ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 84–93

УДК 517.54
MSC2000 31A15, 30C85

© В.Н. Дубинин*

Емкости конденсаторов и симметризация в задачах об экстремальном разбиении

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Емкостной подход и симметризация Штейнера применяются к решению двух задач об экстремальном разбиении на сфере Римана. В первой задаче с фиксированными полюсами речь идет о неравенстве между приведенными модулями относительно внутренних точек и приведенными модулями полос и полуполос. Вторая задача относится к экстремальным разбиениям со свободными полюсами на двух концентрических окружностях. Полученные результаты дополняют и уточняют некоторые классические и современные утверждения такого рода в различных направлениях.

Ключевые слова: *емкость конденсатора, приведенный модуль, симметризация Штейнера, функция Грина, функция Робена, экстремальные разбиения*

1. Введение и основные определения

Указанные в заглавии задачи более или менее непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций [1]. Значительные результаты в решении такого рода задач получены в работах представителей петербуржской математической школы: Г.М. Голузина, Н.А. Лебедева, Ю.Е. Аленицына, Г.В. Кузьминой, Е.Г. Емельянова и других математиков. Исследования в этом направлении продолжаются до сих пор [1–4]. Некоторые успехи в решении задач об экстремальном разбиении достигнуты с помощью разделяющего преобразования конденсаторов [5–7]. Один из наиболее ярких результатов, полученных методом экстремальных метрик, принадлежит Е.Г. Емельянову [8]. По существу, им установлена связь между задачами об экстремальном разбиении на односвязные круговые области и задачами о разбиении на полосообразные области (полосы). В настоящей заметке развиваются емкостной подход к решению подобного рода задач и метод симметризации. В частности, мы распространяем результаты Е.Г. Емельянова [8] на случай многосвязных областей с возможным налеганием их друг на друга. Помимо полос рассматриваются также полуполосы, и наряду с внутренними радиусами в [8] вводятся радиусы Робена.

Пусть B — открытое множество на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обобщенным конденсатором в $\overline{B}$ назовем тройку $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ — совокупность замкнутых непустых попарно непересекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 1, \ldots, n$, а $\triangle = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$ [9,10]. Открытое в $\overline{B}$ множество $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ будем называть полем конденсатора C, множества E_k — пластинами этого конденсатора, а

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул.Радио, 7. Электронная почта: dubinin@iam.dvo.ru

числа δ_k — уровнями потенциала или, короче, потенциалами пластин E_k, $k = 1, \dots, n$. Емкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле $I(v, B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k)$ по всем *допустимым функциям* v, т.е. вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k, $k = 1, \dots, n$. Если участки границы $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ гладкие и существует функция u, непрерывная в $\overline{B}$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, гармоническая в $B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, равная δ_k на E_k, $k = 1, \dots, n$, и такая, что $\partial u / \partial n = 0$ на $(\partial B) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, то указанную функцию будем называть *потенциальной функцией* конденсатора C, а сам конденсатор C — *допустимым.* В силу принципа Дирихле

$$\operatorname{cap} C = I(u, B).$$

В дальнейшем слово "обобщенный" в названии конденсатора будем опускать. В случае, когда B — конечносвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, будем рассматривать также конденсаторы вида $C = (B, \mathcal{E}, \triangle)$, определенные, как и выше, но с заменой множества $\overline{B}$ на $[B]$ — компактификацию области B посредством простых концов Каратеодори; граница $\partial[B]$ — совокупность простых концов. Под окрестностью в этом случае понимается любое открытое в $[B]$ множество, а пластины совокупности $\mathcal{E}$ суть замкнутые подмножества $[B]$. В приложениях важно различать достижимые граничные точки области B, имеющие один и тот же носитель. Для простоты изложения все утверждения в последующих параграфах сформулированы в терминах конденсаторов, определенных с топологией на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Параметрическое семейство областей $D(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, назовем *асимптотически круговым*, если выполняются включения

$$U(z_0, s(r)) \subset D(z_0, r) \subset U(z_0, t(r))$$

для некоторых положительных функций $s(r)$ и $t(r)$, $0 < r < r_0$, удовлетворяющих условиям $s(r) \sim t(r) \sim r$, $r \to 0$. Элемент асимптотически кругового семейства $D(z_0, r)$ будем называть *почти кругом* с центром в точке z_0 радиуса r. Пусть B — открытое множество на $\overline{\mathbb{C}}$; $Z = \{z_k\}_{k=1}^{n}$ — совокупность различных точек множества B; $\triangle = \{\delta_k\}_{k=0}^{n}$ — совокупность вещественных чисел, $\delta_0 = 0$; и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{n}$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k, $k = 1, \dots, n$ — произвольные положительные числа. Пусть $D(z_k, \psi_k(r))$, $0 < r < r_0$, $k = 1, \dots, n$, — асимптотически круговые семейства областей. При достаточно малом $r > 0$ определен конденсатор

$$C(r; B, \partial B, Z, \triangle, \Psi) = (B, \{E_k\}_{k=0}^{n}, \triangle),$$

где $E_0 = \partial B$, $E_k = \overline{D(z_k, \psi_k(r))}$, $k = 1, \dots, n$. В работе [9] получена асимптотическая формула

$$\operatorname{cap} C(r; B, \partial B, Z, \triangle, \Psi) = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} +$$

$$+ R(B, \partial B, Z, \triangle, \Psi) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \ r \to 0, \qquad (1)$$

где

$$R(B, \partial B, Z, \triangle, \Psi) = -2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\}.$$

Предполагается, что каждая связная компонента множества B имеет функцию Грина; $g_B(z, z_k)$ — функция Грина связной компоненты множества B с полюсом в точке z_k, доопределенная нулем вне этой компоненты; $r(B, z_k)$ — внутренний радиус связной компоненты множества B, содержащей точку z_k. Величина $R(B, \partial B, Z, \triangle, \Psi)$ совпадает с точностью множителя с приведенным модулем множества B относительно совокупностей $Z, \triangle$ и Ψ [9]. Пусть теперь B — конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек; Γ — непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент; $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных точек области B, $k = 1, \dots, n$; $\triangle = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ — совокупность вещественных чисел, $\delta_0 = 0$; и $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k, $k = 1, \dots, n$, — произвольные положительные числа. Пусть $D(z_k, \psi_k(r))$, $0 < r < r_0$, $k = 1, \dots, n$, — асимптотически круговые семейства областей. При достаточно малом $r > 0$ определен конденсатор

$$C(r; B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) = (B, \{E_k\}_{k=0}^n, \triangle),$$

где на этот раз $E_0 = \Gamma$ и $E_k = \overline{D(z_k, \psi_k(r))}$, справедлива формула [10]:

$$\operatorname{cap} C(r; B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} +$$

$$+R(B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \ r \to 0, \tag{2}$$

где квадратичная форма

$$R(B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi) = -2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, \Gamma, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l, \Gamma) \right\},$$

$g_B(z, z_k, \Gamma)$ — функция Робена области B относительно Γ и с полюсом в точке z_k [11–12], а радиус Робена определяется равенством

$$r(B, \Gamma, z_k) = \exp\left\{ \lim_{z \to z_k} [g_B(z, z_k, \Gamma) + \log |z - z_k|] \right\}, \ \text{ когда } \ z_k \neq \infty,$$

и

$$r(B, \Gamma, \infty) = \exp\left\{ \lim_{z \to \infty} [g_B(z, \infty, \Gamma) - \log |z|] \right\}.$$

При частных значениях $B, \Gamma, Z, \triangle$ и Ψ величина $R(B, \Gamma, Z, \triangle, \Psi)$ лишь множителем отличается от известных приведенных модулей. Нам понадобятся также приведенные модули полос и полуполос. Полосой называется односвязная область гиперболического типа с двумя отмеченными различными достижимыми граничными точками, называемыми вершинами. Будем рассматривать только те полосы P, у которых вершины z_1 и z_2 обладают следующим свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает P на прямолинейную полосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ так, что $f(z_1) = -i\infty$, $f(z_2) = +i\infty$, то в окрестности каждой точки z_k справедливо разложение

$$f(z) = \frac{(-1)^{k+1} i}{\varphi_k \pi} \log(z - z_k) + c_k + o(1), \quad z \to z_k, \tag{3}$$

где $\varphi_k > 0$ и c_k — постоянные, $k = 1, 2$ (в случае $z_k = \infty$ локальный параметр $z - z_k$ заменяем на $1/z$). Ясно, что $\varphi_k \pi$ — внутренний угол области P в точке z_k, $k = 1, 2$. Траектория полосы P определяется как прообраз любой прямой $\operatorname{Re} w = u,\ 0 < u < 1$, при отображении f. Следуя [13,14], приведенным модулем области P назовем величину

$$M(P) = \operatorname{Im}(c_2 - c_1).$$

Аналогично сказанному о полосе, полуполоса — это односвязная область гиперболического типа $P,\ P \subset \overline{\mathbb{C}}$, с тремя отмеченными различными достижимыми граничными точками $z_1,\ z_2$ и z_3, расположенными в положительном направлении обхода границы P, одна из которых (пусть z_1) называется вершиной. Рассматриваем только те полуполосы P, у которых вершина z_1 обладает следующим свойством. Если функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает область P на прямолинейную полуполосу $\{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ так, что $f(z_1) = -i\infty,\ f(z_2) = 1,\ f(z_3) = 0$, то в окрестности точки z_1 выполняется разложение (3) при $k = 1$. Следуя [15], приведенный модуль полуполосы P определяем как

$$M(P) = -\operatorname{Im} c_1.$$

В работе [15] фигурирует эквивалентное понятие приведенного модуля треугольника (а не полуполосы), что, на наш взгляд, менее точно, так как треугольник предполагает наличие трех угловых точек, а не одной, как в нашем случае. Траекторию полуполосы P определим как прообраз любой полупрямой $\operatorname{Re} w = u,\ \operatorname{Im} w \leqslant 0,\ 0 < u < 1$, при отображении f. В частности, траектория содержит соответствующий граничный элемент на “стороне” z_2z_3. Число φ_k в разложении (3) в случае полосы $(k = 1, 2)$ либо полуполосы $(k = 1)$ назовем показателем вершины z_k области P.

2. Неравенство для квадратичных форм

Рассмотрим совокупность различных точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ и конечную совокупность попарно непересекающихся полос и полуполос $\{P\}$, носители вершин которых расположены в точках из $\{z_k\}_{k=1}^n$ так, что каждая точка z_k является носителем некоторой вершины. Обозначим через $z_{kl},\ l = 1, \ldots, m_k$, все вершины областей из $\{P\}$, для которых точка z_k является носителем, $k = 1, \ldots, n$. Пусть φ_{kl} — показатель вершины z_{kl}, а P_{kl} — область с вершиной $z_{kl},\ l = 1, \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, n$. Ясно, что при такой нумерации полосы учитываются дважды, а полуполосы — один раз.

Теорема 1. *Пусть совокупности $\{z_k\}_{k=1}^n$ и $\{P\}$ определены выше, и пусть B есть объединение конечного числа попарно непересекающихся конечносвязных областей без изолированных граничных точек, $z_k \in B,\ k = 1, \ldots, n$; Γ — непустое замкнутое подмножество границы ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, $P_{kl} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus ((\partial B) \setminus \Gamma),\ k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, m_k$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — произвольная совокупность вещественных чисел. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $\sum\limits_{l=1}^{m_k} \varphi_{kl} = 2, \qquad k = 1, \ldots, n;$

2) *для любой полосы P_{kl} совокупности $\{P\}$ справедливо равенство $|x_k\varphi_{kl}| = |x_{k'}\varphi_{k'l'}|$, где φ_{kl} и $\varphi_{k'l'}$ — показатели вершин этой полосы*;

3) *если P_{kl} — полуполоса, либо P_{kl} — полоса с вершинами z_{kl} и $z_{k'l'}$, причем $x_kx_{k'} > 0$, то ни одна из траекторий области P_{kl} не принадлежит множеству B, $1 \leqslant l, l' \leqslant m_k$, $1 \leqslant k, k' \leqslant n$.*

Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \log r(B_k, \Gamma_k, z_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} x_k x_l g_{B_k}(z_l, z_k, \Gamma_k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \left[\frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{m_k}\lambda_{kl}\varphi_{kl}^2 M(P_{kl})\right], \tag{4}$$

где $\lambda_{kl}=1/2$, если P_{kl} — полоса, и $\lambda_{kl}=1$, если P_{kl} — полуполоса, B_k — связная компонента множества B, содержащая точку z_k, $\Gamma_k=\Gamma\cap(\partial B_k)$ и функция Робена $g_{B_k}(z,z_k,\Gamma_k)$ доопределена нулем вне B_k, $k=1,\ldots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что каждая связная компонента множества B ограничена конечным числом гладких кривых и содержит по крайней мере одну точку z_k, $1\leqslant k\leqslant n$. Кроме того, теорему 1 достаточно доказать в случае, когда области совокупности $\{P\}$ ограничены кусочно-гладкими кривыми, а числа x_k, $k=1,\ldots,n$, отличны от нуля. Пусть $w=f_{kl}(z)$ — функция из определения области $P_{kl}\in\{P\}$, $f_{kl}(z_{kl})=-i\infty$, доопределенная на границе P_{kl} в смысле граничного соответствия, $l=1,\ldots,m_k$, $k=1,\ldots,n$. Введем следующие обозначения:

$E_k=\overline{U(z_k,r^{1/|x_k|})}$, $k=1,\ldots,n$;

$C(r)=(B,\{\Gamma,E_1,\ldots,E_n\},\{1,\operatorname{sign}x_1,\ldots,\operatorname{sign}x_n\})$;

ω — потенциальная функция конденсатора $C(r)$;

$\gamma=\{z\in\overline{B}:\omega(z)=0\}$.

$C_{kl}(r)=(P_{kl},\{\gamma\cap\overline{P}_{kl},E_k\cap\overline{P}_{kl},E_{k'}\cap\overline{P}_{kl}\},\{0,\operatorname{sign}x_k,\operatorname{sign}x_{k'}\})$, если P_{kl} — полоса с вершинами z_{kl} и $z_{k'l'}$;

$C_{kl}(r)=(P_{kl},\{\gamma\cap\overline{P}_{kl},E_k\cap\overline{P}_{kl}\},\{0,\operatorname{sign}x_k\})$, если P_{kl} — полуполоса с вершиной z_{kl}.

Из принципа композиции (теорема 4 статьи [10]) следует

$$\operatorname{cap}C(r)=\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{C}}\setminus((\partial B)\setminus\Gamma),\{\gamma,E_1,\ldots,E_n\},\{0,\operatorname{sign}x_1,\ldots,\operatorname{sign}x_n\})\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\lambda_{kl}\operatorname{cap}C_{kl}(r).$$

Пусть
$$\widetilde{C}_{kl}(r)=(P_{kl},\{\gamma\cap\overline{P}_{kl},(E_k\cup E_{k'})\cap\overline{P}_{kl},\{0,1\})\ \text{ в случае полосы }\ P_{kl}$$
и
$$\widetilde{C}_{kl}(r)=(P_{kl},\{\gamma\cap\overline{P}_{kl},E_k\cap\overline{P}_{kl}\},\{0,1\}),\ \text{ если }\ P_{kl}\ -\ \text{полуполоса}.$$
Очевидно, что
$$\operatorname{cap}C_{kl}(r)=\operatorname{cap}\widetilde{C}_{kl}(r)=\operatorname{cap}f_{kl}(\widetilde{C}_{kl}(r)),\ \ k=1,\ldots,n,\ l=1,\ldots,m_k.$$
Наконец, в случае полосы P_{kl} обозначим через $SC_{kl}(r)$ результат симметризации Штейнера относительно вещественной оси конденсатора $f_{kl}(\widetilde{C}_{kl}(r))$, а если P_{kl} — полуполоса, то $SC_{kl}(r)$ — результат такой симметризации симметричного относительно вещественной оси конденсатора в полосе $0\leqslant\operatorname{Re}w\leqslant1$, совпадающего в полуполосе $\{w:0\leqslant\operatorname{Re}w\leqslant1,\operatorname{Im}z\leqslant 0\}$ с конденсатором $f_{kl}(\widetilde{C}_{kl}(r))$. Из теоремы Полиа и Сеге [5] для полос имеем

$$\operatorname{cap}f_{kl}(\widetilde{C}_{kl}(r))\geqslant\operatorname{cap}SC_{kl}(r),$$

а для полуполос с учетом принципа симметрии выполняется

$$\operatorname{cap}f_{kl}(\widetilde{C}_{kl}(r))\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{cap}SC_{kl}(r)$$

(доказательство теоремы Полиа и Сеге в известной нам литературе приводится только для конденсаторов на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Однако оно легко переносится также на случай конденсаторов, заданных в полосе).

Окончательно

$$\operatorname{cap} C(r) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\operatorname{cap} SC_{kl}(r).$$

Если P_{kl} — полоса с вершинами $z_{kl}, z_{k'l'}$ и $x_k x_{k'} < 0$, то ввиду непрерывности функции ω любая траектория этой полосы пересекается с γ. В остальных случаях любая траектория области P_{kl} пересекается с γ по условию 3) теоремы 1. Поэтому пластина конденсатора $SC_{kl}(r)$, где поддерживается нулевой потенциал, содержит отрезок $[0,1]$. Вторая пластина этого конденсатора есть объединение двух почти прямолинейных полуполос, "уходящих" в бесконечность при $r \to 0$. Привлекая разложение (3) и второе условие теоремы 1, заключаем, что

$$\operatorname{cap} SC_{kl}(r) \geqslant \frac{2}{(-\log r)\dfrac{1}{|x_k\varphi_{kl}|\pi} + \lambda_{kl}M(P_{kl}) + o(1)} =$$

$$= \frac{2|x_k\varphi_{kl}|\pi}{-\log r}\left\{1 - \frac{\lambda_{kl}M(P_{kl})|x_k\varphi_{kl}|\pi}{-\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right\}, \quad r \to 0,$$

$l = 1, \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, n$. Суммируя выписанные соотношения и учитывая условие 1), получаем

$$\operatorname{cap} C(r) \geqslant 2\pi\sum_{k=1}^{n}|x_k|\left(\frac{-1}{\log r}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\lambda_{kl}M(P_{kl})x_k^2\varphi_{kl}^2\pi^2\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0. \tag{5}$$

С другой стороны, емкость конденсатора $C(r)$ равна сумме емкостей конденсаторов вида $C(r; B_k, \Gamma_k, Z_k, \triangle_k, \Psi_k)$, где $Z_k = \{z_l : z_l \in B_k\}$, а $\triangle_k$ и Ψ_l — совокупности чисел из $\{0, \operatorname{sign} x_1, \ldots, \operatorname{sign} x_n\}$ и функций из $\{r^{1/|x_1|}, \ldots, r^{1/|x_n|}\}$, соответствующие точкам z_l из области $B_k,\ k = 1, \ldots, n$. Асимптотическая формула для таких емкостей (2) совместно с неравенством (5) дает требуемую оценку (4). Теорема доказана.

В случае, когда множество B представляет собой объединение n попарно непересекающихся односвязных областей, каждая из которых содержит только одну точку z_k и не содержит некоторые точки $a_k,\ k = 1, \ldots, m,\ \Gamma = \partial B$, а совокупность $\{P\}$ состоит только из полос, не содержащих a_k, неравенство (4) получено впервые Е.Г. Емельяновым [8]. Если B — односвязная область, $\Gamma = \partial B,\ n = 1$ и совокупность $\{P\}$ состоит только из полуполос, то неравенство (4) содержится в теореме 3 из статьи А.Ю. Солынина [15]. Отметим, что Е.Г. Емельяновым [8] было показано, как разбиение на полосы дает общую теорему покрытия отрезков, или оценку трансфинитного диаметра континуума [5]. А.Ю. Солынин [15] решил задачу Полиа – Сеге о внутреннем радиусе n-угольника фиксированной площади путем разбиения этого n-угольника на полуполосы. Нетривиальные примеры разбиений на полосы и полуполосы с приложениями к однолистным функциям даны в книге А.Ю. Васильева [16]. Все это вместе взятое говорит о широте применения неравенств вида (4) в геометрической теории функций комплексного переменного. Теорема 1 дает в таких случаях некоторые обобщения либо уточнения. Поясним это на примере классического неравенства М.А. Лаврентьева:

$$r(B_1, a_1)r(B_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2,$$

справедливого для любых непересекающихся областей B_1 и B_2 [5]. Если в теореме 1 взять две конечные точки z_1 и z_2 $(n = 2)$, единственную полосу $P = \overline{\mathbb{C}} \setminus [z_1, z_2]$ с вершинами в точках z_1, z_2 и $x_1 = x_2 = 1$, то неравенство (4) означает, что результат, полученный М.А. Лаврентьевым, справедлив также в случае, когда любая дуга окружности с концами в точках z_1 и z_2 не принадлежит $B = B_1 \cup B_2$. Более того, при этих ограничениях выполняется

$$r(B, z_1) r(B, z_2) \exp(2g_B(z_1, z_2)) \leqslant |a_1 - a_2|^2.$$

Далее пусть $\{\gamma\}$ — совокупность всех окружностей, проходящих через точки z_1 и z_2. Обозначим через B_1^* множество всех точек области B_1, $z_1 \in B_1$, которые можно соединить с точкой z_1 дугой окружности $\gamma \in \{\gamma\}$, целиком лежащей в B_1 и не проходящей через z_2. Аналогично сказанному, B_2^* — множество всех точек B_2, $z_2 \in B_2$, которые можно соединить с z_2 дугой окружности $\gamma \in \{\gamma\}$, лежащей в B_2 и не пересекающей точку z_1. Применяя теорему 1 для подходящего разбиения полосы $P = \overline{\mathbb{C}} \setminus [z_1, z_2]$ на полуполосы, вновь приходим к неравенству М.А. Лаврентьева, но при более слабом ограничении: $B_1^* \cap B_2^* = \emptyset$.

3. Задача со свободными полюсами

Обзор задач об экстремальном разбиении со свободными полюсами представлен в статьях [1] и [5]. Следующее ниже утверждение обобщает постановку некоторых задач со свободными полюсами на окружности (см [5], [8]).

Теорема 2. *Для любых точек* z_k, ζ_k, *удовлетворяющих условию* $\arg z_k = \arg \zeta_k$, $|z_k| = \rho$, $|\zeta_k| = R$, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$, $0 < \rho < R < \infty$, *и любых попарно непересекающихся открытых множеств* $B_k, z_k, \zeta_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, z_k) r(B_k, \zeta_k) \exp(-2g_{B_k}(z_k, \zeta_k)) \leqslant \left[\frac{4\sqrt{\rho R}(R^{n/2} - \rho^{n/2})}{n(R^{n/2} + \rho^{n/2})} \right]^{2n}. \qquad (6)$$

Равенство в (6) *выполняется для областей* $B_k^* = \{z : 2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n\}$ *и точек* $z_k^* = \rho \exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$, $\zeta_k^* = R \exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Введем обозначения $\theta_k = \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n$, $\theta_0 = \theta_n - 2\pi$, $\theta_{n+1} = 2\pi$, $\varphi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Можно считать, что $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$. Положим

$$D_k = \{re^{i\theta} : 0 < r < \infty,\ \theta_k < \theta < \theta_{k+1}\},$$

$$\zeta = p_k(z) \equiv -i(ze^{-i\theta_k})^{\pi/\varphi_k}, \qquad z \in D_k,\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Каждая пара функций $\{p_{k-1}, p_k\}$ образует допустимое семейство функций для разделяющего преобразования областей относительно точки z_k (ζ_k). Пусть $\{B_k^{(1)}, B_k^{(2)}\}$ — результат такого преобразования области B_k, $k = 1, \ldots, n$, и пусть $B_{n+1}^{(1)} = B_1^{(1)}$. Теорема 1.8 работы [5] распространяется на случай обобщенных конденсаторов. Применяя эту теорему, а также принцип композиции (теорема 5 работы [10]), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cap}\, C(r; B_k, \partial B_k, \{z_k, \zeta_k\}, \{1, -1\}, \{r, r\}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{cap}\, C \left(r; B_k^{(1)}, \partial B_k^{(1)}, \left\{ i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}} \right\}, \{1, -1\}, \right.\right.$$

$$\left.\left\{ \frac{\pi}{\varphi_k} \rho^{\frac{\pi}{\varphi_k} - 1} r, \frac{\pi}{\varphi_k} R^{\frac{\pi}{\varphi_k} - 1} r \right\} \right) + \mathrm{cap}\, C \left(r; B_k^{(2)}, \partial B_k^{(2)}, \left\{ -i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, -iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}} \right\}, \right.$$

$$\{1,-1\}, \left\{\frac{\pi}{\varphi_k}\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}R^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r\right\}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big[\mathrm{cap}\, C\Big(r; B_{k+1}^{(1)}, \partial B_{k+1}^{(1)},$$

$$\left\{i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}}\right\}, \{-1,1\}, \left\{\frac{\pi}{\varphi_k}\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}R^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r\right\}\Big) +$$

$$+\mathrm{cap}\, C\Big(r; B_k^{(2)}, \partial B_k^{(2)}, \left\{-i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, -iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}}\right\}, \{1,-1\},$$

$$\left\{\frac{\pi}{\varphi_k}\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}R^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r\right\}\Big)\Big] \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cap}\, C\Big(r; \overline{\mathbb{C}}, \emptyset, \left\{-iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, -i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, i\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}}, iR^{\frac{\pi}{\varphi_k}}\right\},$$

$$\{-1,1,-1,1\}, \left\{\frac{\pi}{\varphi_k}R^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}\rho^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r, \frac{\pi}{\varphi_k}R^{\frac{\pi}{\varphi_k}-1}r\right\}\Big).$$

Заменяя емкости конденсаторов их асимптотическими разложениями (1), а также применяя (2) из статьи [17], приходим к неравенству

$$\log\prod_{k=1}^{n} r(B_k, z_k) r(B_k, \zeta_k)\exp(-2g_{B_k}(z_k, \zeta_k)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\log\frac{4\left(\frac{\varphi_k}{2\pi}\right)\sqrt{\rho R}\left(1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\pi/\varphi_k}\right)}{\left(1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\pi/\varphi_k}\right)} \leqslant 2n\log\frac{4\sqrt{\rho R}\left(1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2}\right)}{n\left(1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n/2}\right)}.$$

В последнем соотношении мы воспользовались выпуклостью вверх функции

$$\log\frac{x(1-\tau^{1/x})}{1+\tau^{1/x}}$$

на промежутке $0 < x < 1$ $(0 < \tau < 1)$. Для областей B_k^* и точек $z_k^*, \zeta_k^*,\ k = 1, \ldots, n$, все приведенные выше неравенства превращаются в равенства. Теорема доказана.

Неравенство(6) появилось впервые в работе [9]. Намеченный там путь доказательства этого неравенства использует, помимо емкостной техники, метод симметризации и специальные свойства подходящих квадратичных дифференциалов.

Выбирая в теореме 2 в качестве открытых множеств B_k непересекающиеся области B_k' и B_k'', получаем следствие 1.

Следствие 1. (Е.Г. Емельянов, [8]) *Если в условиях теоремы 2 $B_k = B_k' \cup B_k''$, $z_k \in B_k'$, $\zeta_k \in B_k''$, $B_k' \cap B_k'' = \emptyset$, $k = 1, \ldots, n$, где B_k', B_k'', $k = 1, \ldots, n$, — односвязные области, то справедлива точная оценка*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k', z_k) r(B_k'', \zeta_k) \leqslant \left[\frac{4\sqrt{\rho R}(R^{n/2} - \rho^{n/2})}{n(R^{n/2} + \rho^{n/2})}\right]^{2n}.$$

В действительности требование односвязности областей B_k', B_k'' здесь излишне.

Следствие 2. *Для любых точек z_k на окружности $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$, и любых попарно непересекающихся областей B_k, $z_k \in B_k \subset \{z : |z| < 1\}$, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$ справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, z_k) \leqslant \left[\frac{4\rho(1-\rho^n)}{n(1+\rho^n)}\right]^n.$$

Равенство достигается для точек $\rho\exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$ и областей $\{z : |z| < 1,\ 2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 2, примененной к точкам $z_k, 1/\overline{z}_k$ и множествам $B_k \cup \{z : 1/\overline{z} \in B_k\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Список литературы

1. *Кузьмина Г.В.* Методы геометрической теории функций II // Алгебра и анализ. 1997. Т.9. Вып.5. С.1–50.

2. *Кузьмина Г.В.* Об одном экстремально–метрическом подходе к задачам об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2006. Т.337. С.191–211.

3. *Кузьмина Г.В.* О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2007. Т.350. С.160–172.

4. *Емельянов Е.Г.* О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами II // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2007. Т.350. С.40–51.

5. *Дубинин В.Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи матем. наук. 1994. Т.49. Вып.1. С.3–76.

6. *Бахтин А.К.* Кусочно разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Допов. НАН Украіни. 2004. Т.12. С.7–13.

7. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. Киев: Институт математики НАН Украины, 2008.

8. *Емельянов Е.Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т.160. С.91–98.

9. *Дубинин В.Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т.237. С.56–73.

10. *Дубинин В.Н.* Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т.302. С.38–51.

11. *Duren P., Schiffer M.* Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J.Math. 1991. V.148. P.251–273.

12. *Duren P., Schiffer M.* Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping // Complex Variables. 1993. V.21. P.189–196.

13. *Кузьмина Г.В.* Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т.154. С.110–129.

14. *Емельянов Е.Г.* К задачам об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 154. С.76–89.

15. *Солынин А.Ю.* Решение одной изопериметрической задачи Полиа – Сеге // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1988. Т.168. С.140–153.

16. *Vasil'ev A.* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings // Lect. Notes in Math. 1788. Springer. 2002.

17. *Дубинин В.Н., Ковалев Л.В.* Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1998. Т.254. С.76–94.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 06 мая 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00028) и ДВО РАН (проект 09-II-CO-01-004)

Dubinin V.N. Condenser capacity and symmetrization in the extremal decomposition problems. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 84–93.

ABSTRACT

Capacity approach and Steiner symmetrization are applied to the solution of two extremal decomposition problems on the Riemann sphere. First, the inequality between generalized reduced moduli with respect to the inner points and the reduced moduli of the strips and half–strips are established. The second problem comes under the heading of extremal decompositions with the free poles on the concentric circles. The results obtained are complementary to some classical and recent theorems in various ways.

Key words: *Key words: capacity of condenser, reduced modulus, Steiner symmetrization, Green's function, Robin function, extremal decomposition*