ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 94–104

УДК 517.9
MSC2000 49K20

© О.С. Колесова*

Синтез оптимального управления МГД течением Гартмана

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Рассматривается задача оптимального управления для модели одномерного магнитогидродинамического течения между параллельными плоскостями (течение Гартмана). В качестве управления выбирается перепад давления на единицу длины канала. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Найдено представление оптимального управления в виде обратной связи.

Ключевые слова: *МГД течение, задача оптимального управления, управление с обратной связью.*

1. Постановка задачи управления

Рассмотрим систему уравнений, описывающих в безразмерных переменных одномерное МГД течение Гартмана

$$\dot{u} - \nu u_{xx} = -f + S\beta B_x, \quad x \in (0,1), t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\dot{B} - \nu_m B_{xx} = \beta u_x. \tag{2}$$

К системе (1)–(2) добавляем начальные и краевые условия:

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=1} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

$$B_x|_{x=0} = 0, \qquad B_x|_{x=1} = 0, \qquad B|_{t=0} = B_0. \tag{4}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — скорость течения, $B = B(x,t)$ — магнитная индукция, $\beta = const$ — индукция внешнего магнитного поля, $f = f(t)$ — перепад давления на единицу длины канала, $\nu = 1/Re, \nu_m = 1/Re_m, S = M^2/(ReRe_m)$, где Re — число Рейнольдса, Re_m — магнитное число Рейнольдса, M — число Гартмана. Через $\dot{u}, \dot{B}$ обозначим частные производные по времени t, а через u_x, B_x, u_{xx}, B_{xx} — первые и вторые частные производные по x. Нулевые краевые условия для скорости соответствуют условию прилипания на твердых поверхностях.

Система следует из уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при моделировании течения между параллельными плоскостями, где векторы скорости и магнитного поля перпендикулярны [1].

Рассматривается задача оптимального управления системой (1)–(2). В качестве управления выбирается перепад давления на единицу длины канала $f = f(t)$.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул.Радио, 7. Электронная почта: best_olga@bk.ru

В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что параметр $S = 1$, поскольку всегда можно сделать замену: $B = \sqrt{S}B$, $\beta = \sqrt{S}\beta$, $B_0 = \sqrt{S}B_0$.

Пусть $U_{ad} \subset L^2(0,T)$ – множество допустимых управлений. Задача управления состоит в нахождении функции $f \in U_{ad}$ такой, что функционал

$$J = \frac{\mu}{2}\int\limits_0^1 (u^2(x,T) + B^2(x,T))dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 [(u(x,t) - u_d(x,t))^2 + (B(x,t) - B_d(x,t))^2]dxdt \qquad (5)$$

принимает минимальное значение на решениях системы (1)–(4). Здесь u_d, B_d — заданные функции.

В работе доказаны существование и единственность решения поставленной задачи, а также получена система оптимальности для нахождения решения задачи. На основе развития метода из [2] для систем с распределенными параметрами построен синтез оптимального управления. Различные задачи оптимального управления для системы (1)–(2) рассмотрены в [3], [4].

2. Пространства и операторы

Сведем начально-краевую задачу (1)–(4) к задаче Коши для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами. Для этого рассмотрим следующие пространства: $H = L^2(0,1)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале (0,1); $V_1 = H_0^1(0,1)$ — подпространство в $H^1(0,1)$, состоящее из функций, принимающих на концах отрезка нулевые значения; $V_2 = H^1(0,1)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, интегрируемых с квадратом вместе с первой производной. Обозначим через $|\cdot|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ нормы в H, V_1 и V_2 соответственно. Отождествим пространство H с сопряженным с ним пространством H'. Обозначим через V_1' и V_2' пространства, сопряженные с V_1 и V_2 соответственно. Тогда $V_1 \subset V_2 \subset H = H' \subset V_2' \subset V_1'$. Определим скалярные произведения в H, V_1 и V_2 соответственно:

$$(u,v) = \int\limits_0^1 uvdx, \quad (u,v)_1 = \int\limits_0^1 u_x v_x dx, \quad (u,v)_2 = (u,v) + (u,v)_1.$$

Пусть $W = V_1 \times V_2$, $\mathcal{H} = H \times H$. Нормы в пространствах $\mathcal{H}$ и W определим равенствами

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = |u|^2 + |B|^2, \quad \|y\|_W^2 = \|u\|_1^2 + \|B\|_2^2 = |u_x|^2 + |B_x|^2 + |B|^2, \quad y = \{u, B\}.$$

В дальнейшем через $L^p(0,T;X)$ (соответственно $C([0,T];X)$), где X — банахово пространство, будем обозначать пространство L^p (соответственно — класс C) функций, определенных на $[0,T]$, принимающих значения в X. Определим также пространство решений задачи (1)–(4):

$$\mathbb{Y} = \{y \in L^2(0,T;W),\ \dot{y} \in L^2(0,T;W')\},$$

$$\|y\|_{\mathbb{Y}} = \|y\|^2_{L^2(0,T;W)} + \|y\|^2_{L^2(0,T;W')} = \int\limits_0^T \|y(t)\|_W^2 dt + \int\limits_0^T \|y(t)\|_{W'}^2 dt.$$

Введем отображения $A : W \to W', L : W \to W'$ и функционал $Q \in W'$, используя следующие соотношения:

$$(Ay, z) = \nu(u_x, v_x) + \nu_m(B_x, w_x),$$

$$(Ly, z) = (B_x, v) + (u_x, w), \quad (Q, z) = (1, v),$$

справедливые для всех $y = \{u, B\}, z = \{v, w\}$ из пространства W.
Операторы A, L обладают свойствами

$$(Ay, y) \geq m_1(|u_x|^2 + |B_x|^2), \quad m_1 = \min(\nu, \nu_m)(Ay, z) = (Az, y), \quad \forall\, y, z \in W, \tag{6}$$

$$(Ly, z) = -(Lz, y), \quad (Ly, y) = 0. \tag{7}$$

Пусть $y = \{u, B\}$ — гладкое решение системы (1)–(4) и $z = \{v, w\}$ — произвольный элемент из W. Умножим уравнение (1) на v, уравнение (2) на w и проинтегрируем по отрезку (0,1), используя формулу интегрирования по частям. Складывая полученные соотношения и используя граничные условия для y и z, получаем

$$(\dot{y} + Ay + fQ - \beta Ly, z) = 0, \quad \forall\, z \in W.$$

Таким образом, под решением (обобщенным) начально-краевой задачи (1)–(4) будем понимать функцию $y \in \mathbb{Y}$ такую, что

$$\dot{y} + Ay - \beta Ly = -f(t)Q, \tag{8}$$

$$y|_{t=0} = y_0. \tag{9}$$

где $y_0 = \{u_0, B_0\} \in \mathcal{H}$.

Отметим, что начальное условие (9) имеет смысл в силу вложения $\mathbb{Y} \subset C([0, 1], \mathcal{H})$.

3. Априорные оценки решений и разрешимость задачи управления

Пару $\{y, f\}$ будем называть допустимой парой, если $f \in U_{ad}$, а функция y является решением системы (8)–(9). Как следует из полученных ниже оценок, множество допустимых пар не пусто [5].

Получим априорные оценки решения задачи (8)–(9). Пусть $y_0 \in \mathcal{H}, f \in U = L^2(0, T)$. Умножим скалярно уравнение (8) на y и воспользуемся свойствами (5) и (7). Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2 + m_1(|u_x|^2 + |B_x|^2) \leq |f(t)|(Q, y) \leq |f(t)|\ |y|. \tag{10}$$

Из полученного неравенства можно получить оценки y в нормах пространств $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ и $L^2(0, T; W)$ следующим образом. Для доказательства оценки в норме $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ опустим в левой части слагаемые, содержащие множитель m_1:

$$|y|\frac{d}{dt}|y| \leq |f|\ |y|. \tag{11}$$

Интегрируя (11), получим

$$\|y(x)\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \leq |y_0| + \int\limits_0^T |f(t)| ds = C_1. \tag{12}$$

Из (12) следует, что $|B| \leq C_1$, чем мы далее воспользуемся.

Для получения оценки в норме $L^2(0,T;W)$ выразим $\|y\|_W^2$ из (10):

$$\|y\|_W^2 \le \frac{1}{m_1}|y|(|f| - \frac{d|y|}{dt}) + |B|^2 \le \frac{C_1}{m_1}\left(|f| - \frac{d|y|}{dt}\right) + C_1^2. \tag{13}$$

Проинтегрируем (13) по t от 0 до T:

$$\int\limits_0^T \|y\|_W^2 dt \le \frac{C_1}{m_1}\left(\int\limits_0^T |f|ds - |y(T)| + |y_0|\right) + C_1^2 T \le \frac{C_1^2}{m_1} + C_1^2 T = C_2.$$

Тогда

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} \le C_1, \quad \|y\|_{L^2(0,T;W)} = \int\limits_0^T \|y\|_W^2 dt \le C_2. \tag{14}$$

В дальнейшем будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям: U_{ad} — выпуклое, замкнутое множество в пространстве U, $y_d = \{u_d, B_d\} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$.

Задача управления, на которую в дальнейшем будем ссылаться как на задачу P, состоит в минимизации функционала

$$J(y) = \frac{\mu}{2}|y(T)|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^T |y(t) - y_d|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

на множестве допустимых пар.

Докажем существование решения задачи P.

Лемма 1. *Множество допустимых пар слабо замкнуто в пространстве* $L^2(0,T;W)\times U$.

Доказательство. Пусть $\{y_k, f_k\}$ — допустимые пары и $\{y_k, f_k\} \to \{y, f\}$ слабо в $L^2(0,T;W) \times U$. Ограниченность y_k (оценка (14)) дает ограниченность $\dot{y}_k$ в $L^2(0,T;W')$, что позволяет применить теорему о компактности [7], из которой следует

$$y_k \to y \text{ сильно в } L^2(0,T;\mathcal{H}).$$

Записав уравнение (8)–(9) для пары $\{y_k, f_k\}$ и перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим, что уравнения справедливы для $\{y, f\}$, причем $f \in U_{ad}$. Следовательно, $\{y, f\}$ – допустимая пара.

Теорема 1. *Пусть множество допустимых управлений U_{ad} ограничено в U. Тогда задача P однозначно разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность допустимых пар $\{y_k, f_k\}$, минимизирующих функционал

$$J(y_k) \to J_* = \inf J, \quad k \to \infty.$$

Из условия теоремы следует ограниченность последовательности f_k в пространстве U. Из оценки (14) вытекает ограниченность $\{y_k\}$ в $L^2(0,T;W)$.

Следовательно, из последовательностей y_k и f_k можно извлечь подпоследовательности такие, что

$$y_{k'} \to y_* \text{ слабо в } L^2(0,T;W), \quad f_{k'} \to f_* \text{ слабо в } U.$$

В силу слабой замкнутости множества допустимых пар и полунепрерывности снизу функционала J получаем, что $\{y_*, f_*\}$ является решением задачи P. Единственность решения следует из строгой выпуклости функционала J.

4. Вывод системы оптимальности

Предварительно отметим, что если $y \in \mathbb{Y}$ и $f \in U_{ad}$ – допустимая пара, то справедливы включения

$$Ay \in L^2(0,T;W'), \quad \beta Ly \in L^2(0,T;W').$$

Действительно,

$$\|Ay\|^2_{L^2(0,T;W')} = \int_0^T \sup_{\|z\|=1} (Ay,z)^2\,dt \le m_2 \int_0^T \|y\|_1^2 dt, \quad m_2 = max\{\nu, \nu_m\},$$

$$\|\beta Ly\|^2_{L^2(0,T;W')} = \int_0^T \beta^2 \sup_{\|z\|=1} (Ly,z)^2\,dt = \int_0^T \beta^2 \sup_{\|z\|=1} (y,Lz)^2\,dt \le \int_0^T \beta^2|y|^2 \le$$

$$\le \|\beta\|_U^2 \|y\|^2_{L^\infty(0,T;W)} \le \|\beta\|_U^2\|y\|^2_{\mathbb{Y}}.$$

Введем отображение $F : \mathbb{Y} \times U \to L^2(0,T;W') \times \mathcal{H}$ по следующему правилу:

$$F(y,f) = (\dot{y} + Ay - fQ - \beta Ly; y|_{t=0} - y_0).$$

Пусть $\{y_*, f_*\}$ – решение задачи P. В окрестности этого решения отображение F обладает свойствами:

1. отображение $y \to F(y,f)$ непрерывно дифференцируемо;
2. отображение $f \to F(y,f)$ непрерывно и аффинно.

Лемма 2. $ImF'(y_*, f_*) = L^2(0,T;W') \times \mathcal{H}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любых $z \in L^2(0,T;W'), h_0 \in \mathcal{H}$ существует решение $h \in L^2(0,T;W)$ системы

$$\dot{h} + Ah - \beta Lh = z, \tag{15}$$

$$h|_{t=0} = h_0. \tag{16}$$

Умножим скалярно уравнение (15) на h и учтем, что

$$(z,h) \le \|z\|_{W'}\|h\| \le \frac{m_1}{2}\|h\|^2 + \frac{1}{2m_1}\|z\|^2_{W'}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}|h|^2 + m_1\|h\|^2 \le \frac{1}{m_1}\|z\|^2_{W'}. \tag{17}$$

Интегрируя полученное неравенство по t, получим оценки:

$$|h(t)|^2 \le |h_0|^2 + \frac{1}{m_1}\|z\|^2_{L^2(0,T;W')}, \qquad \int_0^t \|h(\tau)\|^2 d\tau \le \frac{1}{m_1}|h_0|^2 + \frac{1}{m_1^2}\|z\|^2_{L^2(0,T;W')}.$$

Из полученных оценок следует, что решение системы (15)–(16) существует и единственно. Таким образом, для любого элемента $\{z, h_0\}$ пространства $L^2(0,T;W') \times \mathcal{H}$ существует элемент $h \in L^2(0,T;W)$ такой, что

$$\langle F'_y(y_*, f_*), h\rangle = \{z, h_0\}.$$

Следовательно, образ оператора $F'_y(y_*, f_*)$ совпадает со всем пространством $L^2(0,T;W')\times\mathcal{H}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пара* $\{y, f\} \in \mathbb{Y} \times U_{ad}$ *является решением задачи* P, *если и только если существует сопряженное состояние* $p \in \mathbb{Y}$ *такое, что тройка* $\{y, f, p\}$ *удовлетворяет уравнениям (8)–(9) и следующим соотношениям:*

$$-\dot{p} + Ap + \beta Lp = y_d - y, \tag{18}$$

$$p(T) = \mu y(T), \tag{19}$$

$$\int\limits_0^T r(q - f)dt \geq 0, \quad \forall g = g(t) \in U_{ad}. \tag{20}$$

Здесь $r = r(t) = (Q, p) = \int\limits_0^1 p_1 dx, \ p = \{p_1, p_2\}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функционала J следует, что отображение $t \to J(y, f)$ непрерывно и дифференцируемо, функция $f \to J(y, f)$ выпукла и дифференцируема по Гато. В силу этих свойств и свойств отображения $F(y, f)$ для задачи P выполнены условия теоремы о множителях Лагранжа [6]. Функция Лагранжа для задачи P имеет вид

$$\mathcal{L}(y, f, p, q) = J(y) + \int\limits_0^T (\dot{y} + Ay - \beta Ly + f(t)Q, p)dt + (q, y|_{t=0} - y_0)_{\mathcal{H}}. \tag{21}$$

Здесь $p \in L^2(0, T; W), q \in \mathcal{H}$. Тогда для произвольной функции $h \in \mathcal{H}$ справедливо следующее соотношение:

$$\langle \mathcal{L}_y, h \rangle = \mu(y(T), h(T)) + \int\limits_0^T (y - y_d, h)dt + \int\limits_0^T (p, \dot{h} + Ah - \beta Ly)dt + (q, h|_{t=0}) = 0,$$

или

$$\mu(y(T), h(T)) + \int\limits_0^T (-\dot{p} + Ap + \beta Lp + y - y_d, h)dt - (p(T), h(T)) = 0. \tag{22}$$

Условие (22) означает, что сопряженное состояние p является решением следующей задачи:

$$-\dot{p} + Ap + \beta Lp = y_d - y, \tag{23}$$

$$p(T) = \mu y(T). \tag{24}$$

Отметим, что система (23)–(24) заменой $\psi(t) = p(T - t)$ сводится к задаче Коши типа (8), и поэтому для решения сопряженной системы справедливы оценки, гарантирующие, что $p \in \mathbb{Y}$, если $y(T) \in \mathcal{H}$.

Далее, для любой $g \in U_{ad}$ справедливо следующее неравенство:

$$\langle \mathcal{L}_f, g - f \rangle = \int\limits_0^T (p, (g - f)Q)dt = \int\limits_0^T (q - f)(Q, p) \geq 0. \tag{25}$$

С учетом ранее введенных обозначений, формулу (25) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^T r(t)(g(t) - f(t)) \geq 0, \quad \forall g(t) \in U_{ad}. \tag{26}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим далее задачу управления с множеством U_{ad}, имеющим вид

$$U_{ad} = \{f \in L^2(0,T) : |f(t)| \leq 1 \text{ почти всюду на } (0,T)\}. \tag{27}$$

Лемма 3. *Пусть множество допустимых управлений определяется формулой (27). Тогда оптимальное управление в задаче P определяется включением*

$$f(t) \in \ -\mathrm{sign}(Q,p). \tag{28}$$

Здесь p — сопряженное состояние, соответствующее оптимальному состоянию y,

$$\mathrm{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ -1, & z < 0, \\ [-1,1], & z = 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В неравенстве (20) выберем $g(t)$ в виде

$$g(t) = f(t) + \chi(k - f(t)), \quad \chi = \begin{cases} 1, & |t - t_*| < \varepsilon; \\ 0, & |t - t_*| > \varepsilon, \end{cases}$$

где t_* – точка Лебега функции $f(t)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно маленькое число.

Тогда

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{|t-t_*|<\varepsilon} r(t)(k - f(t)) \geq 0.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ получим

$$r(t_*)(k - f(t_*)) \geq 0.$$

Учтем, что множество точек Лебега функции $f(t)$ всюду плотно на $(0,T)$, и значит, последнее неравенство выполнено почти всюду на $(0,T)$. Лемма доказана.

Таким образом, если f – оптимальное управление, y – оптимальное состояние, а p – соответствующее сопряженное состояние, то эти функции удовлетворяют системе оптимальности (29)–(31).

$$\dot{y} + Ay - \beta Ly = -f(t)Q, \quad y|_{t=0} = y_0, \tag{29}$$

$$-\dot{p} + Ap + \beta Lp = y_d - y, \quad p(T) = \mu y(T), \tag{30}$$

$$f \in -\mathrm{sign}(Q,p). \tag{31}$$

Замечание. Если рассмотреть задачу управления на интервале (t_0,T), то ее решение также будет удовлетворять указанной системе оптимальности на интервале (t_0,T).

5. Синтез оптимального управления

Построим оптимальное управление с обратной связью в задаче P, где множество U_{ad} определено в (27). Воспользуемся методом, описанным в [2] для задачи управления обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обозначим через $y(x,t;y_0,t_0), p(x,t;y_0,t_0)$ решения задач (8)–(9) и (18)–(19) на промежутке $[t_0,T]$. Указанные задачи могут быть решены методом Фурье. Выпишем соответствующее представление решений в случае $\nu = \nu_m = \mu = 1$:

$$y(x,t;y_0,t_0) = S(x,t-t_0)y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} S(x,t-\tau)qf(\tau)d\tau, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$p(x,t;y_0,t_0) = S_1(x,T-t)y(T) + \int\limits_t^T S_1(x,\xi-t)(y_d(\xi) - y(\xi;y_0,t_0))d\xi. \qquad (33)$$

Здесь операторы S, S_1 определяются выражениями

$$S(x,t)g = \int\limits_0^1 M(x,t,s)g(s)ds, \quad S_1(x,t)g = \int\limits_0^1 M_1(x,t,s)g(s)ds,$$

$$M(x,t,s) = \begin{pmatrix} K_1(x,t,s) & -K_2(x,t,s) \\ K_3(x,t,s) & K_4(x,t,s) \end{pmatrix}, \quad M_1(x,t,s) = \begin{pmatrix} K_1(x,t,s) & K_2(x,t,s) \\ -K_3(x,t,s) & K_4(x,t,s) \end{pmatrix},$$

$$K_1(x,t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} 2A_j(t)\sin(as)\sin(ax), \quad K_2(x,t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} 2C_j(t)\cos(as)\sin(ax),$$

$$K_3(x,t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} 2C_j(t)\sin(as)\cos(ax), \quad K_4(x,t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} 2A_j(t)\cos(as)\cos(ax),$$

$$A_j(t) = e^{(-a^2t)}\cos(a\beta t), \quad C_j(t) = e^{(-a^2t)}\sin(a\beta t), \quad a = \pi j.$$

Теперь запишем (33) при $t = t_0$:

$$p(x,t_0;y_0,t_0) = S_1(x,T-t_0)y(T) + \int\limits_{t_0}^T S_1(x,\xi-t_0)(y_d(\xi) - y(\xi;y_0,t_0))d\xi. \qquad (34)$$

Подставим (32) в (34), изменим порядок интегрирования и сгруппируем члены:

$$p(x,t_0;y_0,t_0) = S_1(x,T-t_0)S(x,T-t_0)y_0 - \int\limits_{t_0}^T S_1(x,T-t_0)S(x,T-\tau)qf(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^T S_1(x,\xi-t_0)y_d(\xi)d\xi - \int\limits_{t_0}^T S_1(x,\xi-t_0)S(x,\xi-t_0)y_0 d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^T \int\limits_{\tau}^T S_1(x,\xi-t_0)S(x,\xi-\tau)qf(\tau)d\xi d\tau. \qquad (35)$$

Введем обозначения:

$$R_1(x,t)y = S_1(x,T-t)S(x,T-t)y, \quad R_2(x,t)y = \int\limits_{t_0}^T S_1(x,\xi-t)y(\xi)d\xi,$$

$$R_3(x,t)y = \int\limits_{t_0}^T S_1(x,\xi-t)S(x,\xi-t)y d\xi,$$

$$\Psi_1(x,t) = S_1(x,T-t)S(x,T-\tau)qf(\tau)d\tau, \quad \Psi_2(x,t,\tau) = \int\limits_{\tau}^T S_1(x,\xi-t)S(x,\xi-\tau)qf(\tau)d\xi d\tau.$$

Тогда формула (35) примет вид

$$p(x,t_0;y_0,t_0)=R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T}[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]f(\tau)qd\tau. \tag{36}$$

Пусть $f(t;y_0,t_0)$ — оптимальное управление в задачи P, которая рассматривается на интервале (t_0,T). Тогда

$$f(t_0;y_0,t_0)\in-\mathrm{sign}(Q,p(x,t_0;y_0,t_0)). \tag{37}$$

Формулу (37) можно переписать в виде

$$f(t_0;y_0,t_0)\in-\mathrm{sign}\left(\int\limits_0^1 q\cdot p(x,t_0;y_0,t_0)dx\right). \tag{38}$$

Подставим выражение (36) для p в (38):

$$f(t_0;y_0,t_0)\in-\mathrm{sign}\Bigg(q\cdot\Bigg[\int\limits_0^1 R_1(x,t_0)y_0dx+\int\limits_0^1 R_2(x,t_0)y_d(\xi)dx+\int\limits_0^1 R_3(x,t_0)y_0dx+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_0^1[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]\,qf(\tau)dxd\tau\Bigg]\Bigg). \tag{39}$$

Пусть

$$\mu(t)=\int\limits_t^T\left|\int\limits_0^1 q\cdot[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]dx\right|d\tau,\quad t_0\le t\le T. \tag{40}$$

В силу ограничения $|f|\le 1$, имеем

$$\left|\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_0^1 q\cdot[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]qf(\tau)dxd\tau\right|\le\mu(t_0). \tag{41}$$

Следовательно, из (41) вытекает, что

$$f(t_0;y_0,t_0)=1,\quad \text{если}\quad \left[\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx\right]>\mu(t_0), \tag{42}$$

$$f(t_0;y_0,t_0)=-1,\quad \text{если}\quad \left[\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx\right]<-\mu(t_0). \tag{43}$$

В случае, когда

$$\left|\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx\right|\le\mu(t_0), \tag{44}$$

число $\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx$ лежит в области значений $[-\mu(t_0);\mu(t_0)]$ интегрального оператора

$$Lu = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_0^1 q\cdot[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]u(\tau)qdxd\tau,$$

определенного на классе всех управлений.

Управлениям

$$u_\alpha(\tau) = \alpha\mathrm{sign}\left[\int\limits_0^1 q\cdot[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]u(\tau)qdx\right],\quad t_0\le t\le T,\ \alpha=\pm1,$$

отвечают крайние точки $\alpha\mu(t_0)$ области значений оператора L, а выпуклым комбинациям этих управлений – вся область значений. Следовательно, чтобы удовлетворить включению (39) в случае (44), достаточно взять управление вида

$$f(\tau;y_0,t_0) = \lambda\mathrm{sign}\left[\int\limits_0^1 q\cdot[\Psi_1(x,t_0)-\Psi_2(x,t_0,\tau)]f(\tau)qdx\right],\quad t_0\le\tau\le T. \tag{45}$$

Здесь $\lambda=\lambda(y_0,t_0),\ \lambda\le1$.

Подставляя (45) в (39) и приравнивая к нулю полученное выражение, найдем

$$\lambda(y_0,t_0) = -\mu^{-1}(t_0)\left[\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx\right]. \tag{46}$$

Из (46) и (45) при $\tau=t_0$ получаем

$$f(t_0;y_0,t_0) = -\mu^{-1}(t_0)\left[\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t_0)y_0+R_2(x,t_0)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx\right]. \tag{47}$$

Заменим y_0,t_0 на y,t, приняв $f(y,t)\equiv f(t;y,t)$, получим

$$f(y,t) = -\mathrm{sat}\left[\frac{\int\limits_0^1 q\cdot[R_1(x,t)y(t)+R_2(x,t)y_d(\xi)+R_3(x,t_0)y_0]dx}{\mu(t)}\right]. \tag{48}$$

Здесь через $\mathrm{sat}(z)$ [4] обозначена функция

$$\mathrm{sat}(z) = \begin{cases}\mathrm{sign}(z), & |z|>1;\\ z, & |z|\le1.\end{cases}$$

Таким образом, формула (48) определяет оптимальное управление в форме обратной связи через состояние системы и исходные данные. Отметим, что все операторы, входящие в (48), имеют явный вид.

Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит. 2005. 656с.

2. *Ащепков Л.Т., Шапаренко Н.Н.* Оптимальный синтез и упреждающая стабилизация линейной системы // Изв. академии наук. Теория и системы управления. 1999. N1. С. 24-30.

3. *Цыба В.Е.* Мультипликативное управление МГД течением Гартмана // Труды института системного анализа. 2008. №32(1). С.87-100.

4. *Цыба В.Е., Чеботарев А.Ю.* Асимптотика оптимального управления магнитогидродинамическим течением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49. №3. С.482-489.

5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972. 412с.

6. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научн. книга. 1999. 350с.

7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 08 мая 2009 г.

Kolesova O.S. Synthesis of optimal control for Hartmann MHD flow. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 94–104.

ABSTRACT

The problem of optimal control for one dimensional magneto hydrodynamics flow between plane–parallel (the Hartmann flow) is considered. The difference of pressure by unit length of the channel is assumed as a control. Necessary and sufficient conditions of optimality and representation an optimal control as the feedback were found.

Key words: *MHD flow, optimal control problem, feedback control.*