ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 29–37

УДК 511.384
MSC2000 11F67

© В.А. Быковский*

Теория Эйхлера – Шимуры – Манина

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

В категории модулей, на которых справа действует $PSL_2(\mathbb{Z})$, построены аналоги пространств модулярных форм (модули Эйхлера – Шимуры), включая теорию операторов Гекке.

Ключевые слова: *автоморфные функции, модулярные символы, Эйхлера – Шимуры соотношения.*

Введение

Построенное в основополагающей работе М. Эйхлера [1] и детально изученное Г. Шимурой [2] отображение пространств модулярных форм в периоды отождествляет их со специальными подпространствами в $\mathbb{R}^n$ (на которых действует полная модулярная группа), выделяемыми с помощью соотношений Эйхлера – Шимуры. При этом появляется возможность достаточно просто проводить вычислительные эксперименты в теории модулярных функций и в полной мере использовать механизм проведения редукций по идеалам колец алгебраических чисел, что очень важно для приложений.

Дальнейшее развитие этих идей в работах Ю.И. Манина ([3], [4], [5]) и других авторов привело к двум новым фундаментальным арифметико-алгебраическим конструкциям: модулям Эйхлера и модулям Эйхлера – Шимуры (см [6]). В настоящей работе подробно и максимально общо излагаются основы вышеупомянутой теории.

1. Проективная прямая и полная модулярная группа

По определению, проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ состоит из классов

$$(u\ :\ v) = \big\{(ru, rv) \mid r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\big\},$$

где u и v — произвольные, одновременно не равные нулю рациональные числа. Любой класс из $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ имеет один из следующих двух видов:

(I) $(m\ :\ n) = (\alpha\ :\ 1)$ со взаимно простыми целым m и натуральным n, а также $\alpha = m/n$;
(II) $(1\ :\ 0)$.

В первом случае класс отождествляется с рациональным α, а во втором случае речь идет о бесконечно удаленной точке ∞. Другими словами, $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Замечание 1. Представление точек $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ в виде $(m\ :\ n)$ из (I) и $(1\ :\ 0)$ из (II) будем называть каноническим.

* Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

Пусть
$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) \Big/ \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
— мультипликативная полная модулярная группа, состоящая из пар целочисленных матриц
$$M = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$$
с определителем 1. Она действует слева на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ по правилу
$$\alpha = (u \ : \ v) \to M(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = (au + bv \ : \ cu + dv).$$

Для некоторых элементов из Γ мы будем пользоваться специальными обозначениями:
$$E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = S^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$U = TS = \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^2 = U^{-1} = ST^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Хорошо известно (см, например, [7]), что Γ — свободное произведение циклических подгрупп порядка 2 и 3, порожденных S и U. Пусть
$$\Gamma_\infty = \left\{ M \in \Gamma \mid M(\infty) = \infty \right\} = \left\{ \pm T^l = \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ l \in \mathbb{Z} \right\}$$
— стабилизатор ∞ в Γ. Тогда $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ канонически отождествляется с Γ/Γ_∞ по правилу
$$M \cdot \Gamma_\infty \leftrightarrow \alpha = M(\infty).$$
В дальнейшем полезно иметь в виду следующее утверждение.

Замечание 1. $S(\infty) = 0$, $S(0) = \infty$, $U(\infty) = 1$, $U(0) = \infty$, $U(1) = 0$, $U^2(\infty) = 0$, $U^2(0) = 1$, $U^2(1) = \infty$.

2. Правые Γ-модули

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей 1. Напомним, что левый модуль над K — это аддитивная абелева группа $\mathcal{L}$, на которой слева действует K. При этом для любых $w, w_1, w_2 \in K$ и для любых $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}$

1) $1 \cdot A = A$;

2) $(w_1 w_2) \cdot A = w_1 \cdot (w_2 \cdot A)$;

3) $(w_1 + w_2) \cdot A = w_1 \cdot A + w_2 \cdot A$;

4) $w \cdot (A_1 + A_2) = w \cdot A_1 + w \cdot A_2$.

На правых Γ-модулях над кольцом K определено правое действие Γ. При этом для любых $M, M_1, M_2 \in \Gamma$, для любых $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}$, для любых $w_1, w_2 \in K$

1) $A \circ E = A$;

2) $(A \circ M_1) \circ M_2 = A \circ (M_1 M_2)$;

3) $(wA_1 + wA_2) \circ M = w_1 \cdot A_1 \circ M + w_2 \cdot A_2 \circ M$.

Пространству модулярных форм веса 2 относительно конгруэнц-подгруппы

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; c \equiv 0 (\mathrm{mod} N),\; a \equiv d \equiv 1 (\mathrm{mod} N) \right\}$$

соответствует Γ-модуль $\mathcal{D}^{(+)}(N)$ над $\mathbb{R}$, состоящий из всех функций $\varphi: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, для которых при любых целых m_1 и m_2

1) $\varphi(-m_1, -m_2) = \varphi(m_1, m_2)$;

2) $\varphi(m_1, m_2) = \varphi(m_1 + N, m_2) = \varphi(m_1, m_2 + N)$.

Действие Γ определяется по правилу

$$\big(\varphi \circ M\big)(m_1, m_2) = \varphi(am_1 + bm_2, cm_1 + dm_2).$$

Подмодуль $\mathcal{D}_0^{(+)}(N)$, состоящий из функций φ, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Phi(mm_1, mm_2) = \Phi(m_1, m_2) \quad \forall m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad \text{НОД}(m, N) = 1,$$

соответствует пространству модулярных форм веса 2 относительно конгруэнц-подгруппы

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \;\middle|\; c \equiv 0 (\mathrm{mod} N) \right\}.$$

Пусть k — четное неотрицательное целое число. Пространству модулярных форм веса $k+2$ относительно Γ соответствует $\mathcal{L} = \mathcal{P}_k$ — линейное пространство полиномов P степени $\leqslant k$, на котором справа действует Γ по правилу

$$\big(P \circ M\big)(z) = (cz + d)^k P\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Тензорное произведение $\mathcal{D}^{(+)}(N) \otimes \mathcal{P}_k$ с действием Γ

$$\varphi \otimes P \xrightarrow{M} (\varphi \circ M) \otimes (P \circ M) \tag{1}$$

соответствует пространству модулярных форм четного веса $k+2$ относительно $\Gamma_1(N)$. Пусть $\mathcal{D}^{(-)}(N)$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$, состоящее из всех функций $\varphi: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, для которых при любых целых m_1 и m_2

1) $\varphi(-m_1, -m_2) = -\varphi(m_1, m_2)$;

2) $\varphi(m_1, m_2) = \varphi(m_1 + N, m_2) = \varphi(m_1, m_2 + N)$.

Для нечетного целого $k \geqslant 1$ тензорное произведение $\mathcal{D}^{(-)}(N) \otimes \mathcal{P}_k$, на котором действует Γ по правилу (1), соответствует пространству модулярных форм веса $k+2$ относительно $\Gamma_1(N)$. При этом свойство 1) и нечетность k определяют корректность действия Γ в том смысле, что

$$\varphi \circ (\pm E) \otimes P(\pm E) = \varphi \circ P.$$

3. Коциклы Эйхлера

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный Γ-модуль. Обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ множество всех отображений

$$F:\ P^1(\mathbb{Q}) \to \mathcal{L},$$

для которых при любых M из Γ и α из $P^1(\mathbb{Q})$ выполняется равенство

$$F\big(M(\alpha)\big) = F(\alpha) \circ M^{-1}.$$

На $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ стандартным способом вводится структура левого модуля над K по формуле

$$\big(w_1F_1 + w_2F_2\big)(\alpha) = w_1F_1(\alpha) + w_2F_2(\alpha)$$

с $w_1, w_2 \in K$. Поскольку для любого $\alpha \in P^1(\mathbb{Q})$ найдется матрица M_α с $\alpha = M_\alpha(\infty)$, то соответствие

$$F \longrightarrow A_F = F(\infty)$$

определяет вложение $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ в $\mathcal{L}$. Обозначим его образ через $\mathcal{L}^{(\infty)}$. Из определений немедленно вытекают следующие утверждения.

Замечание 2.

$$\mathcal{L}^{(\infty)} = \big\{A \in \mathcal{L} \mid A \circ M = A\ \forall M \in \Gamma_\infty\big\} = \big\{A \in \mathcal{L} \mid A \circ T = A\big\}.$$

Замечание 3. Для $A \in \mathcal{L}^{(\infty)}$ соответствие $A \longrightarrow F_A$, где $F_A(\alpha) = A \circ M^{-1}$ с $\alpha = M(\infty)$, определяет вложение $\mathcal{L}^{(\infty)}$ в $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.

Подытоживая вышесказанное, получаем еще одно утверждение.

Замечание 4. Соответствие $F \longrightarrow F(\infty)$ определяет изоморфизм $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ (пространство 0-коциклов Эйхлера) на $\mathcal{L}^{(\infty)}$.

Обозначим через $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ множество всех отображений

$$\Phi:\ P^1(\mathbb{Q}) \times P^1(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{L}$$

таких, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P^1(\mathbb{Q})$ и любого $M \in \Gamma$ выполняются соотношения

1) $\Phi(\alpha, \beta) + \Phi(\beta, \gamma) = \Phi(\alpha, \gamma)$;

2) $\Phi\big(M(\alpha), M(\beta)\big) = \Phi(\alpha, \beta) \circ M^{-1}$.

Как и в [6], мы назовем $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ модулем Эйхлера (модуль 1-коциклов Эйхлера) над K, имея в виду, что

$$\big(w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2\big)(\alpha, \beta) = w_1\Phi_1(\alpha, \beta) + w_2\Phi_2(\alpha, \beta) \quad \forall w_1, w_2 \in K.$$

Замечание 5. Полагая в (1) $\alpha = \beta = \gamma$, получим равенство $\Phi(\alpha, \alpha) = 0$, и при $\alpha = \gamma$ $\Phi(\alpha, \beta) = -\Phi(\beta, \alpha)$ для любых $\alpha, \beta \in P^1(\mathbb{Q})$.

Нетрудно убедиться в том, что соответствие $F \longrightarrow \partial F$, где

$$\partial F(\alpha, \beta) = F(\alpha) - F(\beta),$$

определяет вложение $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ в $\mathcal{E}(\mathcal{L})$. При этом возникает левый K-модуль параболических когомологий Эйхлера

$$\mathcal{H}(\mathcal{L}) = \mathcal{E}(\mathcal{L})/\mathcal{F}(\mathcal{L}).$$

4. Модули Эйхлера – Шимуры

Пусть $\alpha = (m : n)$ и $\alpha' = (m' : n')$ — канонические представления точек α и α' на проективной прямой. Положим

$$\Delta(\alpha, \alpha') = \left|\det \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix}\right|.$$

Это неотрицательное целое число, равное нулю только для $\alpha = \alpha'$. При этом

$$\Delta(\infty, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

а также для любых $\alpha, \alpha' \in P^1(\mathbb{Q})$ и любых $M \in \Gamma$

$$\Delta\big(M(\alpha), M(\alpha')\big) = \Delta(\alpha, \alpha'). \tag{4.1}$$

Фундаментальную роль в рассматриваемой теории играет следующая теорема.

Теорема. *Соответствие*

$$\Phi \longrightarrow A_\Phi = \Phi(\infty, 0) \tag{4.2}$$

определяет изоморфизм между $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ и подмодулем $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$ в $\mathcal{L}$ (модуль Эйхлера – Шимуры), элементами которого являются все A из $\mathcal{L}$, удовлетворяющие соотношениям Эйхлера – Шимуры

$$A + A \circ S = 0, \quad A + A \circ U + A \circ U^2 = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. В соответствии с определениями,

$$A_\Phi + A_\Phi \circ S = \Phi(\infty, 0) + \Phi(\infty, 0) \circ S = \Phi(\infty, 0) + \Phi\big(S(\infty), S(0)\big) = \\ = \Phi(\infty, 0) + \Phi(0, \infty) = 0,$$

$$A_\Phi + A_\Phi \circ U + A_\Phi \circ U^2 = \Phi(\infty, 0) + \Phi(\infty, 0) \circ U + \Phi(\infty, 0) \circ U^2 = \\ = \Phi(\infty, 0) + \Phi\big(U^2(\infty), U^2(0)\big) + \Phi\big(U(\infty), U(0)\big) = \\ = \Phi(\infty, 0) + \Phi(0, 1) + \Phi(1, \infty) = 0.$$

Поэтому соответствие (4.2) определяет гомоморфизм модуля $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ в $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$.

Пусть r — рациональное число из интервала $(0, 1)$ и $-\dfrac{1}{r} = l + r'$, где l — целая часть $-\dfrac{1}{r}$ и $r' \in [0, 1)$ — дробная часть. Тогда

$$\Phi(\infty, r) = \Phi(\infty, 0) + \Phi(0, r) = \Phi(\infty, 0) + \Phi(\infty, -1/r) \circ S.$$

Поэтому

$$\Phi(\infty, r) = \Phi(\infty, 0) + \Phi(\infty, r') \circ \big(T^{-l} S\big). \tag{4.4}$$

Если $r = \dfrac{m}{n}$ со взаимно простыми натуральными m и n, для которых $m < n$, то $-n = ml + n'$, где число n' — неотрицательное целое и $n' = mr' < m$. Поэтому

$$m = \Delta(\infty, r') < n = \Delta(\infty, r). \tag{4.5}$$

Интегрируя равенство (4.4) и принимая во внимание неравенство (4.5), получим, что для некоторых $M_1, \ldots, M_k$, зависящих от r, выполняется равенство

$$\Phi(\infty, r) = \sum_{s=1}^{k} \Phi(\infty, 0) \circ M_s.$$

Кроме того, для любых $\alpha \neq \alpha'$ найдется $M = M_\alpha \in \Gamma$ с

$$\Phi(\alpha, \alpha') = \Phi(\infty, r) \circ M$$

для некоторого $r \in [0,1)$. Поэтому, если $\Phi(\infty, 0) = A_\Phi = 0$, то $\Phi(\alpha, \alpha') = 0$ для любых $\alpha, \alpha' \in P^1(\mathbb{Q})$. Отсюда следует, что гомоморфизм (4.2) — инъекция.

Теперь докажем сюръективность рассматриваемого гомоморфизма. Пусть A — произвольный элемент из $\mathcal{L}$, удовлетворяющий соотношениям Эйхлера – Шимуры (4.3). Положим

$$\Phi_A(\alpha, \alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_A(\infty, 0) = A.$$

С помощью рекурсивного соотношения (4.4) определим $\Phi_A(\infty, \alpha)$ для $\alpha \in [0,1)$. Поскольку для всех $\alpha \neq \alpha'$ существует единственный элемент M из Γ с

$$\big(M(\infty), M(r)\big) = (\alpha, \alpha'),$$

где $r \in [0,1)$, то мы можем распространить определение Φ_A на остальные пары (α, α') по формуле

$$\Phi_A(\alpha, \alpha') = \Phi_A(\infty, r) \circ M^{-1}. \tag{4.6}$$

В соответствии с этим равенством

$$\Phi_A(\alpha, \alpha') \circ M_1^{-1} = \Phi_A\big(M(\infty), M(r)\big) \circ M_1^{-1} = \\ = \Phi_A(\infty, r) \circ (M_1 M)^{-1} = \Phi_A\big(M_1 M(\infty), M_1 M(r)\big) = \Phi_A\big(M_1(\alpha), M_1(\alpha')\big)$$

для любого $M_1 \in \Gamma$. Осталось только доказать, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P^1(\mathbb{Q})$

$$\Phi_A(\alpha, \beta) + \Phi_A(\beta, \gamma) = \Phi_A(\alpha, \gamma).$$

Заметим, что

$$\Phi_A(0, \infty) = \Phi_A(\infty, 0) \circ S = A \circ S = -A = -\Phi_A(\infty, 0).$$

Покажем, что для всех $r \in \mathbb{Q}$ выполняется соотношение

$$\Phi_A(\infty, r) = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, r), \tag{4.7}$$

которое очевидно при $r = 0$. Поскольку под действием S это равенство преобразуется к виду

$$\Phi_A(\infty, -1/r) = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, -1/r),$$

то его достаточно доказать для $r \in (0, \infty)$. Заметим, что

$$\Phi_A(\infty, 1) = \Phi_A(\infty, 0) \circ T^{-1} = A \circ T^{-1} = -A \circ (ST^{-1}) = \\ = -A \circ U^2 = A + A \circ U = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(\infty, 0) \circ U = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, 1).$$

Таким образом, равенство (4.7) выполняется для $r \in (0, 1]$.

Пусть теперь (4.7) выполняется для некоторого $r > 0$. Тогда, в соответствии с рекурентным соотношением (4.4),

$$-\Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(\infty, r+1) = -\Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(\infty, r) \circ T^{-1} = \\ = -\Phi_A(\infty, 0) + \big(\Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, r)\big) \circ T^{-1} = -\Phi_A(\infty, 0) + A \circ T^{-1} + \Phi_A(0, r) \circ T^{-1} = \\ = -A - A \circ U^2 + \Phi_A(\infty, -1/r) \circ (ST^{-1}) = A \circ U + \Phi_A\left(\infty, -\frac{r+1}{r}\right) \circ T^{-1} U^2 = \\ = \Phi_A(\infty, 0) \circ U + \Phi_A\left(0, \frac{r}{r+1}\right) \circ U = \Phi_A(\infty, 0) \circ U + \left(\Phi_A\left(\infty, \frac{r}{r+1}\right) - \Phi_A(\infty, 0)\right) \circ U = \\ = \Phi_A\left(\infty, -\frac{1}{r+1}\right) \circ S = \Phi_A(0, r+1).$$

Поэтому
$$\Phi_A(\infty, r+1) = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, r+1).$$
Итерируя это равенство для всех $r \in (0,1]$, получим (4.7) для любого $r \in (0,\infty)$. Следовательно, в соответствии с вышесказанным, при всех $\alpha \in P^1(\mathbb{Q})$
$$\Phi_A(\infty, \alpha) = \Phi_A(\infty, 0) + \Phi_A(0, \alpha).$$
Действуя на это равенство справа элементами из Γ, получим, что для любых $\alpha, \widetilde{\alpha}, \alpha' \in P^1(\mathbb{Q})$ с $\Delta(\alpha, \widetilde{\alpha}) = 1$, выполняется равенство
$$\Phi_A(\alpha, \alpha') = \Phi_A(\alpha, \widetilde{\alpha}) + \Phi_A(\widetilde{\alpha}, \alpha'). \tag{4.8}$$
Кроме того, для некоторого $M \in \Gamma$
$$\Phi_A(\alpha, \widetilde{\alpha}) = \Phi_A(\infty, 0) \circ M^{-1} = -\Phi_A(0, \infty) \circ M^{-1} = -\Phi_A(\widetilde{\alpha}, \alpha). \tag{4.9}$$
Из рекурсивного соотношения (4.4) и равенства (4.9) следует, что для любых α и α' из $P^1(\mathbb{Q})$ найдутся $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}$ из $P^1(\mathbb{Q})$ с
$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_{s+1} = \alpha', \quad \Delta(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1 \quad (i = 0, \ldots, s),$$
для которых
$$\Phi_A(\alpha, \alpha') = \sum_{i=0}^{s} \Phi_A(\alpha_i, \alpha_{i+1}).$$
Поэтому для любых $\alpha, \alpha', \alpha''$ из $P^1(\mathbb{Q})$
$$\Phi_A(\alpha', \alpha'') - \Phi_A(\alpha, \alpha'') + \Phi_A(\alpha, \alpha') =$$
$$= \Phi_A(\alpha', \alpha'') - \sum_{i=0}^{s} \Phi_A(\alpha_i, \alpha_{i+1}) - \Phi_A(\alpha', \alpha'') + \sum_{i=0}^{s} \Phi_A(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0.$$
При этом мы воспользовались соотношением
$$\Phi_A(\alpha, \alpha'') = \sum_{i=0}^{s} \Phi_A(\alpha_i, \alpha_{i+1}) + \Phi_A(\alpha', \alpha''),$$
которое получается итерированием (4.8). Поэтому
$$\Phi_A(\alpha, \alpha') + \Phi_A(\alpha', \alpha'') = \Phi_A(\alpha, \alpha'').$$
Теорема полностью доказана.

5. Операторы Гекке

Пусть $\widetilde{\Gamma}$ — мультипликативная полугруппа, состоящая из пар целочисленных матриц
$$Q = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
с $\det(Q) > 0$. Она разбивается в объединение непересекающихся множеств
$$\widetilde{\Gamma}(d) = \left\{ Q \in \widetilde{\Gamma} \;\middle|\; \det(Q) = d \right\}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

При этом $\Gamma = \widetilde{\Gamma}(1)$. Пусть

$$\widetilde{\Gamma}(d) = \bigcup_{j=1}^{\sigma(d)} \{\Gamma Q_j\}$$

— разложение $\widetilde{\Gamma}(d)$ на непересекающиеся классы относительно левого действия Γ с представителями Q_j. Для любой функции Φ из $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ определим

$$H(d) * \Phi : \ P^1(\mathbb{Q}) \times P^1(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{L}$$

по формуле

$$\big(H(d) * \Phi\big)(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Phi\big(Q_j(\alpha), Q_j(\beta)\big) \circ Q_j.$$

Теорема 2. *Для любого натурального d и любого Φ из $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ функция $H(d) * \Phi$ также будет элементом $\mathcal{E}(\mathcal{L})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in P^1(Q)$. Тогда

$$\big(H(d) * \Phi\big)(\alpha, \beta) + \big(H(d) * \Phi\big)(\beta, \gamma) - \big(H(d) * \Phi\big)(\alpha, \gamma) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Big(\Phi\big(Q_j(\alpha), Q_j(\beta)\big) + \Phi\big(Q_j(\beta), Q_j(\gamma)\big) - \Phi\big(Q_j(\alpha), Q_j(\gamma)\big)\Big) \circ Q_j = 0.$$

Заметим, что для любого $M \in \Gamma$

$$\big(H(d) * \Phi\big)\big(M(\alpha), M(\beta)\big) = \sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Phi\Big(Q_j\big(M(\alpha)\big), Q_j\big(M(\beta)\big)\Big) \circ Q_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Phi\Big(\big(Q_j M\big)(\alpha), \big(Q_j M\big)(\beta)\Big) \circ \big(Q_j M\big) \circ M^{-1}.$$

Поскольку при умножении на M справа классы из $\Gamma\backslash\widetilde{\Gamma}(d)$ просто переставляются, то последняя сумма равна

$$\left(\sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Phi\big(Q_j(\alpha), Q_j(\beta)\big) \circ Q_j\right) \circ M^{-1} = \big(H(d) * \Phi\big)(\alpha, \beta) \circ M^{-1}.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Действуя стандартным способом, как в [2] или в [7], нетрудно показать, что для любых натуральных d_1 и d_2 выполняется равенство

$$H(d_1) H(d_2) = \sum_{\substack{l \backslash d_1 \\ l \backslash d_2}} l \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} H\left(\frac{d_1 d_2}{l^2}\right),$$

из которого следует, что $H(d)$ (операторы Гекке) коммутируют между собой.

Канонический изоморфизм $\mathcal{E}(\mathcal{L})$ на $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$ индуцирует действие $H(d)$ на $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$ по формуле

$$H(d) A_\Phi = \sum_{j=1}^{\sigma(d)} \Phi\big(Q_j(\infty), Q_j(0)\big) \circ Q_j.$$

Список литературы

1. *Eichler M.* Eine Verallgemeinerung derAbelschen Integrale. Math. Z., 67, 267–298 (1957).
2. *Shimura G.* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton Univ. Press. NJ, 1971 [Имеется перевод: Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. Мир, М., 1973]
3. *Манин Ю.И.* Параболические формы и дзета-функции модулярных кривых. Изв. АН СССР, сер. матем., 36, 19–66 (1972).
4. *Манин Ю.И.* Периоды параболических форм и p-адические ряды Гекке. Матем. сб., 92, № 3, 378–401 (1973).
5. *Manin Yu.I.* Explicit formulas for the eigenvalues of Hecke operators. Acta Arith., 24, 239–249 (1973).
6. *Быковский В.А.* Образующие элементы аннулирующего идеала для модулярных символов. Функциональный анализ и его приложения, 37, вып. 4, 27–38 (2003).
7. *Rankin R.A.* Modular forms and function. Cambridge University Press (1977).

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проект № 09-1-ОМН-09)

Bykovskii V.A. Eichler – Shimura – Manin Theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 29–37.

ABSTRACT

We study the category of moduli with right action of $PSL_2(\mathbb{Z})$. Analogues of modular forms (Eichler – Shimura moduli) including the theory of Hecke operators are constructed for this category.

Key words: *automorphic functions, modular symbols, Eichler – Shimura relations*