamma_0 M^0_{\mathbf{u}}}{\delta_0\nu},\ \mathcal{R}a = \frac{\gamma_1}{\delta_0\nu}\frac{\beta_1 M^0_C}{\delta_1\lambda},\ \mathcal{P} = \frac{\delta_0\nu}{\delta_1\lambda} \tag{17}$$

и предположим, что выполняются условия

$$M_p^0 < \infty,\ \mathcal{R}e + \mathcal{R}a \equiv \frac{\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\delta_0 \nu} + \frac{\gamma_1}{\delta_0 \nu}\frac{\beta_1 M_C^0}{\delta_1 \lambda} < 1/2. \tag{18}$$

Обозначим через $(1, \mathbf{y}_i^*)$, где $\mathbf{y}_i^* \equiv (\xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta_i^t) \in \mathbf{V} \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$, $i = 1, 2$, отвечающие указанным решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$ нетривиальные множители Лагранжа. Они удовлетворяют соотношениям (см [10])

$$\nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi_i) + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{w}), \xi_i) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}_i, \xi_i) + \varkappa(\mathbf{w} \cdot \nabla C_i, \theta_i) - (\mathrm{div}\mathbf{w}, \sigma_i) + \langle \zeta_i, \mathbf{w}\rangle_\Gamma =$$

$$= -(\mu_0/2)\langle (I^i)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}\rangle\ \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega),\ \ i = 1, 2, \tag{19}$$

$$\varkappa[\lambda(\nabla \tau, \nabla \theta_i) + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \langle \zeta_i^t, \tau\rangle_{\Gamma_D}] - (\mathbf{b}\tau, \xi_i) = 0\ \ \forall \tau \in H^1(\Omega),\ i = 1, 2, \tag{20}$$

где $\varkappa$ – вспомогательный размерный множитель, и неравенству

$$(\mu_1 \chi_i - \varkappa \theta_i, \chi - \chi_i)_{\Gamma_N} + (\mu_3 f_i - \varkappa \theta_i, f - f_i) \geq 0\ \ \forall (\chi, f) \in K. \tag{21}$$

В (19) мы ввели переобозначения $I^1 \equiv I$, $I^2 \equiv \tilde{I}$. Положим $\chi = \chi_1 - \chi_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $C = C_1 - C_2$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\zeta^t = \zeta_1^t - \zeta_2^t$ и вычтем соотношения (9)–(11), записанные для $\mathbf{u}_2, p_2, C_2, u_2$, из (9)–(11) для $\mathbf{u}_1, p_1, C_1, u_1$. Получим

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathrm{div}\mathbf{v}, p) - (\mathbf{b}C, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{22}$$

$$\lambda a_1(\nabla C, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C_1, S) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla C, S) = (f, S) + (\chi, S)_{\Gamma_N}\ \forall S \in \mathcal{T}, \tag{23}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0},\ C|_{\Gamma_D} = 0. \tag{24}$$

Положим $\chi = \chi_1$, $\psi = \psi_1$ в неравенстве (21) при $i = 2$, $\chi = \chi_2$, $\psi = \psi_2$ в том же неравенстве при $i = 1$ и сложим. Получим

$$-\varkappa[(\chi, \theta)_{\Gamma_N} + (f, \theta)] \leq -\mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 - \mu_2 \|f\|^2. \tag{25}$$

Вычтем друг из друга тождества (19), (20), записанные для $(\mathbf{x}_1, u_1, \mathbf{y}_1^*)$ и $(\mathbf{x}_2, u_2, \mathbf{y}_2^*)$. Получим

$$\nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{w}, \xi) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \xi_2) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}_1, \xi) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_2) + \varkappa(\mathbf{w} \cdot \nabla C_1, \theta)$$

$$+\varkappa(\mathbf{w} \cdot \nabla C, \theta_2) - (\mathrm{div}\mathbf{w}, \sigma) + \langle \zeta, \mathbf{w}\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2)\langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2), \mathbf{w}\rangle\ \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \tag{26}$$

$$\varkappa[\lambda(\nabla \tau, \nabla \theta) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \tau, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_2) + \langle \zeta^t, \tau\rangle_{\Gamma_D}] - (\mathbf{b}\tau, \xi) = 0\ \ \forall \tau \in H^1(\Omega). \tag{27}$$

Положим в (26), (27) $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\tau = C$ и сложим. Учитывая (24), получим

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \xi) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi) + 2((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_2) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_1, \xi) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla C_1, \theta) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla C, \theta_2) +$$

$$+\varkappa[\lambda a_1(\nabla C, \nabla \theta) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla C, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, \theta_2)] - (\mathbf{b}C, \xi) = -(\mu_0/2)\langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}\rangle. \tag{28}$$

Положим $\mathbf{v} = \xi$ в (22), $S = \varkappa\theta$ в (23) и вычтем полученные соотношения из (28). Используя неравенство (25), приходим к соотношению

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \xi_1 + \xi_2) + \varkappa(\mathbf{u} \cdot \nabla C, \theta_1 + \theta_2) + (\mu_0/2)\langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1) - \tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}\rangle \leq$$

$$\leq -\langle \mathbf{f}, \xi\rangle - \mu_1 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 - \mu_2 \|f\|^2. \tag{29}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий (i), (ii) и (18) четверки* $(\mathbf{u}_1, p_1, C_1, u_1)$ *и* $(\mathbf{u}_2, p_2, C_2, u_2)$ *являются решениями задач (13) и (15) соответственно,* $\mathbf{y}_i^* = (\xi_i, \sigma_i, \zeta_i, \theta_i, \zeta_i^t)$, $i = 1, 2$ *– отвечающие этим решениям множители Лагранжа. Тогда для разностей* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $C = C_1 - C_2$, $\chi = \chi_1 - \chi_2$, $f = f_1 - f_2$, $\xi = \xi_1 - \xi_2$ *справедливо соотношение (29).*

Положим в (22) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Учитывая (7), получим $\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) = ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) + (\mathbf{b}C, \mathbf{u}) + \langle\mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle$. Отсюда, используя оценки (3)–(5), выводим, что

$$\delta_0\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 \le \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0\|\mathbf{u}\|_1^2 + \beta_1\|C\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{f}\|_{-1}\|\mathbf{u}\|_1. \tag{30}$$

Из (18) вытекает, что

$$(\delta_0\nu/2) < \delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 - \frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}M_C^0 \le \delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0. \tag{31}$$

Переписав (30) с учетом (31) в виде

$$(\delta_0\nu/2)\|\mathbf{u}\|_1^2 \le (\delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0)\|\mathbf{u}\|_1^2 \le (\beta_1\|C\|_1 + \|\mathbf{f}\|_{-1})\|\mathbf{u}\|_1,$$

приходим к следующей оценке для $\|\mathbf{u}\|_1$:

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{2}{\delta_0\nu}(\beta_1\|C\|_1 + \|\mathbf{f}\|_{-1}). \tag{32}$$

Аналогичная оценка справедлива и для разности давлений $p = p_1 - p_2$. Чтобы ее вывести, воспользуемся inf–sup условием для билинейной формы $(\mathrm{div}\cdot, \cdot)$. Указанное условие имеет вид [10]

$$\inf_{s\in L_0^2(\Omega), s\ne 0}\ \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{v}\ne 0}\frac{-(\mathrm{div}\mathbf{v}, s)}{\|\mathbf{v}\|_1\|s\|} \ge \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{33}$$

В силу (33) для функции $p = p_1 - p_2$ и любого (сколь угодно малого) числа $\delta > 0$ существует такая функция $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v}_0 \ne 0$, что $-(\mathrm{div}\mathbf{v}_0, p) \ge \beta_0\|\mathbf{v}_0\|_1\|p\|$, $\beta_0 = (\beta - \delta) > 0$. Положим в тождестве для $\mathbf{u}$ в (22) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ и воспользуемся этой оценкой и оценками (3), (4). Тогда

$$\beta_0\|\mathbf{v}_0\|_1\|p\| \le b(\mathbf{v}_0, p) \le \nu\|\mathbf{v}_0\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + 2\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0\|\mathbf{v}_0\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \beta_1\|C\|_1\|\mathbf{v}_0\|_1 + \|\mathbf{f}\|_{-1}\|\mathbf{v}_0\|_1$$
$$= (\nu + 2\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0)\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}_0\|_1 + \beta_1\|C\|_1\|\mathbf{v}_0\|_1 + \|\mathbf{f}\|_{-1}\|\mathbf{v}_0\|_1.$$

Отсюда, сокращая на $\|\mathbf{v}_0\|_1 \ne 0$, выводим, что

$$\|p\| \le \frac{\nu + 2\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\beta_0}\|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\|C\|_1 + \frac{1}{\beta_0}\|\mathbf{f}\|_{-1} = \frac{\delta_0\nu}{\beta_0}M\|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\|C\|_1 + \frac{1}{\beta_0}\|\mathbf{f}\|_{-1}, \tag{34}$$

где $M = \delta_0^{-1} + 2\mathcal{R}e$. Используя (32), приходим к следующей оценке для $\|p\|$:

$$\|p\| \le (2M+1)\frac{\beta_1}{\beta_0}\|C\|_1 + \frac{2M+1}{\beta_0}\|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{35}$$

3. Анализ устойчивости решений экстремальных задач

Исследуем в этом разделе единственность и устойчивость решения задачи (13) для конкретных функционалов качества. Рассмотрим сначала случай, когда $I = I_1$, т.е. рассмотрим двухпараметрическую экстремальную задачу

$$J(\mathbf{v}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|f\|^2 \to \inf,$$

$$F(\mathbf{x},u,\mathbf{f})=0,\ \ \mathbf{x}=(\mathbf{v},p,C)\in X,\ u=(\chi,f)\in K=K_1\times K_2. \tag{36}$$

Пусть $(\mathbf{x}_1,u_1)\equiv(\mathbf{u}_1,p_1,C_1,\chi_1,f_1)$ – решение задачи (36), отвечающее заданным функциям $\mathbf{v}_d\equiv\mathbf{u}_d^{(1)}\in\mathbf{L}^2(Q)$ и $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1\in\mathbf{Z}$, $(\mathbf{x}_2,u_2)\equiv(\mathbf{u}_2,p_2,C_2,\chi_2,f_2)$ – решение задачи (36), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{\mathbf{v}}_d\equiv\mathbf{u}_d^{(2)}\in\mathbf{L}^2(Q)$ и $\mathbf{f}=\mathbf{f}_2\in\mathbf{Z}$. Полагая $\mathbf{u}_d=\mathbf{u}_d^{(1)}-\mathbf{u}_d^{(2)}$, отметим, что в условиях задачи (36) имеем

$$\langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_i),\mathbf{w}\rangle=2(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_d,\mathbf{w})_Q,\ \langle I'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1)-\tilde{I}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2),\mathbf{u}\rangle=2(\mathbf{u}-\mathbf{u}_d,\mathbf{u})_Q=2(\|\mathbf{u}\|_Q^2-(\mathbf{u},\mathbf{u}_d)_Q). \tag{37}$$

Соотношения (20), (22), (23), (24) для задачи (36) не изменяются, а тождество (19) и неравенство (29) принимают, с учетом (37), вид

$$\nu(\nabla\mathbf{w},\nabla\xi_i)+((\mathbf{u}_i\cdot\nabla)\mathbf{w},\xi_i)+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_i,\xi_i)+\varkappa(\mathbf{w}\cdot\nabla C_i,\theta_i)-(\operatorname{div}\mathbf{w},\sigma_i)+\langle\zeta_i,\mathbf{w}\rangle_\Gamma=$$

$$=-\mu_0(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_d^{(i)},\mathbf{w})_Q\ \forall\mathbf{w}\in\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \tag{38}$$

$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\xi_1+\xi_2)+\varkappa(\mathbf{u}\cdot\nabla C,\theta_1+\theta_2)+\mu_0(\|\mathbf{u}\|_Q^2-(\mathbf{u},\mathbf{u}_d)_Q)\le-\langle\mathbf{f},\xi\rangle-\mu_1\|\chi\|^2_{\Gamma_N}-\mu_2\|f\|^2. \tag{39}$$

В силу (24) $C\in\mathcal{T}$. Положим в (23) $S=C$. Получим, в силу (8), что

$$\lambda(\nabla C,\nabla C)=-(\mathbf{u}\cdot\nabla C_1,C)+(f,C)+(\chi,C)_{\Gamma_N}. \tag{40}$$

Используя оценки (3), (4), (5) и (16), из (40) выводим, что $\delta_1\lambda\|C\|^2\le\gamma_1M_C^0\|\mathbf{u}\|_1\|C\|_1+(\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})\|C\|_1$. Отсюда и из (32) получаем, что

$$\|C\|_1\le\frac{\gamma_1M_C^0}{\delta_1\lambda}\|\mathbf{u}\|_1+\frac{\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_1\lambda}\le$$

$$\frac{2\beta_1}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_1M_C^0}{\delta_1\lambda}\|C\|_1+\frac{2}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_1M_C^0}{\delta_1\lambda}\|\mathbf{f}\|_{-1}+\frac{\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_1\lambda}. \tag{41}$$

Из (41) выводим, с учетом (17), (32) и (35), следующие оценки:

$$\|C\|_1\le\frac{\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)}+\frac{2\mathcal{R}a\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\beta_1(1-2\mathcal{R}a)},$$

$$\|\mathbf{u}\|_1\le\frac{2\beta_1(\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})}{\delta_0\nu\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)}+\frac{2}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}\|\mathbf{f}\|_{-1},$$

$$\|p\|\le\frac{\beta_1(2M+1)(\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})}{\beta_0\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)}+\frac{(2M+1)\|\mathbf{f}\|_{-1}}{\beta_0(1-2\mathcal{R}a)}. \tag{42}$$

Положим в (38), (20) $\mathbf{w}=\xi_i\in\mathbf{V}$, $\tau=\theta_i\in\mathcal{T}$. Учитывая (7), (8), получим

$$\nu(\nabla\xi_i,\nabla\xi_i)=-((\xi_i\cdot\nabla)\mathbf{u}_i,\xi_i)-\varkappa(\xi_i\cdot\nabla C_i,\theta_i)-\mu_0(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_d^{(i)},\xi_i)_Q, \tag{43}$$

$$\varkappa[\lambda(\nabla\theta_i,\nabla\theta_i)+\lambda(\alpha\theta_i,\theta_i)_{\Gamma_N}]=(\mathbf{b}\theta_i,\xi_i),\ i=1,2. \tag{44}$$

Используя оценки (3)–(6), находим, что

$$a(\nabla\xi_i,\nabla\xi_i)\ge\delta_0\|\xi_i\|_1^2,\ |((\xi_i\cdot\nabla)\mathbf{u}_i,\xi_i)|\le\gamma_0\|\mathbf{u}_i\|_1\|\xi_i\|_1^2\le\gamma_0M_{\mathbf{u}}^0\|\xi_i\|_1^2, \tag{45}$$

$$|(\mathbf{b}\theta_i,\xi_i)|\le\beta_1\|\theta_i\|_1\|\xi_i\|_1,\ \varkappa|(\xi_i\cdot\nabla C_i,\theta_i)|\le\varkappa\gamma_1M_T^0\|\xi_i\|_1\|\theta_i\|_1, \tag{46}$$

$$|(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_d^{(i)},\xi_i)_Q|\le\|\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q\|\xi_i\|_Q\le\gamma_4(\gamma_4M_{\mathbf{u}}^0+\|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q)\|\xi_i\|_1. \tag{47}$$

Учитывая (45)–(47), из (43) и (44) выводим, что

$$\|\theta_i\|_1\le\frac{\beta_1}{\delta_1\lambda\varkappa}\|\xi_i\|_1,\ \left(\delta_0\nu-\gamma_0M_{\mathbf{u}}^0-\frac{\beta_1\gamma_1}{\delta_1\lambda}M_C^0\right)\|\xi_i\|_1^2\le\mu_0\gamma_4(\gamma_4M_{\mathbf{u}}^0+\|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q)\|\xi_i\|_1.$$

Из этих неравенств, используя (31), (6), последовательно выводим, что

$$\|\xi_i\|_1 \le \frac{2\mu_0\gamma_4}{\delta_0\nu}(\gamma_4 M_{\mathbf{u}}^0 + \|\mathbf{u}_d^{(i)}\|_Q) = \frac{2\mu_0\gamma}{\gamma_0}(\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0), \quad \|\theta_i\|_1 \le \frac{2\mu_0\gamma\beta_1}{\gamma_0\delta_1\lambda\varkappa}(\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0). \tag{48}$$

Здесь

$$\gamma = \gamma_4^2, \quad \mathcal{R}e^0 = \frac{\gamma_0}{\delta_0\nu\gamma_4}\max(\|\mathbf{u}_d^{(1)}\|_Q, \|\mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q). \tag{49}$$

Учитывая (4), (42) и неравенства (48) для ξ_i, θ_i, находим, что

$$|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \xi_1+\xi_2)| \le \gamma_0\|\mathbf{u}\|_1^2(\|\xi_1\|_1 + \|\xi_2\|_1) \le 4\mu_0\gamma(\mathcal{R}e + \mathcal{R}e^0)\times$$

$$\left[\frac{2}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}\right]^2 \times \left[\frac{\beta_1(\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})}{\delta_1\lambda} + \|\mathbf{f}\|_{-1}\right]^2,$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla C, \theta_1+\theta_2)| \le \frac{4\mu_0\gamma\gamma_1\beta_1(\mathcal{R}e+\mathcal{R}e^0)}{\gamma_0\delta_1\lambda\varkappa} \times \frac{2}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)^2}\times$$

$$\left[\frac{\beta_1(\|f\| + \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})}{\delta_1\lambda} + \|\mathbf{f}\|_{-1}\right] \times \left[\frac{\|f\|+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}}{\delta_1\lambda} + \frac{2\mathcal{R}a}{\beta_1}\|\mathbf{f}\|_{-1}\right]. \tag{50}$$

Из (50) получаем, что

$$|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \xi_1+\xi_2) + \varkappa(\mathbf{u}\cdot\nabla C, \theta_1+\theta_2)| \le \mu_0 c(\|f\|^2 + \gamma_2^2\|\chi\|_{\Gamma_N}^2) + \mu_0 b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2. \tag{51}$$

Здесь константы b и c определяются формулами

$$b = 6\gamma(\mathcal{R}e+\mathcal{R}e^0)\left[\frac{2}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}\right]^2\left[3 + 4\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\mathcal{P}\right)^2\mathcal{R}a^2\right],$$

$$c = 6\gamma(\mathcal{R}e+\mathcal{R}e^0)\left[\frac{2}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}\right]^2\left(\frac{\beta_1}{\delta_1\lambda}\right)^2\left[3 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\mathcal{P}\right)^2\right]. \tag{52}$$

Пусть исходные данные для задачи (36) и параметры μ_0, μ_1 и μ_2 таковы, что с некоторой константой $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$(1-\varepsilon)\mu_1 \ge \mu_0 c\gamma_2^2, \quad (1-\varepsilon)\mu_2 \ge \mu_0 c, \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0. \tag{53}$$

При выполнении условий (53) из (51) выводим, что

$$|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \xi_1+\xi_2) + \varkappa(\mathbf{u}\cdot\nabla C, \theta_1+\theta_2)| \le (1-\varepsilon)\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + (1-\varepsilon)\mu_2\|f\|^2 + \mu_0 b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2. \tag{54}$$

Учитывая (54), из (39) приходим к неравенству

$$\mu_0(\|\mathbf{u}\|_Q^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q) \le -((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \xi_1+\xi_2) - \varkappa(\mathbf{u}\cdot\nabla C, \theta_1+\theta_2) - \mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 - \mu_2\|f\|^2 + \mu_0 b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2 +$$

$$+\|\xi\|_1\|\mathbf{f}\|_{-1} \le -\varepsilon\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 - \varepsilon\mu_2\|f\|^2 + a\|\mathbf{f}\|_{-1} + b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2, \tag{55}$$

где

$$a = \frac{4\mu_0\gamma(\mathcal{R}e+\mathcal{R}e^0)}{\gamma_0}. \tag{56}$$

Из (55) следует, что

$$\mu_0\|\mathbf{u}\|_Q^2 \le \mu_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}_d)_Q - \varepsilon\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 - \varepsilon\mu_2\|f\|^2 + \mu_0 a\|\mathbf{f}\|_{-1} + \mu_0 b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2, \tag{57}$$

Отбрасывая неположительные слагаемые в (57), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{u}\|_Q^2 \le \|\mathbf{u}\|_Q \|\mathbf{u}_d\|_Q + a\|\mathbf{f}\|_{-1} + b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2.$$

Из него выводим, что

$$\|\mathbf{u}\|_Q \le \|\mathbf{u}_d\|_Q + \alpha(\|\mathbf{f}\|_{-1}). \tag{58}$$

Здесь неотрицательная функция $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ определяется формулой

$$\alpha(\|\mathbf{f}\|_{-1}) = (a\|\mathbf{f}\|_{-1} + b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2)^{1/2}. \tag{59}$$

Поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, то оценка (58) эквивалентна оценке

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_Q \le \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q + \alpha(\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}),$$

имеющей при $Q = \Omega$ смысл оценки устойчивости в норме $\mathbf{L}^2(\Omega)$ компоненты $\hat{\mathbf{u}}$ решения $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}, \hat{T}, \hat{\chi}, \hat{f})$ задачи (36) относительно малых возмущений функций $\mathbf{v}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ в нормах пространств $\mathbf{L}^2(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ соответственно.

Учитывая (58), перепишем неравенство (57) в виде

$$\varepsilon\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \varepsilon\mu_2\|f\|^2 \le -\mu_0\|\mathbf{u}\|_Q^2 + \mu_0\|\mathbf{u}\|_Q\|\mathbf{u}_d\|_Q + \mu_0(a\|\mathbf{f}\|_{-1} + b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2) \le$$

$$\le \mu_0[\|\mathbf{u}_d\|_Q + \mu_0(a\|\mathbf{f}\|_{-1} + b\|\mathbf{f}\|_{-1}^2)^{1/2}]^2.$$

Отсюда и из (42) приходим к следующим оценкам устойчивости:

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \le \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_1}}\Delta,\ \|f_1 - f_2\| \le \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\mu_2}}\Delta, \tag{60}$$

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \le \frac{2\beta_1}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)\delta_1\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \frac{2\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}}{\delta_0\nu(1-2\mathcal{R}a)}, \tag{61}$$

$$\|C_1 - C_2\|_1 \le \frac{1}{\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \frac{2\mathcal{R}a\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}}{\beta_1(1-2\mathcal{R}a)}, \tag{62}$$

$$\|p_1 - p_2\| \le \frac{(2M+1)\beta_1}{\beta_0\delta_1\lambda(1-2\mathcal{R}a)}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\mu_1}}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\Delta + \frac{2M+1}{\beta_0(1-2\mathcal{R}a)}\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}, \tag{63}$$

где

$$\Delta = \|\mathbf{u}_d^{(1)} - \mathbf{u}_d^{(2)}\|_Q + \alpha(\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}). \tag{64}$$

Тем самым доказана нижеследующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j) и (18) пятерка функций $(\mathbf{u}_i, p_i, T_i,\ \chi_i, f_i)$ является решением задачи (36), отвечающим заданным функциям $\mathbf{v}_d = \mathbf{u}_d^{(i)} \in \mathbf{L}^2(Q)$ и $\mathbf{f}_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, 2$, где Q – произвольное открытое подмножество, и пусть параметры a и b, c определяются соотношениями (56) и (52), где числа γ и $\mathcal{R}e^0$ определены в (49). Предположим, что выполняются условия (53). Тогда справедливы оценки устойчивости (60)–(63), где Δ определено в (64).*

По подобной схеме исследуется экстремальная задача

$$J(\mathbf{v}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \zeta_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|f\|^2 \to \inf,$$

$$F(\mathbf{x}, u, \mathbf{f}) = 0,\ (\mathbf{x}, u) \in X \times K,\ u = (\chi, f), \tag{65}$$

получающаяся из (36) заменой функционала $I_1(\mathbf{v})$ на $I_2(\mathbf{v})$. Положим

$$\gamma = \gamma_3^2,\ \mathcal{R}e^0 = \frac{\gamma_0}{\delta_0\nu\gamma_3}\max(\|\zeta_d^{(1)}\|_Q, \|\zeta_d^{(2)}\|_Q), \tag{66}$$

$$\Delta = \|\zeta_d^{(1)} - \zeta_d^{(2)}\|_Q + \alpha(\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{-1}). \quad (67)$$

Здесь γ_3 – константа, входящая в (6). Анализ, аналогичный доказательству теоремы 2, показывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j) и (18) пятерка функций* $(\mathbf{u}_i, p_i, C_i, \chi_i, f_i)$ *является решением задачи (65), отвечающим заданным функциям* $\zeta_d^{(i)} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $i = 1, 2$ *и* $\mathbf{f}_i \in \mathbf{Z}$, *и выполняются условия (53), где параметры* γ_0 *и* $\mathcal{R}e^0$ *определены в (66). Тогда справедливы оценки устойчивости (60)–(63), где* Δ *определено в (67).*

Подчеркнем, что устойчивость решения задачи (36) либо (65) как при $Q = \Omega$, так и при $Q \subset \Omega$, удается доказать лишь при условии, что параметры μ_1 и μ_2 в (36) либо в (65) положительны и, более того, удовлетворяют условиям (53). Это означает, что наличие в выражении минимизируемого функционала в (36) и (65) слагаемых $(\mu_1/2)\|\chi\|^2_{\Gamma_N}$ и $(\mu_2/2)\|f\|^2$ вносит в рассматриваемую экстремальную задачу регуляризирующий эффект.

Список литературы

1. *Gunzburger M.D., Hou L., Svobodny T.P.* The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // Comput. Fluids. 1993. V. 22. P. 239–251.

2. *Ito K., Ravindran S.S.* Optimal control of thermally convected fluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19, № 6. P. 1847–1869.

3. *Алексеев Г.В.* Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.

4. *Lee H.-C., Imanuvilov O. Yu.* Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 242. P. 191–211.

5. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.

6. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.

7. *Алексеев Г.В.* Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 6. С. 750-753.

8. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 2007. Т. 47, № 6. С. 1055-1076.

9. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49, № 4. С. 24–35.

10. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 18 мая 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2810.2008.1), гранта РФФИ-“Дальний Восток” (проект № 09-01-98518-р-восток-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003).

Alekseev G.V.,Soboleva O.V. On stability of solutions of extremum problems for stationary equations of mass transfer. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 5–14.

ABSTRACT

Inverse extremum problems for stationary equations of mass transfer are considered. Heat flux through the part of the boundary and the volume impurity source density play the role of controls. The mean quadratic integral deviation of the velocity or vorticity field from the given field in a part of the domain is chosen as the cost functional. Sufficient conditions to input data are established, which provide the uniqueness and stability of solutions.

Key words: *mass transfer, extremum problems, optimality system, stability*