ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 24–28

УДК 517.95
MSC2000 35Q60

© Р.В. Бризицкий, А.С. Савенкова*

О регулярности решения одной краевой задачи для уравнений Максвелла

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Исследуется вопрос о регулярности решения краевой задачи для уравнений Максвелла с граничными условиями третьего рода, наложенными на электрическое поле.

Ключевые слова: *уравнения Максвелла, регулярность.*

1. Постановка задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача [1, 2]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{E} + i\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $k > 0$ – волновое число, $\alpha > 0$ – поверхностный импеданс, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях α и $\mathbf{h}$ будем ссылаться как на задачу 1.

Будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$ и $L^r(D)$, $1 \le r \le \infty$, где D — область Ω или ее граница Γ. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^r(D)$. Положим $L^\infty_+(\Gamma) = \{\alpha \in L^\infty(\Gamma) : \alpha > 0\}$. Скалярные произведения и нормы в пространствах $H^s(\Omega)$ и $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать соответственно $(\cdot,\cdot)_s$, $(\cdot,\cdot)_{s,\Gamma}$ и $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ (при $s = 0$ индекс s будем опускать). Отношение двойственности для пары пространств X и X^* будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ или просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$ там, где это не приведет к противоречию с другими обозначениями.

Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, $\mathcal{D}'(\Omega)$ – двойственное к нему. Обозначим через $H^1_0(\Omega)$ пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}^1_0(\Omega) = H^1_0(\Omega)^3$.

Пусть выполняется условие

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$.

Введем пространства $\mathbf{H}(\operatorname{rot},\Omega) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $\mathbf{H}(\operatorname{div},\Omega) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$ и $\mathbf{H}^s_T(\Gamma) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma), \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma\}$.

Основную роль будет играть гильбертово пространство

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot},\Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div},\Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2_T(\Gamma)\}$$

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `mlnwizard@mail.ru, asya-savenkova@yandex.ru`

с нормой
$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{V}} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\times\mathbf{n}\|^2_{\Gamma}.$$

В работе [4] доказано, что при выполнении условия (i) пространства $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot},\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega) : \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \in L^2(\Gamma)\}$ совпадают и $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Omega)$. Таким образом, если $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, то $\mathbf{v}|_\Gamma \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_N$, где $\mathbf{v}_T = (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\times\mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{v}_N = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Тогда справедливы неравенства
$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{V}_1} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|^2_\Gamma \le C_0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{V}},\ \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{V}} \le C_1\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{V}_1} \tag{3}$$
и формула Грина
$$(\mathbf{u},\mathrm{rot}\mathbf{v}) = (\mathrm{rot}\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{n},\mathbf{v}_T)_\Gamma \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}. \tag{4}$$

Пусть в дополнение к (i) выполняются условия

(ii) $\mathbf{h}\in\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$, $\alpha \in L^\infty_+(\Gamma)$.

Пусть $\mathbf{E}\in\mathbf{C}^2(\Omega)\cap\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$. Умножим уравнение (1) на функцию $\overline{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}\in\mathbf{V}$. После интегрирования по частям с применением (4) приходим к слабой формулировке задачи 1
$$(\operatorname{rot}\mathbf{E},\operatorname{rot}\mathbf{U}) - k^2(\mathbf{E},\mathbf{U}) + i(\alpha\mathbf{E}_T,\mathbf{U}_T)_\Gamma = -(\mathbf{h},\mathbf{U}_T)_\Gamma \quad \forall\mathbf{U}\in\mathbf{V}. \tag{5}$$
Функцию $\mathbf{E}\in\mathbf{V}$, удовлетворяющую (5), назовем *слабым решением* задачи 1.

Обоснуем корректность данного определения. Выбирая в (5) функцию $\mathbf{U}\in\mathcal{D}(\Omega)^3$, приходим к соотношению
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega)^3. \tag{6}$$
Поскольку $\mathbf{E}\in\mathbf{V}$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\in\mathbf{V}\subset\mathbf{L}^2(\Omega)$ и уравнение (1) выполняется почти всюду. Более того, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ в Ω. Умножим (6) на $\overline{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$, проинтегрируем по Ω и, применив (4), вычтем из (5) при $\mathbf{U}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$. Получим
$$\langle \mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} + i\alpha(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n} - \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{U}}_T\rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)\times\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} = 0\ \forall\tilde{\mathbf{U}}\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma),$$
или $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} + i\alpha(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n} = \mathbf{h}$ в $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Но поскольку $\mathbf{E}_T, \mathbf{h}\in\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$, то $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}\in\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$ и
$$\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} + i\alpha(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ п.в. на } \Gamma. \tag{7}$$

Лемма 1. *Задача 1 может иметь не более одного слабого решения.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — решения задачи (5). Тогда функция $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ удовлетворяет соотношению
$$(\operatorname{rot}\mathbf{E},\operatorname{rot}\mathbf{U}) - k^2(\mathbf{E},\mathbf{U}) + i(\alpha\mathbf{E}_T,\mathbf{U}_T)_\Gamma = 0 \quad \forall\mathbf{U}\in\mathbf{V}. \tag{8}$$
Полагая здесь $\mathbf{U} = \mathbf{E}$, получим
$$\|\operatorname{rot}\mathbf{E}\|^2 - k^2\|\mathbf{E}\|^2 + i(\alpha,|\mathbf{E}_T|^2)_\Gamma = 0. \tag{9}$$
Поскольку k – вещественная (положительная) константа, а α – положительная функция, то из (9) вытекает, что $\mathbf{E}_T = 0$ на Γ. В таком случае из (7) получаем, что $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ на Γ. Тогда из теоремы о единственности продолжения (см [5, 6]) следует, что $\mathbf{E} = 0$ в Ω.

Для доказательства разрешимости краевых задач в [3, 1] применялось разложение Гельмгольца
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \nabla H^1_0(\Omega), \quad \mathbf{V}_0 = \{\mathbf{u}\in\mathbf{V} : (\mathbf{u},\nabla\xi) = 0\ \forall\xi\in H^1_0(\Omega)\}.$$
Следуя [3, 1], решение (5) будем искать в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \nabla p$, где $\mathbf{E}_0\in\mathbf{V}_0$, $p\in H^1_0(\Omega)$. Полагая в (5) $\mathbf{U} = \nabla\xi$, $\xi\in S$ и учитывая, что $\mathrm{rot}(\nabla p) = 0$ в Ω и $\nabla p\times\mathbf{n} = 0$ на Γ, приходим к соотношению
$$(\nabla p,\nabla\xi) = 0 \quad \forall\xi\in H^1_0(\Omega) \ \Leftrightarrow \nabla p = 0 \text{ п.в. в } \Omega,$$

из которого вытекает, что $\mathbf{E} \in \mathbf{V}_0$.

Отметим, что поскольку $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ в Ω и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ (см [10]), а также что если $\operatorname{div} \nabla p = \Delta p = 0$ в Ω, где $p \in H_0^1(\Omega)$, то $p = 0$ в Ω. Следовательно, $\mathbf{E} \in \mathbf{V}_0$.

Введем билинейную форму $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$, действующую по формуле $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i(\alpha \mathbf{u}_T, \mathbf{v}_T)_T$, и запишем левую часть (5) в виде

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{U}) = b(\mathbf{E}, \mathbf{U}) - (1 + k^2)(\mathbf{E}, \mathbf{U}).$$

Справедлива следующая лемма (см [1]).

Лемма 2. *При выполнении условий (i) существуют такие положительные константы δ, γ_0 и γ_1, зависящие от Ω, что справедливы соотношения*

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le \gamma_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad |b(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \ge \delta \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \tag{10}$$

$$(\mathbf{h}, \mathbf{U}_T)_\Gamma \le \gamma_1 \|\mathbf{h}\|_\Gamma \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{V}} \ \ \forall \mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Gamma), \ \mathbf{U} \in \mathbf{V}. \tag{11}$$

Из (10) и компактности вложения $\mathbf{V}_0$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ вытекает, что оператор, соответствующий билинейной форме $a(\mathbf{E}, \mathbf{U})$, фредгольмов. Тогда в силу леммы 1 решение задачи 1 существует и справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{V}} \le M_{\mathbf{E}} \equiv C \|\mathbf{h}\|_\Gamma. \tag{12}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *При выполнении условий (i), (ii) существует единственное решение задачи 1 и справедлива оценка* (12).

2. Регулярность

Установим достаточные условия на исходные данные задачи 1, область Ω и ее границу Γ, при которых справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}\|_1 \le C \|\mathbf{E}\|_{\mathbf{V}}. \tag{13}$$

Пусть $\Gamma \in C^{1,1}$, $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$ – произвольная функция. Определим для φ такую функцию $u = u_\varphi \in H^2(\Omega)$, что $\gamma u = \varphi$, и сопоставим функции u вектор $\mathbf{n} \times \nabla u|_\Gamma \times \mathbf{n} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$. Можно показать, что так построенный вектор не зависит от выбора функции $u = u_\varphi$. Поэтому указанная процедура определяет линейный непрерывный оператор $\nabla_\Gamma : H^{3/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, называемый оператором *поверхностного градиента.* Сопряженный к ∇_Γ оператор $\operatorname{div}_\Gamma : \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-3/2}(\Gamma)$, действующий по формуле

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{\Psi}, \varphi \rangle = -\langle \mathbf{\Psi}, \nabla_\Gamma \varphi \rangle \ \forall \varphi \in H^{3/2}(\Gamma), \ \mathbf{\Psi} \in \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma),$$

называется оператором *поверхностной дивергенции* (см. [7, 8, 9]).

Обозначим через $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma; \Gamma)$ подпространство в $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$, состоящее из вектор-функций $\mathbf{q}$, поверхностная дивергенция $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}$ которых принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma)$, с нормой $\|\mathbf{q}\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma} = \|\mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma} + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma}$.

Пусть вместо (i) выполняется условие

(i′) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^2$.

Положим $\mathcal{K} = \nabla \mathbf{n}$, $\mathcal{H} = (1/2) \operatorname{div} \mathbf{n}$. Справедлива формула [3]

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) =$$

$$= -(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_T, \mathbf{v}_n)_\Gamma - (\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}_T, \mathbf{u}_n)_\Gamma - 2(\mathcal{H} \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)_\Gamma - (\mathcal{K} \mathbf{u}_T, \mathbf{v}_T)_\Gamma \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{14}$$

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Для слагаемого $(\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_n)_\Gamma$ справедлива оценка

$$|(\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}_T, \mathbf{u}_n)_\Gamma| \leq \varepsilon^{-1} \|\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}_T\|^2_{-1/2,\Gamma} + \varepsilon \|\mathbf{u}_n\|^2_{1/2,\Gamma}, \ \ \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Обратившись к (7), получим

$$\mathrm{div}_\Gamma(\alpha \mathbf{E}_T) = -i \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{h} + i \mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}). \tag{16}$$

Пусть для простоты $\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{h} = 0$ на Γ. Справедливо равенство

$$\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}) = -\mathbf{n} \cdot \mathrm{rotrot}\, \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}.$$

Тогда

$$\mathrm{div}_\Gamma(\alpha \mathbf{E}_T) = \alpha \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_T \cdot \nabla_\Gamma \alpha = -ik^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n},$$

откуда

$$\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{E}_T = -i\alpha^{-1} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - \alpha^{-1} \mathbf{E}_T \cdot \nabla_\Gamma \alpha. \tag{17}$$

О применении известных формул векторного анализа на границе Γ см [3].

В силу (ii) $\alpha^{-1} \in L^\infty(\Gamma)$. Предположив, что $\nabla_\Gamma \alpha \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, из (17) получаем оценку

$$\|\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{E}_T\|_\Gamma \leq k^2 \|\alpha^{-1}\| \|\mathbf{E}_n\|_\Gamma + \|\alpha^{-1}\|_{L^\infty(\Gamma)} \|\nabla_\Gamma \alpha\|_\Gamma \|\mathbf{E}_T\|_\Gamma. \tag{18}$$

Полагая в (14) $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{E}$, $\mathrm{div}\, \mathbf{E} = 0$, с учетом (18) получим

$$\|\nabla \mathbf{E}\|^2 \leq \|\mathrm{rot}\, \mathbf{E}\|^2 + C_\varepsilon(\|\mathbf{E}_n\|^2_\Gamma + \|\mathbf{E}_T\|^2_\Gamma) + 2\varepsilon \|\mathbf{E}_n\|^2_{1/2,\Gamma} - 2(\mathcal{H}\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n)_\Gamma - (\mathcal{K}\mathbf{E}_T, \mathbf{E}_T)_\Gamma.$$

Отсюда в силу (3) приходим к оценке (13).

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *При выполнении условий (i′), (ii),* $\nabla_\Gamma \alpha \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ *и* $\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{h} = 0$ *существует единственное решение* $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *задачи 1 и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{E}\|_1 \leq C \|\mathbf{h}\|_\Gamma.$$

Список литературы

1. *Cakoni F., Colton D., Monk P.* The electromagnetic inverse scattering problem for partially coated lipschitz domains // Proceeding of the Edinburg Mathematical Society. 2004. V. 134. P. 661–682.

2. *Cakoni F., Haddar H.* Identification of partially coated anisotropic buried objects using electromagnetic Cauchy data // J. Integral Equations Appl. 2007. V. 134. N. 3. P. 359–389.

3. *Caconi F., Colton D.* A uniqueness theorem for an inverse electromagnetic scattering problem in inhomogeneous anisotropic media // Proceeding of the Edinburg Mathematical Society. 2003. V. 46. P. 293–314.

4. *Costabel M.* A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains // Math. Meth. Appl. Sci. 1990. V. 12. P. 365–368.

5. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edn. Springer Verlag. 1998.

6. *Leis R.* Initial boundary value problems in mathematical physics. John Wiley & Sons. 1996.

7. *Alonso A. and Valli A.* Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ and the construction of the extension operator // Manuscr. Math. 1996. V. 89. p. 159-178.

8. *Buffa A., Costabel M., Sheen D.* On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega)$ in Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 276, $\mathcal{N}$ 2. P. 845–876.

9. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.

10. *Valli A.* Orthogonal decompositions of $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$. Preprint UTM 493. Department of Mathematics. University of Toronto. Galamen 1995.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 18 мая 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (код: НШ-2810.2008.1), гранта РФФИ-“Дальний Восток” (проект 09-01-98518-р_восток_а) и грантов ДВО РАН (09-III-B-01-018, 09-II-CO-01-002).

Brizitskiy R.V.,Savenkova A.S. Regularity of solution of a boundary value problem for Maxwell's equations. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 24–28.

ABSTRACT

In this paper we investigate regularity property of solution to a boundary value problem for Maxwell's equations under boundary conditions of the third kind.

Key words: *regularity, Maxwell's equations.*