ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 131–139
УДК 517.983:517.968
MSC2000 45A05, 45P05

© И.М. Новицкий*

О сходимости полиномиальных рядов Фредгольма

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

В статье рассматривается бесконечная система рядов Фредгольма из полиномов по λ, составленных классическим способом для определенного на $\mathbb{R}^2$ ядра вида $\boldsymbol{H}(s,t) - \lambda \boldsymbol{S}(s,t)$, где λ – комплексный параметр. Изучается сходимость этих рядов в комплексной плоскости по sup-нормам различных пространств непрерывных функций. Результаты о сходимости применяются к решению интегрального уравнения Фредгольма с ядром, линейным относительно параметра.

Ключевые слова: *ядерный оператор, интегральный оператор, интегральное уравнение Фредгольма, ряд Фредгольма, определитель Фредгольма, минор Фредгольма.*

Положим $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и рассмотрим гильбертово пространство L_2 комплекснозначных измеримых в $\mathbb{R}$ функций, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу, со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int f(s)\overline{g(s)}\,ds$ и нормой $\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$ (здесь и далее интегралы без указания области интегрирования берутся по $\mathbb{R}$). Обозначим через $\mathfrak{R}(L_2)$ банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в L_2. Напомним, что оператор $A \in \mathfrak{R}(L_2)$ называется ядерным оператором, если $\sum_n |\langle Au_n, u_n\rangle| < \infty$ для любого ортонормированного базиса $\{u_n\}$ в L_2.

Оператор $T \in \mathfrak{R}(L_2)$ называется интегральным, если существует определенная на $\mathbb{R}^2$ измеримая функция $\boldsymbol{T}$ (ядро) такая, что для каждой $f \in L_2$

$$(Tf)(s) = \int \boldsymbol{T}(s,t) f(t)\,dt \text{ для п.в. } s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Интегральный оператор T называется биинтегральным, если сопряженный к нему оператор T^* также является интегральным оператором. Биинтегральный оператор называется бикарлемановским, если его ядро удовлетворяет условиям Карлемана: $\boldsymbol{T}(s,\cdot) \in L_2$ для почти всех $s \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{T}(\cdot,t) \in L_2$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$. В этом случае ядро порождает две функции Карлемана $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}^* : \mathbb{R} \to L_2$ по формулам $\boldsymbol{t}(s) = \overline{\boldsymbol{T}(s,\cdot)}$, $\boldsymbol{t}^*(t) = \boldsymbol{T}(\cdot,t)$ для всех тех s, $t \in \mathbb{R}$, для которых $\boldsymbol{T}(s,\cdot) \in L_2$ и $\boldsymbol{T}(\cdot,t) \in L_2$.

Пусть X – локально компактное пространство, B – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$. Обозначим через $C(X,B)$ банахово пространство с нормой $\|f\|_{C(X,B)} = \sup_X \|f(x)\|_B$ всех непрерывных из X в B функций, обращающихся в нуль “на бесконечности” (последнее означает, что для любой $f \in C(X,B)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $X(\varepsilon, f) \subset X$, вне которого выполняется неравенство $\|f(x)\|_B < \varepsilon$). Будем называть ряд $\sum_n f_n$ B-абсолютно сходящимся в $C(X,B)$, если $f_n \in C(X,B)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\sup_{x\in X} \sum_n^m \|f_n(x)\|_B \to 0$ при $n, m \to \infty$. Нуль пространства $C(\mathbb{R}^{2p}, \mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, будем обозначать через θ_p, а при $n = 0$ пространство $C(\mathbb{R}^n, B)$ будем отождествлять с B.

* Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: novim@iam.khv.ru

Функция $\boldsymbol{T} \in C\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}\right)$ называется K^0-ядром, если она порождает по формуле (1) бикарлемановский оператор T и ее функции Карлемана, определенные для всех $s \in \mathbb{R}$ равенствами $\boldsymbol{t}(s) = \overline{\boldsymbol{T}(s,\cdot)}$, $\boldsymbol{t}^*(s) = \boldsymbol{T}(\cdot, s)$, принадлежат $C(\mathbb{R}, L_2)$.

Пусть $T \in \mathfrak{R}(L_2)$ и $T\mathfrak{R}(L_2) = \{TV \mid V \in \mathfrak{R}(L_2)\}$, $\mathfrak{R}(L_2)T = \{VT \mid V \in \mathfrak{R}(L_2)\}$. Определим множество операторов $\mathcal{M}(T) = \left(T\mathfrak{R}(L_2) \cup T^*\mathfrak{R}(L_2)\right) \cap \left(\mathfrak{R}(L_2)T \cup \mathfrak{R}(L_2)T^*\right)$. Разложение оператора $T \in \mathfrak{R}(L_2)$ в произведение $T = WV^*$, где W, $V \in \mathfrak{R}(L_2)$ такие, что WW^*, $VV^* \in \mathcal{M}(T)$, называется $\mathcal{M}$-факторизацией оператора T.

Пример 1. Пусть $T \in \mathfrak{R}(L_2)$ – произвольный оператор. Положим $W = U|T|^{\frac{1}{2}}$, $V = |T|^{\frac{1}{2}}$, где $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ и U – частичная изометрия из полярного представления $T = U|T|$ [1, с. 21–22]. Поскольку $T = WV^*$, $WW^* = U|T|U^* = TU^* \in \mathcal{M}(T)$, $VV^* = |T| = T^*U \in \mathcal{M}(T)$, то разложение $T = WV^*$ является одной из $\mathcal{M}$-факторизаций оператора T.

Пусть $\boldsymbol{T}$ – ядро интегрального оператора $T \in \mathfrak{R}(L_2)$. Тогда $\boldsymbol{T}$ называется K^0-ядром мерсерского типа или мерсерским K^0-ядром, если каждый оператор $A \in \mathcal{M}(T)$ является интегральным оператором с K^0-ядром.

Предложение 1 ([2])**.** *Пусть $\mathcal{S} = \{S_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathfrak{R}(L_2)$ – семейство операторов, для которого существует ортонормированная последовательность $\{e_n\}$ в L_2 такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|S_\alpha^* e_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \|S_\alpha e_n\| = 0.$$

Тогда найдется унитарный оператор $U : L_2 \to L_2$ такой, что все операторы $T_\alpha = US_\alpha U^{-1}$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ и их линейные комбинации являются интегральными операторами с мерсерскими K^0-ядрами.

Предложение 2 ([2], [3])**.** *Пусть T – интегральный оператор с мерсерским K^0-ядром $\boldsymbol{T}$. Тогда для любой $\mathcal{M}$-факторизации $T = WV^*$ оператора T и для любого ортонормированного базиса $\{u_n\}$ в L_2 ядро $\boldsymbol{T}$ представляется $\mathbb{C}$-абсолютно сходящимся в $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ билинейным рядом*

$$\boldsymbol{T}(s,t) = \sum_n Wu_n(s)\overline{Vu_n(t)} \text{ для всех } s,\ t \in \mathbb{R}.$$

В [4] автором настоящей статьи установлено, что интегральное уравнение второго рода в L_2

$$f(s) - \lambda \int \boldsymbol{S}(s,t) f(t)\, dt = g(s) \quad \text{для почти всех } s \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число, f и g – соответственно искомая и заданная функции из L_2, а $\boldsymbol{S}$ – мерсерское K^0-ядро, порождающее ядерный оператор S в L_2, может быть решено явно методом, полностью аналогичным классическому методу Фредгольма [5] для уравнений на конечном отрезке. Чтобы описать метод, рассмотрим при $p = 0, 1, 2, \ldots$ ряды Фредгольма для $\boldsymbol{S}$:

$$\begin{aligned} &\Delta\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}; \lambda; \boldsymbol{S}\Bigg) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \ldots \int \boldsymbol{S}\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь используется восходящее к Э. Фредгольму обозначение для p-го компаунда ядра $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} = \begin{cases} \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{S}(s_1,t_1) & \ldots & \boldsymbol{S}(s_1,t_p) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \boldsymbol{S}(s_p,t_1) & \ldots & \boldsymbol{S}(s_p,t_p) \end{pmatrix} & \text{при } p > 0, \\ 1 & \text{при } p = 0. \end{cases}$$

Сумма ряда (3) при $p > 0$ называется p-ым минором Фредгольма, при $p = 0$ – определителем Фредгольма ядра $\boldsymbol{S}$; в последнем случае она обозначается через $\Delta(\lambda;\, \boldsymbol{S})$. В [4] доказано, в частности, что p-ый минор принадлежит $C\left(\mathbb{R}^{2p}, \mathbb{C}\right)$ при любых фиксированных $\lambda \in \mathbb{C}$, так как представляющий его ряд сходится равномерно в $\mathbb{R}^{2p}$ для каждого λ. Решение уравнения (2) методом Фредгольма осуществляется через систему функций (3) и состоит в следующем. Зафиксируем любое $\lambda \in \mathbb{C}$ и тогда найдем наименьший номер $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\lambda)$ со свойством

$$\Delta \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{\mathbf{d}} \\ t_1 & \dots & t_{\mathbf{d}} \end{pmatrix}; \lambda;\, \boldsymbol{S}\Bigg) \neq \theta_{\mathbf{d}}. \tag{4}$$

Зафиксируем числа $s_1, \dots, s_{\mathbf{d}},\ t_1, \dots, t_{\mathbf{d}}$ из $\mathbb{R}$, при которых левая часть выписанного неравенства отлична от θ_0. Тогда функции

$$v_i(s) = \Delta \left(\begin{matrix} s_1 & \dots & s_{i-1} & s & s_{i+1} & \dots & s_{\mathbf{d}} \\ t_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & t_{\mathbf{d}} \end{matrix};\, \lambda;\, \boldsymbol{S}\right) \quad (i = 1, \dots, \mathbf{d})$$

образуют базис пространства решений однородного уравнения (2) (когда $g = 0$), а функции

$$u_i(t) = \overline{\Delta \left(\begin{matrix} s_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{\mathbf{d}} \\ t_1 & \dots & t_{i-1} & t & t_{i+1} & \dots & t_{\mathbf{d}} \end{matrix};\, \lambda;\, \boldsymbol{S}\right)} \quad (i = 1, \dots, \mathbf{d})$$

образуют базис пространства решений сопряженного однородного уравнения

$$f(t) - \overline{\lambda} \int \overline{\boldsymbol{S}(s,t)} f(s)\, ds = 0.$$

Уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int u_i(s) \overline{g(s)}\, ds = 0, \quad i = 1, \dots, \mathbf{d},$$

при этом его общее решение дается формулой

$$f(s) = g(s) + \lambda \int \frac{\Delta \left(\begin{matrix} s & s_1 & \dots & s_{\mathbf{d}} \\ t & t_1 & \dots & t_{\mathbf{d}} \end{matrix};\, \lambda;\, \boldsymbol{S}\right)}{\Delta \left(\begin{matrix} s_1 & \dots & s_{\mathbf{d}} \\ t_1 & \dots & t_{\mathbf{d}} \end{matrix};\, \lambda;\, \boldsymbol{S}\right)} g(t)\, dt + \sum_{i=1}^{\mathbf{d}} c_i v_i(s),$$

где $c_1, \dots, c_{\mathbf{d}}$ – произвольные постоянные. В частности, если $\Delta(\lambda;\, \boldsymbol{S}) \neq \theta_0$, т.е. $\mathbf{d} = 0$, то (единственное) решение уравнения (2) имеет вид

$$f(s) = g(s) + \lambda \int \boldsymbol{\Gamma}_\lambda(s,t) g(t)\, dt,$$

где функция $\boldsymbol{\Gamma}_\lambda$ определяется равенством

$$\boldsymbol{\Gamma}_\lambda(s,t) = \frac{\Delta \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix};\, \lambda;\, \boldsymbol{S}\right)}{\Delta(\lambda; \boldsymbol{S})}.$$

Уравнение (2) является частным случаем интегрального уравнения

$$f(s) + \int \left(\boldsymbol{H}(s,t) - \lambda \boldsymbol{S}(s,t)\right) f(t)\, dt = g(s) \quad \text{для почти всех } s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где, так же, как и $\boldsymbol{S}$, функция $\boldsymbol{H} \neq \theta_1$ является мерсерским K^0-ядром некоторого ядерного оператора H в L_2. Применив, если необходимо, предложение 1 к семейству

$$\mathcal{S} = \left\{ H, S, A =: (H^*H + S^*S)^{1/2}, \widetilde{A} =: (HH^* + SS^*)^{1/2} \right\},$$

мы можем и будем предполагать, не ограничивая общности, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ K^0-ядро $\boldsymbol{T}_\lambda = \boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{S}$ мерсерское и что интегральные (ядерные) операторы A, $\widetilde{A}$ имеют K^0-ядра $\boldsymbol{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ соответственно, так что $\mathrm{tr}\widetilde{A} = \int \widetilde{\boldsymbol{A}}(s,s)\, ds < \infty$, $\mathrm{tr}A = \int \boldsymbol{A}(s,s)\, ds < \infty$ (см, например, [4, лемма 3.1]).

Наша цель – распространить вышеизложенный метод Фредгольма, использованный для решения уравнения (2), на решение уравнения (5). С этой целью для любых фиксированных n, $p = 0, 1, 2 \ldots$ и s_i, $t_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq p)$ определим полином по λ степени, не превосходящей $p + n$, по формуле

$$\begin{aligned} &B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \\ &:= \frac{1}{n!} \int \ldots \int \boldsymbol{T}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n, \end{aligned} \tag{6}$$

где, как и выше,

$$\boldsymbol{T}_\lambda \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_\nu \\ y_1 & \ldots & y_\nu \end{pmatrix} = \begin{cases} \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_\lambda(x_1, y_1) & \ldots & \boldsymbol{T}_\lambda(x_1, y_\nu) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{T}_\lambda(x_\nu, y_1) & \ldots & \boldsymbol{T}_\lambda(x_\nu, y_\nu) \end{pmatrix} & \text{при } \nu > 0, \\ 1 & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

Замечание 1. При любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \geq 1$ и n функция

$$\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \to B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}$$

лежит в $C\left(\mathbb{R}^{2p}, \mathbb{C}\right)$, а функции

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_m & s_{m+1} & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_{m-1} & t_{m+1} & \ldots & t_p \end{pmatrix} \to B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_{m-1} & \boldsymbol{\cdot} & t_{m+1} & \ldots & t_p \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_{m-1} & s_{m+1} & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_m & t_{m+1} & \ldots & t_p \end{pmatrix} \to B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_{m-1} & \boldsymbol{\cdot} & s_{m+1} & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_{m-1} & t_m & t_{m+1} & \ldots & t_p \end{pmatrix} \end{gathered}$$

принадлежат $C\left(\mathbb{R}^{2p-1}, L_2\right)$ для любого m $(1 \leq m \leq p)$. Это следует из того, что при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ каждая итерация

$$\boldsymbol{T}_\lambda^\nu(s,t) = \underbrace{\int \ldots \int}_{\nu-1} \boldsymbol{T}_\lambda(s, \xi_1) \ldots \boldsymbol{T}_\lambda(\xi_{\nu-1}, t)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{\nu-1} \quad (\nu > 1)$$

K^0-ядра $\boldsymbol{T}_\lambda$ является K^0-ядром. Кроме того, так как $\boldsymbol{T}_\lambda$ и его итерации являются ядрами Гильберта – Шмидта на $\mathbb{R}^2$, то при любом λ функции $B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda]$ в (6) можно также интерпретировать как элементы пространства $C\left(\mathbb{R}^{2p-2}, L_2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, где $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$ может быть зафиксировано относительно любого аргумента вида (s_i, t_j) $(1 \leq i, j \leq p)$.

Теорема 1. *Полиномиальный p-ый ряд Фредгольма*

$$D_p[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \tag{7}$$

(a) *абсолютно сходится в* $C\left(\mathbb{R}^{2p},\mathbb{C}\right)$ *равномерно по* λ *на любом компактном подмножестве в* $\mathbb{C}$,

(b) *при* $p\geq 1$ *абсолютно сходится в* $C\left(\mathbb{R}^{2p-1},L_2\right)$ *равномерно по* λ *на любом компактном подмножестве в* $\mathbb{C}$,

(c) *при* $p\geq 1$ *абсолютно сходится в пространстве* $C\left(\mathbb{R}^{2p-2},L_2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ *равномерно по* λ *на любом компактном подмножестве в* $\mathbb{C}$,

(d) *при некотором* p *имеет сумму* $D_p[\boldsymbol{T}_\lambda]:\mathbb{C}\to C\left(\mathbb{R}^{2p},\mathbb{C}\right)$, *не равную* θ_p *при некотором* $\lambda\in\mathbb{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого фиксированного $\lambda\in\mathbb{C}$ рассмотрим $\mathcal{M}$-факторизацию $T_\lambda=H-\lambda S=W_\lambda\left(V_\lambda\right)^*$, где $W_\lambda=U_\lambda|T_\lambda|^{\frac{1}{2}}$, $V_\lambda=|T_\lambda|^{\frac{1}{2}}$ (см пример 1). Пусть $\boldsymbol{F}_\lambda$ и $\boldsymbol{G}_\lambda$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) – мерсерские K^0-ядра интегральных операторов $F_\lambda=V_\lambda\left(V_\lambda\right)^*$ и $G_\lambda=W_\lambda\left(W_\lambda\right)^*$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) соответственно и пусть $\{u_n\}$ – произвольный ортонормированный базис в L_2. Тогда в силу предложения 2 для любого фиксированного $\lambda\in\mathbb{C}$ и всех s, $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T}_\lambda(s,t)=\sum_n W_\lambda u_n(s)\overline{V_\lambda u_n(t)},\\ \boldsymbol{F}_\lambda(s,t)=\sum_n V_\lambda u_n(s)\overline{V_\lambda u_n(t)},\quad \boldsymbol{G}_\lambda(s,t)=\sum_n W_\lambda u_n(s)\overline{W_\lambda u_n(t)},\end{gathered}\tag{8}$$

где ряды $\mathbb{C}$-абсолютно сходящиеся в $C\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}\right)$. Более того, для всех $f\in L_2$ и всех $\lambda\in\mathbb{C}$ можно написать

$$\begin{aligned}\left\langle (F_\lambda)^2 f,f\right\rangle&=\left\langle \left|T_\lambda\right|^2 f,f\right\rangle=\left\langle |H|^2 f,f\right\rangle-\overline{\lambda\left\langle Sf,Hf\right\rangle}-\lambda\left\langle Sf,Hf\right\rangle+|\lambda|^2\left\langle |S|^2 f,f\right\rangle\\ &=\|Hf\|^2-2\mathrm{Re}\,\left(\lambda\left\langle Sf,Hf\right\rangle\right)+|\lambda|^2\|Sf\|^2\leq\|Hf\|^2+2|\lambda|\,\|Hf\|\,\|Sf\|+|\lambda|^2\|Sf\|^2\\ &\leq 2\left(\|Hf\|^2+|\lambda|^2\|Sf\|^2\right)\leq 2\left(1+|\lambda|^2\right)\left(\|Hf\|^2+\|Sf\|^2\right)\\ &=\left\langle 2\left(1+|\lambda|^2\right)\left(|H|^2+|S|^2\right)f,f\right\rangle=\left\langle 2\left(1+|\lambda|^2\right)A^2 f,f\right\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого компактного подмножества $\mathfrak{K}$ в $\mathbb{C}$ выполняется неравенство $F_\lambda\leq c(\mathfrak{K})A$ для всех $\lambda\in\mathfrak{K}$, где $c(\mathfrak{K})=\sup_{\lambda\in\mathfrak{K}}\sqrt{2\left(1+|\lambda|^2\right)}$. Аналогично доказывается, что $G_\lambda=|(T_\lambda)^*|\leq c(\mathfrak{K})\left(|H^*|^2+|S^*|^2\right)^{\frac{1}{2}}=c(\mathfrak{K})\widetilde{A}$ для всех $\lambda\in\mathfrak{K}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{F}_\lambda(s,s)\leq c(\mathfrak{K})\boldsymbol{A}(s,s),\quad \boldsymbol{G}_\lambda(s,s)\leq c(\mathfrak{K})\widetilde{\boldsymbol{A}}(s,s)\tag{9}$$

для всех $s\in\mathbb{R}$ и всех $\lambda\in\mathfrak{K}$.

Для удобства введем обозначение

$$f\begin{pmatrix}n_1&\dots&n_p\\ s_1&\dots&s_p\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}f_{n_1}(s_1)&\dots&f_{n_p}(s_1)\\ \vdots&&\vdots\\ f_{n_1}(s_p)&\dots&f_{n_p}(s_p)\end{pmatrix}.$$

Используя билинейное разложение ядра $\boldsymbol{T}_\lambda$ в (8), вычислим его p-ый компаунд ($p>0$) следующим образом:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T}_\lambda\begin{pmatrix}s_1&\dots&s_p\\ t_1&\dots&t_p\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}\,\sigma\boldsymbol{T}_\lambda(s_1,t_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{T}_\lambda(s_p,t_{\sigma(p)})\\ =\sum_{\sigma\in S_p}\left(\mathrm{sgn}\,\sigma\sum_n W_\lambda u_n(s_1)\overline{V_\lambda u_n\left(t_{\sigma(1)}\right)}\cdot\ldots\cdot\sum_n W_\lambda u_n(s_p)\overline{V_\lambda u_n\left(t_{\sigma(p)}\right)}\right)\end{gathered}$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=1}^{\infty} \left(\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sgn}\sigma W_\lambda u_{n_1}(s_1)\overline{V_\lambda u_{n_1}\left(t_{\sigma(1)}\right)} \cdot \ldots \cdot W_\lambda u_{n_p}(s_p)\overline{V_\lambda u_{n_p}\left(t_{\sigma(p)}\right)} \right)$$

$$= \sum_{n_1,\ldots,n_p=1}^{\infty} W_\lambda u_{n_1}(s_1) \cdot \ldots \cdot W_\lambda u_{n_p}(s_p)\overline{V_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}}$$

$$= \sum_{0<n_1<\ldots<n_p<\infty} \left(\sum_{\sigma\in S_p} W_\lambda u_{n_1}\left(s_{\sigma(1)}\right) \cdot \ldots \cdot W_\lambda u_{n_p}\left(s_{\sigma(p)}\right) \overline{V_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ t_{\sigma(1)} & \ldots & t_{\sigma(p)} \end{pmatrix}} \right)$$

$$= \sum_{0<n_1<\ldots<n_p<\infty} W_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} \overline{V_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}},$$

где S_p – группа перестановок порядка p. Аналогичные представления рядами, также $\mathbb{C}$-абсолютно сходящимися в $C\left(\mathbb{R}^{2p}, \mathbb{C}\right)$, имеют p-ые компаунды ядер $\boldsymbol{F}_\lambda$ и $\boldsymbol{G}_\lambda$:

$$\boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} = \sum_{0<n_1<\ldots<n_p<\infty} V_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} \overline{V_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}},$$

$$\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} = \sum_{0<n_1<\ldots<n_p<\infty} W_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} \overline{W_\lambda u \begin{pmatrix} n_1 & \ldots & n_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix}}.$$

Используя их и неравенство Коши для рядов, можно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\left| \boldsymbol{T}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right| \\ &\quad \le \left(\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее нам понадобится неравенство Фишера [6, с. 159]: $\det C \le \det C_0 \det C_1$, где C – эрмитова матрица порядка n с неотрицательными главными минорами, C_0 – матрица порядка $k < n$ в левом верхнем углу, C_1 – матрица порядка $n-k$ в правом нижнем углу матрицы C.

Продолжим оценку подынтегрального компаунда в (6). К каждому из сомножителей в правой части (10) применим неравенство Фишера, в котором C_0 – матрица порядка p, а C_1 – матрица порядка n. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\left| \boldsymbol{T}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t_1 & \ldots & t_p & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right| \\ &\le \left(\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} \boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_p \\ s_1 & \ldots & s_p \end{pmatrix} \boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_p \\ t_1 & \ldots & t_p \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{G}_\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} + \boldsymbol{F}_\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Применяя многократно неравенство Фишера с $k = 1$ к компаундам ядер в правой части последнего соотношения, а затем используя неравенства (9), придем к неравенствам

$$\begin{aligned} &\left|\boldsymbol{T}_\lambda \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_p & \xi_1 & \dots & \xi_n \\ t_1 & \dots & t_p & \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}\right| \\ &\qquad \le \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{p} \boldsymbol{G}_\lambda(s_i,s_i)\,\boldsymbol{F}_\lambda(t_i,t_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{G}_\lambda(\xi_i,\xi_i)+\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_\lambda(\xi_i,\xi_i)\right) \\ &\qquad \le \frac{1}{2}\left(c\left(\mathfrak{K}\right)\right)^{p+n}\left(\prod_{i=1}^{p} \widetilde{\boldsymbol{A}}(s_i,s_i)\,\boldsymbol{A}(t_i,t_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} \widetilde{\boldsymbol{A}}(\xi_i,\xi_i)+\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}(\xi_i,\xi_i)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

для всех $\lambda \in \mathfrak{K}$. Взяв n-кратный интеграл по области $\mathbb{R}^n$ относительно переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ от крайних частей этого неравенства, получим, что для всех $\lambda \in \mathfrak{K}$

$$\begin{aligned} &\left|B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda] \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_p \\ t_1 & \dots & t_p \end{pmatrix}\right| \\ &\qquad \le \frac{\left(c\left(\mathfrak{K}\right)\right)^{p+n}}{2n!}\left(\prod_{i=1}^{p} \widetilde{\boldsymbol{A}}(s_i,s_i)\,\boldsymbol{A}(t_i,t_i)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\mathrm{tr}\widetilde{A}\right)^n+\left(\mathrm{tr}A\right)^n\right) \\ &\qquad \le \frac{M^{2p}\left(c\left(\mathfrak{K}\right)\right)^{p+n}\left(\left(\mathrm{tr}\widetilde{A}\right)^n+\left(\mathrm{tr}A\right)^n\right)}{2n!}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $M = \max\left\{\sup_{s\in\mathbb{R}}\left(\widetilde{\boldsymbol{A}}(s,s)\right)^{\frac{1}{2}}, \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\boldsymbol{A}(t,t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$. Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\lambda\in\mathfrak{K}} \|B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda]\|_{C(\mathbb{R}^{2p},\mathbb{C})}$$

сходится, что доказывает утверждение **(a)**.

Переходя в первом неравенстве формулы (12) к норме $C\left(\mathbb{R}^{2p-1}, L_2\right)$, где L_2-норма берется интегрированием по любой из переменных s_i или t_i, получим для всех $\lambda \in \mathfrak{K}$

$$\|B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda]\|_{C(\mathbb{R}^{2p-1},L_2)} \le \frac{M^{2p-1}\left(c\left(\mathfrak{K}\right)\right)^{p+n}\left(\max\left\{\mathrm{tr}\widetilde{A}, \mathrm{tr}A\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\mathrm{tr}\widetilde{A}\right)^n+\left(\mathrm{tr}A\right)^n\right)}{2n!}.$$

Так же, как и выше, заключаем тогда, что ряд в (7) абсолютно сходится в $C\left(\mathbb{R}^{2p-1}, L_2\right)$ равномерно по λ на каждом компакте $\mathfrak{K} \subset \mathbb{C}$ и утверждение **(b)** теоремы доказано.

Из (12) получаем также оценку (см замечание 1)

$$\|B_{n,p}[\boldsymbol{T}_\lambda]\|_{C(\mathbb{R}^{2p-2},L_2(\mathbb{R}^2))} \le \frac{M^{2p-2}\left(c\left(\mathfrak{K}\right)\right)^{p+n}\left(\mathrm{tr}\widetilde{A}\cdot\mathrm{tr}A\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\mathrm{tr}\widetilde{A}\right)^n+\left(\mathrm{tr}A\right)^n\right)}{2n!}$$

для всех $\lambda \in \mathfrak{K}$, из которой следует, что ряд в (7) при $p \ge 1$ абсолютно сходится в $C\left(\mathbb{R}^{2(p-1)}, L_2\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ равномерно по λ на каждом компакте $\mathfrak{K} \subset \mathbb{C}$. Таким образом, утверждение **(c)** тоже доказано.

Докажем теперь утверждение **(e)**. Заметим, что по построению для всех $p = 0, 1, 2, \dots$

$$D_p[\boldsymbol{T}_{\lambda=0}] \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_p \\ t_1 & \dots & t_p \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_p; -1; \boldsymbol{H} \\ t_1 & \dots & t_p \end{pmatrix}$$

(ср. (6), (7) и (3)). Следовательно, найдется p такое, что $D_p[\boldsymbol{T}_{\lambda=0}] \ne \theta_p$ (ср. (4)). Теорема доказана.

Пусть $D_i^{(j)}[\boldsymbol{T}_\lambda]$ обозначает j-ую производную по λ целой $C\left(\mathbb{R}^{2i},\mathbb{C}\right)$-значной функции $D_i[\boldsymbol{T}_\lambda]:\mathbb{C}\to C\left(\mathbb{R}^{2i},\mathbb{C}\right)$ (см теорему 1**(a)**).

Теперь решение уравнения (5) методом типа метода Фредгольма можно представить следующей теоремой.

Теорема 2. (A) *Для каждой фиксированной точки* $\lambda_0\in\mathbb{C}$ *найдется единственная пара неотрицательных целых чисел* $\mathbf{d}=\mathbf{d}(\lambda_0)$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\lambda_0)$ *таких, что* $D_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\neq\theta_{\mathbf{d}}$, $D_p^{(k)}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]=\theta_p$ *для всех* $0\le k<\mathbf{r}$ *и* $p=0,1,2,\dots$, *а* $D_p^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]=\theta_p$ *для всех* $0\le p<\mathbf{d}$;

(B) *При этом если точка*

$$\begin{pmatrix} s_1' & \dots & s_{\mathbf{d}}' \\ t_1' & \dots & t_{\mathbf{d}}' \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\mathbf{d}}$$

удовлетворяет неравенству

$$\delta:=D_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\begin{pmatrix} s_1' & \dots & s_{\mathbf{d}}' \\ t_1' & \dots & t_{\mathbf{d}}' \end{pmatrix}\neq\theta_0,$$

то функции

$$\phi_i(s)=D_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\begin{pmatrix} s_1' & \dots & s_{i-1}' & s & s_{i+1}' & \dots & s_{\mathbf{d}}' \\ t_1' & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & t_{\mathbf{d}}' \end{pmatrix}\quad (s\in\mathbb{R},1\le i\le\mathbf{d})$$

образуют базис пространства решений f *однородного уравнения*

$$f(s)+\int\boldsymbol{T}_{\lambda_0}(s,t)f(t)\,dt=0,$$

а функции

$$\psi_l(t)=\overline{D_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\begin{pmatrix} s_1' & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{\mathbf{d}}' \\ t_1' & \dots & t_{l-1}' & t & t_{l+1}' & \dots & t_{\mathbf{d}}' \end{pmatrix}}\quad (t\in\mathbb{R},1\le l\le\mathbf{d})$$

образуют базис пространства решений f *сопряженного однородного уравнения* $f(t)+\int\overline{\boldsymbol{T}_{\lambda_0}(s,t)}f(s)\,ds=0$. *Уравнение* $f(s)+\int\boldsymbol{T}_{\lambda_0}(s,t)f(t)\,dt=g(s)$ *для почти всех* $s\in\mathbb{R}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\langle g,\psi_l\rangle=0$ $(1\le l\le\mathbf{d})$; *в этом случае его общее решение дается формулой*

$$f(s)=g(s)-\frac{1}{\delta}\int D_{\mathbf{d}+1}^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\begin{pmatrix} s & s_1' & \dots & s_{\mathbf{d}}' \\ t & t_1' & \dots & t_{\mathbf{d}}' \end{pmatrix}g(t)\,dt+\sum_{i=1}^{\mathbf{d}}c_i\phi_i(s),\tag{13}$$

где $c_1,\dots,c_{\mathbf{d}}\in\mathbb{C}$ *– произвольные постоянные;*

(C) *Для каждого* $\lambda_0\in\mathbb{C}$ *число* $\mathbf{r}(\lambda_0)$ *равно* 0, *и если* $\mathbf{m}:=\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}\mathbf{d}(\lambda)$, *то* $\mathbf{d}(\lambda_0)=\mathbf{m}$ *для всех точек* $\lambda_0\in\mathbb{C}$, *за исключением нулей целой функции* $D_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{T}_\lambda]:\mathbb{C}\to C\left(\mathbb{R}^{\mathbf{d}},\mathbb{C}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1**(d)** найдутся $p\ge 0$ и $\lambda\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\theta_p\neq D_p[\boldsymbol{T}_\lambda]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_p^{(n)}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n.$$

Следовательно, существует ν такое, что $D_p^{(\nu)}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\neq\theta_p$. Таким образом, всегда найдется пара неотрицательных чисел p, ν такая, что $D_p^{(\nu)}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\neq\theta_p$. Возьмем тогда в качестве числа $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\lambda_0)$ наименьшее ν, для которого $D_p^{(\nu)}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\neq\theta_p$ при некотором p, а в качестве $\mathbf{d}=\mathbf{d}(\lambda_0)$ – наименьшее p такое, что $D_p^{(\mathbf{r})}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}]\neq\theta_p$. Тогда пара чисел $\mathbf{d}$, $\mathbf{r}$ есть та пара, существование которой утверждается в части **(A)** теоремы.

Доказательство части **(B)** теоремы опускается: оно почти дословно повторяет доказательство теоремы из [7, с. 187–193], где свойства полиномиальных рядов Фредгольма, установленные в теореме 1 выше, лишь только постулируются.

То, что $\mathbf{r}(\lambda_0) = 0$ для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, следует из решения Фредгольма для уравнения (2) и определения самого числа $\mathbf{r}(\lambda_0)$ (см **(A)**). Поскольку $D_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{T}_\lambda] \not\equiv \theta_{\mathbf{m}}$ в $\mathbb{C}$, для любой точки λ_0 такой, что $D_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{T}_{\lambda_0}] \neq \theta_{\mathbf{m}}$, то число $d(\lambda_0)$ должно быть не больше $\mathbf{m}$ и утверждение **(C)** доказано. Отметим, что это утверждение согласуется с теоремой о голоморфной оператор-функции [1, Теорема 5.1, с. 39].

Список литературы

1. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

2. *Novitskiĭ I.M.* Integral representations of linear operators by smooth Carleman kernels of Mercer type // Proc. London Math. Soc. (3). 1994. V. 68, N 1. P. 161–177.

3. *Novitskiĭ I.M.* Unitary equivalence to integral operators and an application // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 50, N 2. P. 295-300.

4. *Новицкий И.М.* О минорах Фредгольма для вполне непрерывных операторов // Дальневосточный математический сборник: Дальнаука, 1999. Вып. 7. С. 103-122.

5. *Ловитт У.В.* Линейные интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957. 266 с.

6. *Маркус М., Минк Ч.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.

7. *Новицкий И.М.* Формулы Фредгольма для ядер, линейных относительно параметра // Дальневосточный мат. журн. 2002. Т. 3, № 2. С. 173–194.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

I.M. Novitskiĭ On the convergence of polynomial Fredholm series. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 131–139.

ABSTRACT

In this note, we study the infinite system of Fredholm series of polynomials in λ, formed, in the classical way, for a kernel on $\mathbb{R}^2$ of the form $\boldsymbol{H}(s,t) - \lambda \boldsymbol{S}(s,t)$, where λ is a complex parameter. We establish a convergence of these series in the complex plane with respect to sup-norms of various spaces of continuous functions. The convergence results apply to solving a Fredholm integral equation with a kernel that is linear with respect to parameter.

Key words: *linear nuclear operator, linear integral operator, Fredholm integral equation, Fredholm series, Fredholm determinant, Fredholm minor*