ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 140–149

УДК 517.54
MSC2000 31A15, 30C85

© Е.Г. Прилепкина*

Теоремы искажения для однолистных функций в многосвязных областях

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Доказывается n–точечная теорема искажения для мероморфных и однолистных функций в конечносвязной области. Как следствия в круговом кольце получены новые оценки шварцианов. Для производных конформных и однолистных отображений неналегающих областей на плоскость с радиальными разрезами установлено неравенство, аналогичное известному неравенству Лаврентьева. Основные результаты работы выражены в терминах функции Неймана, для доказательств используется техника обобщенных конденсаторов.

Ключевые слова: *мероморфные функции, однолистные функции, теоремы искажения, производная Шварца, круговое кольцо, емкость конденсатора, функция Неймана.*

1. Введение и вспомогательные результаты

Естественным обобщением функции Грина является функция Робена, изучению которой в последнее время уделяется большое внимание (см, например, [1–3]). В частности, в работе [3] в терминах функции Робена с помощью техники обобщенных конденсаторов получены достаточно общие теоремы искажения для регулярных функций. Вместе с тем развитие метода экстремальных метрик [4] и теории обобщенных конденсаторов [5] приводит к необходимости рассматривать также функцию Неймана. В отличие от функции Робена, роль функции Неймана для получения неравенств в теории однолистных отображений недостаточно изучена. Наша заметка частично восполняет этот пробел и продолжает исследования [5], [6].

Напомним определение обобщенной функции Неймана [5]. Рассмотрим сперва жорданову область $B \subset \mathbf{C}_z$, ограниченную конечным числом аналитических кривых. Пусть $\varphi(z)$ — вещественная непрерывная функция на ∂B такая, что

$$\int_{\partial B} \varphi(z) = -2\pi.$$

Обозначим для $\zeta \in B$ через $N_{B,\varphi}(z;\zeta)$ функцию от $z \in \overline{B}$, удовлетворяющую условиям:

1)$N_{B,\varphi}(z;\zeta)$ гармоническая в $B \setminus \{\zeta\}$ и дифференцируема на ∂B;

2) $N_{B,\varphi}(z;\zeta) + \log|z-\zeta|$ гармоническая в окрестности $\zeta \neq \infty$, и в случае $\zeta = \infty$ гармонической в окрестности ζ является функция $N_{B,\varphi}(z;\zeta) - \log|z|$;

3) $\frac{\partial N_{B,\varphi}(z;\zeta)}{\partial n} = \varphi(z)$ на ∂B, где производная берется по внешней нормали к B.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: pril-elena@yandex.ru

Обобщенной функцией Неймана $N_B(z,\zeta)$ области B с полюсом в точке ζ назовем любую функцию, удовлетворяющую условиям 1)–3) для каких-нибудь граничных значений $\varphi(z)$.

Пусть теперь B — произвольная конечносвязная область сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$ без изолированных граничных точек; обобщенную функцию Неймана для этой области определим с помощью конформного и однолистного отображения f на жорданову область, ограниченную аналитическими кривыми, по формуле

$$N_B(z,\zeta)=N_{f(B)}(f(z);f(\zeta)).$$

В области B выберем совокупность точек $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ и определим необходимые в дальнейшем константы

$$\begin{aligned} &N_{kl}(B):=N_B(z_k,z_l), \qquad k\neq l,\\ &N_{kl}(B):=\lim_{z\to z_k}(N_B(z;z_k)+\log|z-z_k|), \qquad k=l, \qquad z_k\neq\infty,\\ &N_{kl}(B):=\lim_{z\to z_k}(N_B(z;z_k)-\log|z|), \qquad k=l, \qquad z_k=\infty \end{aligned} \tag{1}$$

В случае $B=\overline{\mathbf{C}}_z$ полагаем

$$\begin{aligned} &N_{kl}(\overline{\mathbf{C}}_z):=-\log|z_k-z_l|, \text{ если } k\neq l,\ z_k\neq\infty,\ z_l\neq\infty,\\ &N_{kl}(\overline{\mathbf{C}}_z):=0 \ \text{ — в противном случае.} \end{aligned}$$

Как показано в работе [5], две обобщенные функции Неймана $N_B^1(z,\zeta)$ и $N_B^2(z,\zeta)$ связаны соотношением $N_B^2(z,\zeta)=N_B^1(z,\zeta)+h(z)+c(\zeta)$. Таким образом, имеем $N_{kl}^2(B)=N_{kl}^1(B)+h(z_k)+c(z_l)$. Пусть для вещественных чисел $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n\delta_k=0, \tag{2}$$

тогда для двух обобщенных функций Неймана справедливо равенство

$$\sum_{k,l=1}^n\delta_k\delta_lN_{kl}^1(B)=\sum_{k,l=1}^n\delta_k\delta_lN_{kl}^2(B).$$

Следовательно, квадратичная форма $\sum\limits_{k,l=1}^n\delta_k\delta_lN_{kl}(B)$ остается постоянной, и это позволяет выбирать наиболее удобный с практической точки зрения способ построения обобщенной функции Неймана.

Конечно, мы могли ограничится выбором только классической функции Неймана для постоянных граничных значений $\varphi(z)$. Поскольку классическая функция Неймана не является конформным инвариантом, такой выбор не всегда удобен. Приведем два примера вычисления обобщенной функции Неймана.

Пример 1. Пусть $U:=\{z:|z|>1\}$ — внешность единичного круга, ζ — конечная точка U. Классическая функция Неймана в этом случае хорошо известна и имеет вид

$$N_U(z,\zeta)=-\log|(z-\zeta)(1-z\overline{\zeta})|.$$

Константы $N_{kl}(U)$ для точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ задаются равенством

$$N_{kl}(U)=-\log|z_k-z_l||1-z_k\overline{z_l}|,\ k\neq l, \tag{3}$$

$$N_{kl}(U)=-\log(|z_k|^2-1),\ k=l.$$

Пример 2. Пусть $K(R) := \{z : 1 < |z| < R\}$ — концентрическое круговое кольцо, ζ — вещественная точка кольца. Нетрудно убедиться, что при вещественных ζ на действительной оси производная по нормали от функции $N_U(z,\zeta) = -\log|(z-\zeta)(1-z\overline{\zeta})|$ равна нулю. Пусть теперь функция $w = G(z) \equiv G(z;R)$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до ∞ так, что $G(R;R) = P(R)$. Тогда в качестве обобщенной функции Неймана кольца $K(R)$ с полюсом в вещественной точке ζ можно выбрать функцию

$$N_{K(R)}(z,\zeta) = -\log\left|(G(z)-G(\zeta))(1-\overline{G(z)}G(\zeta))\right|.$$

Соответственно константы $N_{kl}(K(R))$ для вещественной совокупности точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ выражаются формулами

$$N_{kl}(K(R)) = -\log|(G(z_k)-G(z_l))(1-G(z_k)G(z_l))|\,,\ k \neq l,$$
$$N_{kl}(K(R)) = -\log\left|G'(z_k)(G(z_k)^2-1)\right|\,,\ k = l. \tag{4}$$

Заметим, что функцию Греча можно представить в виде

$$G(z;R) = \tau \mathrm{sn}^2\left(\left(\frac{i}{\pi}\log(zR)+1\right)\mathbf{K}(\tau);\tau\right),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ — решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2}\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)/\mathbf{K}(\tau),$$

$\mathbf{K}(\tau)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\mathrm{sn}(\cdot;\tau)$ — эллиптическая функция Якоби.

В дальнейшем нам потребуются также асимптотические формулы для емкостей конденсаторов. Пусть B — конечносвязная область на комплексной сфере без изолированных граничных точек либо вся комплексная сфера. Обобщенный конденсатор определим как тройку $C = (B,\mathcal{E},\Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ — совокупность замкнутых в $\overline{B}$ попарно непересекающихся множеств E_k, $k = 1,\ldots,n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел δ_k, $k = 1,\ldots,n$. Множества E_k, $k = 1,\ldots,n$, будем называть пластинами конденсатора C. Емкость cap C конденсатора C определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле

$$I(v,\ B) := \int\int_B |\nabla v|^2 dxdy$$

по всем *допустимым* функциям $v(z)$ $(z = x+iy)$, т.е. вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки множества B, за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и равным δ_k в некоторой окрестности пластины E_k, $k = 1,\ldots,n,$.

Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$ обозначим через $D(z_0,r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки определим $D(\infty,r) := \{z : |z| \geq 1/r\}$. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность различных точек в B, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ — совокупность вещественных чисел, $\sum\limits_{k=1}^n \delta_k^2 \neq 0$, и пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, где $\psi_k = \psi_k(r) \equiv \mu_k r$, μ_k — произвольные положительные числа, $k = 1,\ldots,n$. Обозначим через $C(r;B,Z,\Delta,\Psi)$ конденсатор

$$C(r;B,Z,\Delta,\Psi) := (B,\{D(z_1,\psi_1(r)),\ldots,D(z_n,\psi_n(r))\},\ \{\delta_1,\ldots,\delta_n\}), \tag{5}$$

где $r > 0$ достаточно мало.

В случае дополнительного условия (2) в работе [5] для конечносвязной области B и в [7] для $B = \overline{\mathbf{C}}_z$ получена асимптотическая формула

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{cap}\ C(r; B, Z, \Delta, \Psi) = -\frac{1}{\nu \log r} + \frac{M_1}{[\log r]^2} + O\left([\log r]^{-3}\right), \quad r \to 0, \tag{6}$$

где

$$\nu := \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2\right)^{-1},$$

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log \mu_k - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(B).$$

При однолистном и конформном отображении области B на область $f(B)$ для конденсатора $f(C(r; B, Z, \Delta, \Psi))$ при условии (2) выполняется

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{cap}\ f(C(r; B, Z, \Delta, \Psi)) = -\frac{1}{\nu \log r} + \frac{M_2}{[\log r]^2} + O\left([\log r]^{-3}\right), \quad r \to 0, \tag{7}$$

где

$$M_2 = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log(|f'(z_k)|\mu_k) - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(f(B))$$

и константы $N_{kl}(f(B))$, $k, l = \overline{1, n}$, вычислены для совокупности точек $\{f(z_k)\}_{k=1}^{n}$.

Введем величину

$$r(B, z_1, z_2) = \exp(N_{21}(B) + N_{12}(B) - N_{11}(B) - N_{22}(B)), \tag{8}$$

где константы $N_{kl}(B)$, $k, l = \overline{1, 2}$, определены для двух различных точек $\{z_1, z_2\}$ области B. Из вышесказанного следует, что $r(B, z_1, z_2)$ не зависит от выбора обобщенной функции Неймана $N_B(z, \zeta)$. Назовем $r(B, z_1, z_2)$ *радиусом Неймана области B относительно точек* z_1, z_2.

Если $Z = \{z_1, z_2\}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, то для емкости соответствующего конденсатора $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ формула (6) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{cap}\ C(r; B, Z, \Delta, \Psi) = -\frac{2}{\log r} + \frac{\log r(B, z_1, z_2)}{[\log r]^2} + O\left([\log r]^{-3}\right), \quad r \to 0. \tag{9}$$

Перечислим свойства радиуса Неймана, вытекающие непосредственно из определения.

1. Симметричность:

$$r(B, z_1, z_2) = r(B, z_2, z_1).$$

2. При однолистном конформном отображении области B на область $f(B)$ справедливо

$$r(B, z_1, z_2) = r(f(B), f(z_1), f(z_2))|f'(z_1)||f'(z_2)|. \tag{10}$$

4. Из монотонности емкости обобщенного конденсатора следует монотонность радиуса Неймана, то есть

$$B \subset B' \Longrightarrow r(B, z_1, z_2) \leq r(B', z_1, z_2).$$

3. Радиус Неймана единичного круга $V = \{|z| < 1\}$

$$r(V, z_1, z_2) = \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|(z_1 - z_2)(1 - \overline{z_1} z_2)|^2}.$$

2. Теоремы искажения и неравенства для шварцианов

Следующая теорема вытекает из монотонности емкости при расширении области и асимптотических формул (6), (7).

Теорема 1. *Пусть B — конечносвязная область без изолированных граничных точек либо $B = \overline{\mathbf{C}}_z$, область D удовлетворяет тем же условиям, и пусть функция $f(z)$ мероморфна и однолистна в B, $f(B) \subset D$. Тогда для любых различных точек $z_k \in B$, $k = 1, \ldots, n$, и любых вещественных чисел δ_k, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условию (2), справедливо неравенство*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(B) \geq \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D) - \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log |f'(z_k)|, \tag{11}$$

где константы $N_{kl}(B)$, $N_{kl}(D)$, $k, l = \overline{1, n}$, вычислены для совокупности точек $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\{f(z_k)\}_{k=1}^n$ соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при расширении области B емкость конденсатора (5) не уменьшается. Применяя асимптотическую формулу (6) к конденсаторам $C(r; f(B), \{f(z_k)\}_{k=1}^n, \Delta, \Psi)$ и $C(r; D, \{f(z_k)\}_{k=1}^n, \Delta, \Psi)$, имеем

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(f(B)) \geq \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D)).$$

Полагая в (6), (7) $\mu_k = 1$, $k = 1, ..., n$, и учитывая конформную инвариантность емкости конденсатора, получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(B) = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log(|f'(z_k)|) + \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(f(B)). \tag{12}$$

Теорема доказана.

Замечание. Из результатов работы [8] следует, что равенство в (11) для гладких конечносвязных областей B выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{f(B)} = D$ и множество $f(B) \bigcap D$ состоит из кусочно-гладких кривых, во внутренних точках которых производная по нормали функции $u(z) := \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k N_{f(B)}(z, z_k)$ равна нулю.

Применяя теорему 1 в случае $n = 2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $D = \overline{\mathbf{C}}_z$, получим следствие 1.

Следствие 1. *Если $f(z)$ мероморфна и однолистна в B, то для любых точек z_1, $z_2 \in B$ справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(z_1) f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geq r(B, z_1, z_2). \tag{13}$$

В случае, когда B совпадает с единичным кругом, неравенство (13) эквивалентно известному неравенству Фана [9]:

$$\frac{|f'(z_1)||f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|(z_1 - z_2)(1 - \overline{z_1} z_2)|^2}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(R)$, класс функций f, мероморфных и однолистных в кольце $K(R)$, для которых множество $f(K(R))$ значений $f(z)$ в $K(R)$ лежит в области $U := \{|w| > 1\}$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ на себя.

Полагая в теореме 1 $n = 2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $B = K(R)$, $D = U$ и используя (3), (4), получим следствие 2.

Следствие 2. *Пусть $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$, z_1, z_2— вещественные точки кольца $K(R)$, отличные от полюсов. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2}\frac{(|f(z_1)|^2-1)(|f(z_2)|^2-1)}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)|^2} \geq \frac{|G'(z_1)G'(z_2)|}{|G(z_1)-G(z_2)|^2}\frac{(G(z_1)^2-1)(G(z_2)^2-1)}{(1-G(z_1)G(z_2))^2}. \quad (14)$$

Отметим, что в работе [10] для мероморфных и однолистных в кольце $K(R)$ функций и вещественных z_1, z_2 было получено неравенство

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2} \geq \frac{|T'(z_1)T'(z_2)|}{|T(z_1)-T(z_2)|^2}, \quad (15)$$

где функция $T(z)$ отображает кольцо $K(R)$ на плоскость с разрезами по действительной оси. Учитывая аналитическое продолжение функции f класса $\mathfrak{M}(R)$ по принципу симметрии через окружность $|z|=1$, заключаем, что в классе $\mathfrak{M}(R)$ справедлива оценка

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2} \geq \frac{|G'(z_1)G'(z_2)|}{|G(z_1)-G(z_2)|^2}. \quad (16)$$

Значения аналитически продолженной функции f в точках, симметричных относительно окружности $|z|=1$, связаны следующим образом: $f(z)=1/\overline{f(1/\overline{z})}$, $z \in K(R)$. Полагая $z_1=|z|$, $z_2=1/|z|$, из (16) получаем

$$\left|\frac{f'(|z|)^2}{f^2(|z|)(1/\overline{f(|z|)}-f(|z|))^2}\right| \geq \left|\frac{G'(|z|)^2}{G^2(|z|)(1/\overline{G(|z|)}-G(|z|))^2}\right|.$$

Последнее неравенство, примененное к функции $f_z(\zeta)=f(e^{i\arg z}\zeta)$ в точке $\zeta=z$, дает оценку

$$\frac{|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2-1)} \geq \frac{|G'(|z|)|^2}{(G(|z|)^2-1)}. \quad (17)$$

Применением емкостного подхода и метода симметризации в работе [6] были получены неравенства с участием производной Шварца $S_f(z)=f'''(z)/f'(z)-(3/2)(f''(z)/f'(z))^2$ для функций класса $\mathfrak{M}(R)$. Приведем две теоремы, дополняющие указанные результаты.

Теорема 2. *Если $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$, то для любого положительного $z \in K(R)$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re} S_f(z) \geq S_G(z). \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z_0 – вещественная точка кольца $K(R)$ на положительной полуоси и пусть $\rho > 0$ настолько мало, что точка $z_0+\rho$ также принадлежит кольцу $K(R)$. Положив в неравенстве (16) $z_1=z_0$, $z_2=z_0+\rho$, получим

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2} \geq \frac{|G'(z_0)G'(z_0+\rho)|}{|G(z_0)-G(z_0+\rho)|^2}. \quad (19)$$

В некоторой окрестности точки z_0 функция f представима в виде степенного ряда

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots$$

и, следовательно,

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-z_0)+3c_3(z-z_0)^2+\ldots$$

Отсюда несложно установить асимптотику левой части неравенства (19):

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}=\frac{1}{\rho^2}\left|1+\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\rho^2+o(\rho^2)\right|=\frac{1}{\rho^2}\left|1+\frac{1}{6}S_f(z_0)\rho^2+o(\rho^2)\right|.$$

Следовательно,

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}=\frac{1}{\rho^2}\left(1+\frac{1}{6}\mathrm{Re}S_f(z_0)\rho^2+o(\rho^2)\right),\quad \rho\to 0. \tag{20}$$

Аналогичная асимптотика правой части неравенства (19) с заменой $f=G$ приводит к утверждению теоремы.

Теорема 3. *Пусть $f(z)\in\mathfrak{M}(R)$. Тогда для любого положительного $z\in K(R)$ выполняется*

$$\mathrm{Re}S_f(z)-S_G(z)\ge 6\left(\frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^2-1}-\frac{|G'(z)|^2}{G(z)^2-1}\right)\ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как в теореме 2, пусть z_0 — вещественная точка кольца $K(R)$ на положительной полуоси и $z_0+\rho$ принадлежит кольцу $K(R)$, $c_0=f(z_0)$, $c_1=f(z_0)$, $c_2=f''(z_0)/2$. Применяя (14) к $z_1=z_0$, $z_2=z_0+\rho$, заключаем, что функция $f=G$ дает наименьшее значение выражения

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)}{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}.$$

Обозначим $t=|c_0|^2-1$. Элементарные вычисления дают

$$|f(z_0+\rho)|^2-1=\left(c_0+c_1\rho+c_2\rho^2+o(\rho^2)\right)\left(\overline{c_0}+\overline{c_1}\rho+\overline{c_2}\rho^2+o(\rho^2)\right)-1=$$

$$=|c_0|^2+2\mathrm{Re}c_1\overline{c_0}\rho+|c_1|^2\rho^2+\mathrm{Re}(2c_2\overline{c_0})\rho^2-1+o(\rho^2)=t\left(1+\frac{2\mathrm{Re}c_1\overline{c_0}}{t}\rho+\frac{|c_1|^2+\mathrm{Re}(2c_2\overline{c_0})}{t}\rho^2\right)+o(\rho^2).$$

Аналогично

$$|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2=(1-\overline{c_0}f(z_0+\rho))(1-c_0\overline{f(z_0+\rho)})=$$

$$=\left(1-\overline{c_0}\left(c_0+c_1\rho+c_2\rho^2+o(\rho^2)\right)\right)\left(1-c_0\left(\overline{c_0}+\overline{c_1}\rho+\overline{c_2}\rho^2+o(\rho^2)\right)\right)=$$

$$=t^2\left(1+2\frac{\mathrm{Re}(c_1\overline{c_0})}{t}\rho+\left(\frac{|c_1|^2|c_0|^2}{t^2}+\frac{\mathrm{Re}(2c_2\overline{c_0})}{t}\right)\rho^2+o(\rho^2)\right).$$

Отсюда, после стандартных преобразований, получаем асимптотическую формулу

$$\frac{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)}{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}=1-\frac{|c_1|^2}{(|c_0|^2-1)^2}\rho^2+o(\rho^2),\quad \rho\to 0.$$

Учитывая (20), в итоге находим

$$\frac{|f'(z_0)f'(z_0+\rho)|}{|f(z_0)-f(z_0+\rho)|^2}\cdot\frac{(|f(z_0)|^2-1)(|f(z_0+\rho)|^2-1)}{|1-\overline{f(z_0)}f(z_0+\rho)|^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{6}\mathrm{Re}S_f(z_0)-\frac{|c_1|^2}{(|c_0|^2-1)^2}+o(1),$$

$\rho\to 0$. Утверждение теоремы теперь следует из (14) и (17).

3. О конформных отображениях неналегающих областей

Задачи о конформных отображениях неналегающих областей восходят к работам М.А. Лаврентьева и имеют богатую историю. Классический результат Лаврентьева касается конформных и однолистных отображений $f_1(z)$, $f_2(z)$ единичного круга на две неналегающие области B_1, B_2 и заключается в неравенстве

$$|f_1'(0)f_2'(0)|\le|f_1(0)-f_2(0)|^2.$$

Для конечносвязной области B без вырожденных граничных точек мы будем рассматривать конформное и однолистное отображение B на плоскость с радиальными разрезами, причем такое, что заданные различные конечные точки a, b переходят соответственно в 0 и ∞ и в окрестности b имеет место разложение $1/(z-b)+a_0+a_1(z-b)+\ldots$ Обозначим это отображение $\varphi_B(z;a,b)$. Следующая теорема дает выражение радиуса Неймана $r(B,a,b)$ в терминах функции $\varphi_B(z;a,b)$.

Теорема 4. *Модуль производной отображения $\varphi_B(z;a,b)$ в точке a совпадает с радиусом Неймана $r(B,a,b)$, то есть*

$$|\varphi'_B(a;a,b)| = r(B,a,b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду (10), достаточно доказать теорему для случая, когда область B ограничена аналитическими кривыми Жордана. Нетрудно показать (см также [4]), что функция $V_B(z;a,b) = -\log|\varphi_B(z;a,b)|$ удовлетворяет условиям:

1) $V_B(z;a,b)$ непрерывно дифференцируема на $\overline{B}\setminus\{a\cup b\}$ и гармоническая в $B\setminus\{a\cup b\}$;

2) при $z\to a$ справедливо разложение

$$V_B(z;a,b) = -\log|z-a| + v(z),$$

где $v(z)$ — гармоническая функция;

3) при $z\to b$ справедливо разложение

$$V_B(z;a,b) = \log|z-b| + o(1);$$

4) производная по нормали $\frac{\partial V_B(z;a,b)}{\partial n} = 0$ на ∂B.

Выберем функцию Неймана с постоянными граничными значениями нормальной производной и обозначим $N(b) = \lim\limits_{z\to b}(N_B(z,b)+\log|z-b|)$. Убедившись, что функция $N_B(z,a)-N_B(z,b)-N_B(b,a)+N(b)$ удовлетворяет условиям 1)–4), в силу единственности, получаем

$$V_B(z;a,b) = N_B(z,a) - N_B(z,b) - N_B(b,a) + N(b).$$

Отсюда находим

$$N_{11} = -\log|\varphi'_{a,b}(a)| + 2N_B(b,a) - N(b),$$

$$N_{22} = N(b),$$

$$N_{12} = N_{21} = N_B(b,a).$$

Утверждение теоремы теперь следует из определения (8).

Как следствие из теоремы 4 вытекает хорошо известное экстремальное свойство отображения $\varphi_B(z;a,b)$ [11, стр. 217].

Следствие 3. *Среди функций $f(z)$, конформных и однолистных в области B, удовлетворяющих условиям $f(a)=0$, $f(b)=\infty$ и таких, что в окрестности точки b справедливо разложение $f(z)=1/(z-b)+a_0+a_1(z-b)+\ldots$, наименьшее значение модуля производной в точке a дает функция $\varphi_B(z;a,b)$, то есть справедливо неравенство*

$$|f'(a)| \geq |\varphi'_B(a;a,b)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi(z) = f(z)/(f(z)-1)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\frac{|\psi'(a)\psi'(b)|}{|\psi(a)-\psi(b)|^2} = |f'(a)|.$$

Остается теперь применить следствие 1 и теорему 4.

Теорема 5. *Пусть* B_m, $m = 1, ..., n$, *— попарно неналегающие конечносвязные области без изолированных граничных точек,* a_m, b_m *— различные конечные точки* B_m *и* $\varphi_m(z) := \varphi_{B_m}(z; a_m, b_m)$. *Тогда*

$$\prod_{m=1}^{n} |\varphi'_m(a_m)| \leq \frac{\prod' |a_i - a_j||b_i - b_j|}{\prod |a_i - b_j|^2},$$

где $'$ *у произведения означает отсутствие нулевого множителя и* $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z = \{a_1, b_1, ..., a_n, b_n\}$, $\Delta = \{1, -1, ..., 1, -1\}$. Рассмотрим конденсаторы $C := C(r; \overline{\mathbf{C}}_z, Z, \Delta, \{r, r, ..., r\})$, $C_m := C(r; B_m, \{a_m, b_m\}, \{1, -1\}, \{r, r\})$, $m = 1, ..., n$. Если v — произвольная допустимая функция для C, то ее сужение на B_m является допустимой функцией для C_m. Следовательно,

$$I(v, \mathbf{C}_z) \geq \sum_{m=1}^{n} I(v, B_m) \geq \sum_{m=1}^{n} \mathrm{cap} C_m,$$

откуда следует

$$\mathrm{cap} C \geq \sum_{m=1}^{n} \mathrm{cap} C_m.$$

Используя асимптотические формулы (6) и (9), а также теорему 4, получим

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{cap} C_m = \frac{-2n}{\log r} + \frac{1}{(\log r)^2} \log \prod_{m=1}^{n} |\varphi'_m(a_m)| + O((\log r)^{-3}),$$

$$\frac{1}{2\pi} \mathrm{cap} C = \frac{-2n}{\log r} + \frac{1}{(\log r)^2} \log \frac{\prod' |a_i - a_j||b_i - b_j|}{\prod |a_i - b_j|^2} + O((\log r)^{-3}).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Duren P., Schiffer M.M.* Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping // Complex Variables. 1993. V. 21. P. 189–196.

2. *O'Neill M.D., Thurman R.E.* Extremal domains for Robin capacity // Complex Variables. 2000. V. 41. P. 91–109.

3. *Dubinin V.N., Vuorinen M.* Robin functions and distortion theorems for regular mappings // Reports in Math Univ. of Helsinki, Finland/Preprint 454, 2007, 21 p.

4. *Емельянов Е.Г.* О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами. II.//Зап. науч. семин. ПОМИ. 2007. Т.350. С.40–51.

5. *Karp D., Prilepkina E.* Reduced modules with free boundary and its applications // Annales Academi Scient. Fen., V.34, 2009. (в печати)

6. *Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г.* Теоремы искажения для функций, мероморфных и однолистных в круговом кольце //Сиб. мат. журн. (в печати)

7. *Дубинин В.Н., Ковалев Л.В.* Приведенный модуль комплексной сферы // Зап.научн. семин. ПОМИ , 1998. Т. 254. С. 76–94.

8. *Дубинин В.Н., Прилепкина Е.Г.* О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей / /Дальневост. матем. журн. 2005. Т.6, № 1–2. С.39–56.

9. *Fan Ky.* Distortion of univalent functions // J. Math. Anal.and Appl. 1978. V. 66. №3. C. 626–631.

10. *Дубинин В.Н., Костюченко Е.В.* Экстремальные задачи теории функций, связанные с n–кратной симметрией // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2001. Т. 276. С. 83–111.

11. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. Наука. 1966.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1), РФФИ (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант 09-III-А-01-008).

Prilepkina E.G. Distortion theorems for univalent functions in multiply-connected domains. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 140–149.

ABSTRACT

The n-point distortion theorem for meromorphic and univalent functions in multiply-connected domains is proved. As the corollaries we derive the new estimates for Schwarzian derivatives in an annulus. Also, we get the inequality for derivatives of conformal and univalent mappings of non-overlapping domains on the plane with radial slits similar the Lavrentev inequality. The main results are expressed in terms of Newmann function and capacity of generalized condencers are applied to prove theorems.

Key words: *meromorphic functions, univalent functions, distortion theorems, Schwarzian derivative, annulus, condensers capacity, Newmann function*