ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 150–160

УДК 517.958
MSC2000 35Q60, 35R30

© И.В. Прохоров, В.М. Мун*

Краевая задача для уравнения переноса амплитудно-модулированного излучения

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

В работе исследован класс решений нестационарного уравнения переноса излучения с гармонической зависимостью по времени. В этом классе доказана разрешимость краевой задачи с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред и получены оценки для решения.

Ключевые слова: *теория переноса излучения, краевые задачи*

1. Введение

Широкое множество физических процессов описывается интегро-дифференциальными уравнениями переноса с периодической зависимостью по времени, например, распространение гармонических звуковых волн в случайно-неоднородной среде [1, 2], перенос модулированного по интенсивности лазерного излучения в достаточно широком диапазоне частот модуляции [3–6] и т.д. Кроме того, уравнения такого типа возникают при решении нестационарных уравнений переноса с помощью различных интегральных преобразований.

Если рассматривается перенос излучения в неоднородной среде, то, помимо внешнего краевого условия, на границе раздела сред ставятся так называемые условия сопряжения. Для излучения оптического диапазона и звуковых волн эти условия обычно выражают связь между падающим, отраженным и преломленным потоками на границах макронеоднородностей [1]. В диапазоне более жесткого излучения эффекты отражения и преломления несущественны. Поэтому упомянутые обобщенные условия сопряжения трансформируются в условия непрерывной склейки решения. Они традиционны в теории переноса [7, 8], и их постулирование существенно упрощает задачу. Вопросы разрешимости краевых задач для стационарного уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения рассматривались в работах [9–11]. На основе проведенного анализа качественных свойств решения прямой задачи для уравнения переноса с френелевскими и диффузными условиями сопряжения были получены результаты, касающиеся единственности некоторых обратных и экстремальных задач [11–14].

Зачастую при решении уравнения переноса излучения переходят к его диффузионному приближению. Для гармонической временной зависимости это приближение является уравнением Гельмгольца с комплексным волновым числом, которое в общем случае является кусочнонепрерывной функцией пространственных переменных [4]. Уравнение Гельмгольца описывает волновые процессы и является хорошо изученным с теоретической точки зрения.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: prh@iam.dvo.ru

Однако для слаборассеивающих сред и сред с высокой степенью анизотропии рассеяния на микронеоднородностях диффузионное приближение является достаточно грубым [2]. Кроме того, даже для сильнорассеивающих сред диффузионное приближение дает удовлетворительную точность только на достаточном расстоянии от границ макронеоднородностей. Таким образом, при моделировании процессов распространения излучения в неоднородных средах предпочтительнее иметь дело с уравнением переноса, а не с его диффузионным приближением.

Отличительной особенностью решений уравнения переноса модулированного излучения является то, что для них не справедлива теорема сравнения и, как следствие, принцип максимума [8] для вещественной и мнимой частей решения уравнения переноса. Однако предполагая в каждой точке среды нормы альбедо однократного рассеяния и оператора сопряжения меньше единицы, удается получить оценки для модуля комплекснозначного решения, аналогичные стационарному случаю [10].

2. Уравнение переноса амплитудно модулированного излучения. Основные обозначения, определения и функциональные пространства

Пусть G — ограниченная выпуклая область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $r = (r^1, r^2, r^3)$ — элементы G, d — диаметр множества G и $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega|^2 = \omega \cdot \omega = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$.

При физической интерпретации рассматриваемой модели и встречающихся далее величин будем иметь в виду перенос оптического излучения. Если гармонический источник излучения амплитудно модулирован на частоте ν, то световое поле в среде G, описываемое в терминах яркости излучения, будет иметь две составляющие: постоянную и переменную на частоте модуляции источника. Переменная составляющая поля $f(r, \omega)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению переноса [4–6]:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \left(\mu(r) + \frac{i\nu}{c(r)}\right) f(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} S(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega). \quad (1)$$

Функция $f(r, \omega)$ характеризует волну фотонной плотности в точке r, распространяющуюся в направлении ω и возбуждаемую гармоническим источником, амплитудно модулированным на частоте ν. Модуль $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2}$ комплекснозначной функции $f(r, \omega)$ имеет смысл амплитуды волны, а аргумент $\arg(f)$ — фазы волны.

Вещественные функции c, μ, μ_s, S в уравнении (1) описывают оптические свойства среды G. Они интерпретируются как скорость света, коэффициент полного ослабления, коэффициент рассеяния и индикатриса рассеяния соответственно. Величина $c(r)$ выражается через показатель преломления среды $\kappa(r)$ и скорость света в вакууме c_0 соотношением $c(r) = c_0/\kappa(r)$. Комплекснозначная функция J характеризует распределение внутренних источников в среде. Для удобства введем в рассмотрение комплексный коэффициент ослабления $\widetilde{\mu}(r)$, определяемый формулой

$$\widetilde{\mu}(r) = \mu(r) + i\frac{\nu\kappa(r)}{c_0}. \quad (2)$$

Через $\overline{X}$ будем обозначать замыкание некоторого открытого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, через $\partial X = \overline{X} \backslash X$ — его границу и через $\mathrm{mes}_m(X)$, $m \leq n$, — m-мерную меру Лебега множества X.

Пусть поверхность γ разбивает область G на конечное число подобластей $G_1, G_2, ..., G_p$. Обозначим через G_0 их объединение:

$$G_0 = \bigcup_{l=1}^{p} G_l, \quad G_l \cap G_j = \emptyset, \, l \neq j. \tag{3}$$

Будем называть множество ∂G внешней границей среды G (точнее говоря, множества G_0), а границу раздела сред $\gamma = \partial G_0 \backslash \partial G$ — внутренней, или контактной, границей. Области G_l при этом будем интерпретировать как неоднородности, входящие в состав многокомпонентной среды G.

Границы областей G_l предполагаются кусочно-гладкими класса $C^{(1)}$. Для определенности, говоря о единичном векторе $n(z)$ нормали к границе множества G_0 в точке $z \in \partial G_l \subset \partial G$, будем иметь в виду внешнюю нормаль к ∂G_l. Если z является точкой контакта двух смежных областей G_l и G_j, $1 \leq l < j \leq p$, на участках гладкости ∂G_l и ∂G_j, то $n(z)$ выбирается внешней к поверхности с большим индексом, то есть к ∂G_j. Относительно ∂G_0 будем дополнительно предполагать выполнимость условия обобщенной выпуклости так, как оно понимается в [8]. То есть любая прямая, имеющая общую точку с G_0, пересекает ∂G_0 в конечном числе точек. Заметим, что сделанных предположений достаточно для того, чтобы $\mathrm{mes}_3(\partial G_0) = 0$ [15].

Обозначим через Π_ω ортогональную проекцию множества G_0 на плоскость, перпендикулярную направлению ω и проходящую через фиксированную точку в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Pi_{\xi,\omega}$, где $\xi \in \Pi_\omega, \omega \in \Omega$, есть пересечение прямой $\{\xi + t\omega, \; -\infty < t < +\infty\}$ и множества G_0. По условию обобщенной выпуклости одномерное открытое множество $\Pi_{\xi,\omega}$ является объединением конечного числа интервалов

$$\begin{gathered} \Pi^l_{\xi,\omega} = \{t, \; t_l(\xi,\omega) < t < t_{l+1}(\xi,\omega)\}, \quad l = 1, ..., q(\xi,\omega), \\ -\infty < t_1(\xi,\omega) < t_2(\xi,\omega) < ... < t_{q+1}(\xi,\omega) < +\infty, \\ q(\xi,\omega) \leq \overline{q} = \sup_{(\xi,\omega)\in\Pi_\omega\times\Omega} q(\xi,\omega) < \infty, \quad \Pi_{\xi,\omega} = \bigcup_{l=1}^{q(\xi,\omega)} \Pi^l_{\xi,\omega}. \end{gathered} \tag{4}$$

Отметим, что $r = \xi + t\omega$ есть взаимно однозначное преобразование множества G_0 в $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi,\omega}$. Оно является непрерывным и непрерывно дифференцируемым по всем аргументам с якобианом, равным единице, следовательно, преобразование $r = \xi + t\omega'$, $\omega = \omega'$ переводит функции, измеримые на $G_0 \times \Omega$, в функции, измеримые на $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi,\omega} \times \Omega$ [7]. Заметим также, что поскольку открытое множество G_0 плотно вкладывается в G и $\mathrm{mes}_3(G \setminus G_0) = 0$, то функции, измеримые на $G_0 \times \Omega$, являются измеримыми на $G \times \Omega$ и наоборот.

Введем в рассмотрение множества

$$\begin{aligned} \Gamma_{-\omega} \; &= \{\xi + t_1(\xi,\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_\omega\}, \\ \Gamma_\omega \; &= \{\xi + t_{q(\xi,\omega)+1}(\xi,\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_\omega\} = \{\xi - t_1(\xi,-\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_{-\omega}\}, \\ \gamma_{-\omega} \; &= \{\xi + t_l(\xi,\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_\omega, \; l = \overline{2, q(\xi,\omega)}\}, \\ \gamma_\omega \; &= \{\xi - t_l(\xi,-\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_{-\omega}, \; l = \overline{2, q(\xi,-\omega)}\} = \\ &= \{\xi + t_l(\xi,\omega)\omega, \; \xi \in \Pi_\omega, \; l = \overline{2, q(\xi,\omega)}\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\gamma^\pm = (\gamma_{\pm\omega} \times \Omega), \quad \Gamma^\pm = (\Gamma_{\pm\omega} \times \Omega), \quad \Gamma^\pm_\gamma = \Gamma^\pm \cup \gamma^\pm. \tag{6}$$

В силу условия обобщенной выпуклости, любая прямая, проходящая через G_0, пересекает границу этого множества в конечном числе точек, следовательно, $\gamma_\omega = \gamma_{-\omega}$, поэтому множества γ^+ и γ^- совпадают. Учитывая, что $\mathrm{mes}_4(\{\partial G \times \Omega\} \backslash \{\Gamma^+ \cup \Gamma^-\}) = 0$ и $\mathrm{mes}_4(\{\gamma \times \Omega\} \backslash \gamma^\pm) = 0$, с точностью до множества меры нуль в $\mathbb{R}^4$ можно записать

$$\begin{aligned} \Gamma^\pm = &\quad \partial G \times \{\omega \in \Omega : \; \pm(n(z) \cdot \omega) > 0\}, \\ \gamma^\pm = &\quad \gamma \times \Omega. \end{aligned} \tag{7}$$

Определим банахово пространство $L_\infty(X)$, состоящее из измеримых и ограниченных (почти всюду на X) комплекснозначных функций, с нормой

$$\|\phi\|_X = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |\phi(x)|.$$

Определение 1. *Комплекснозначная функция Φ принадлежит $L_\infty(\Gamma_\gamma^-)$, если она ограничена почти всюду на Γ_γ^- и*

$$\sum_{l=1}^{q(\xi,\omega)} \Phi(\xi + t_l(\xi,\omega)\omega, \omega) \ \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega);$$

Φ принадлежит $L_\infty(\Gamma_\gamma^+)$, если

$$\sum_{l=1}^{q(\xi,\omega)} \Phi(\xi + t_{l+1}(\xi,\omega)\omega, \omega) \ \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega).$$

Оператор $\omega\cdot\nabla_r f$ в точке $(r,\omega) = (\xi + t\omega, \omega)$ запишем в виде

$$\omega\cdot\nabla_r f = \frac{\partial}{\partial t} f(r + t\omega, \omega)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} f(\xi + t\omega, \omega). \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} f(z \pm 0\omega, \omega) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega), \\ [f]_{\omega'}(z,\omega) = f(z + 0\omega', \omega) - f(z - 0\omega', \omega). \end{gathered} \tag{9}$$

Величину $[f]_{\omega'}(z,\omega)$ будем называть скачком функции (величиной разрыва) в точке (z,ω) и в направлении ω'.

Определение 2. *К классу $D(G_0\times\Omega)$ будем относить функции $f(r,\omega) = f(\xi + t\omega, \omega)$, которые после надлежащего изменения на множестве меры нуль в $G_0\times\Omega$ будут обладать следующими свойствами:*

1) почти при всех $(\xi,\omega)\in\Pi_\omega\times\Omega$ функция $f(\xi + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по t на каждом полуоткрытом интервале $(t_l(\xi,\omega), t_{l+1}(\xi,\omega)]$, $l = \overline{1, q(\xi,\omega)}$;

2) функция f такова, что $f, \omega\cdot\nabla_r f \in L_\infty(G_0\times\Omega)$.

В работе [10] был изучен вопрос о граничных значениях на $\Gamma_\gamma^\pm$ вещественной функции f из D. Аналогично можно провести соответствующие рассуждения для комплекснозначных функций и показать, что для любой функции $f\in D$ ее следы

$$f^\pm(z,\omega) = f(z \mp 0\omega, \omega), \quad (z,\omega)\in\Gamma_\gamma^\pm, \tag{10}$$

на $\Gamma_\gamma^\pm$ существуют и являются элементами пространств $L_\infty(\Gamma_\gamma^\pm)$.

Введем в рассмотрение оператор $\widehat{L} : D(G_0\times\Omega) \to L_\infty(G_0\times\Omega)$ по формуле

$$(\widehat{L}f)(r,\omega) = \omega\cdot\nabla_r f(r,\omega) + \widetilde{\mu} f(r,\omega), \tag{11}$$

где функция $\widetilde{\mu} = \mu + i\dfrac{\nu\kappa}{c_0}$ принадлежит пространству $L_\infty(G)$ и ее реальная часть удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\mu} \le \mu(r) \le \overline{\mu}, \quad \underline{\mu},\, \overline{\mu} = \text{const}, \tag{12}$$

почти всюду на G. Учитывая ограничения на функцию $\widetilde{\mu}$, стандартным приемом [7, 8, 10, 15] показывается, что для функции $f \in D$ справедливо представление

$$f(r,\omega) = f^-(r - t_1(r,-\omega)\omega,\omega)\exp\left(-\tau_1(r,\omega)\right) + \\ + \int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \exp\left(-\tau(r,\omega,t)\right)(\widehat{L}f)(r - t\omega,\omega)dt, \quad (13)$$

где $t_1(r,-\omega)$ есть расстояние от точки r в направлении $-\omega$ до границы множества G_0,

$$\tau(r,\omega,t) = \int\limits_0^t \widetilde{\mu}(r - t'\omega)dt'$$

и $\tau_1(r,\omega) = \tau(r,\omega,t_1(r,-\omega))$.

Используя представление (13), для функции $f \in D$ оценим норму $\|f\|_{G_0\times\Omega}$ через $\|f^-\|_{\Gamma_\gamma^-}$ и $\|\widehat{L}f/\mu\|_{G_0\times\Omega}$. Поскольку $\widetilde{\mu}(r) = \mu(r) + i\dfrac{\nu}{c(r)}$ и функция μ положительна, то

$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \le \left\| \|f^-\|_{\Gamma_\gamma^-} \exp\left(-\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \mu(r - t\omega)dt\right) + \right. \\ \left. + \left\|\frac{\widehat{L}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega} \int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu(r - t'\omega)dt'\right)\mu(r - t\omega)dt \right\|_{G_0\times\Omega} \le \\ \le \max\left\{\|f^-\|_{\Gamma_\gamma^-}, \left\|\frac{\widehat{L}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} \left\| \exp\left(-\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \mu(r - t\omega)dt\right) + \right. \\ \left. +1 - \exp\left(-\int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \mu(r - t\omega)dt\right) \right\|_{G_0\times\Omega} = \max\left\{\|f^-\|_{\Gamma_\gamma^-}, \left\|\frac{\widehat{L}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}. \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что если для любых двух решений $f_1, f_2 \in D$ уравнения (13) соответствующие f_1^-, f_2^- совпадают почти всюду на Γ_γ^-, то $f_1 = f_2$ почти везде в $G \times \Omega$.

На множестве D определим норму

$$\|f\|_D = \max\left\{\|f^-\|_{\Gamma_\gamma^-}, \left\|\frac{\widehat{L}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}. \quad (15)$$

Согласно (14),(15)

$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \le \|f\|_D, \quad (16)$$

и значит, из сходимости последовательности функций в норме пространства D следует сходимость в $L_\infty(G \times \Omega)$.

Так же, как и в [10], показывается полнота пространства D. Таким образом, пространство D с нормой (15) банахово.

3. Граничные условия. Постановка краевой задачи

Предполагается, что функция $\mu_s \geq 0$ почти всюду в G, а μ удовлетворяет (12). Кроме этого, $\widetilde{\mu}, \mu_s \in L_\infty(G)$, $J \in L_\infty(G \times \Omega)$. Индикатриса рассеяния S – неотрицательная, измеримая на $G \times [-1, 1]$ и удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega} S(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1 \tag{17}$$

почти при всех $r \in G$. Показатель преломления $\kappa(r)$ есть кусочно-постоянная функция в G, равная κ_l при $r \in G_l$, $l = 1, ..., p$.

Опишем граничные условия для уравнения (1). На границе области G задается входящее в среду излучение

$$f^-(z, \omega) = h(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^-, \tag{18}$$

где функция f^- определена соотношением (10) и $h(z, \omega) \in L_\infty(\Gamma^-)$, а на внутренней части границы множества G_0 ставятся условия сопряжения

$$f^-(z, \omega) = (\widehat{B} f^+)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \tag{19}$$

В (19) под символом $\widehat{B}$ будем подразумевать оператор сопряжения, связывающий предельные значения функции f на границе раздела γ. Будем предполагать, что $\widehat{B}$ является линейной комбинацией операторов сопряжения френелевского типа $\widehat{B}_{fr}$ и диффузного $\widehat{B}_d$, т.е.

$$(\widehat{B} f^+)(z, \omega) = \beta_{fr}(z, \omega)(\widehat{B}_{fr} f^+)(z, \omega) + \beta_d(z, \omega)(\widehat{B}_d f^+)(z, \omega). \tag{20}$$

Чтобы определить френелевский оператор сопряжения, нам понадобится ввести некоторые обозначения. Пусть z — точка гладкости γ и лежит на границе контакта двух областей G_l, G_j, $l < j$, $n(z)$ — единичный вектор внешней нормали в точке z. Как было оговорено ранее, $n(z)$ — внешняя нормаль к ∂G_j, поэтому

$$\kappa_l = \kappa(z + 0n(z)), \quad \kappa_j = \kappa(z - 0n(z)).$$

Учитывая это, определим функции

$$\widetilde{\kappa}(z, \zeta) = \begin{cases} \kappa_l / \kappa_j, & \text{если} \quad 0 < \zeta \leq 1, \\ \kappa_j / \kappa_l, & \text{если} \ -1 \leq \zeta < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z, \zeta) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\zeta) \sqrt{1 - \widetilde{\kappa}^2(z, \zeta)(1 - \zeta^2)}, & \text{если} \quad 1 - \widetilde{\kappa}^2(z, \zeta)(1 - \zeta^2) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\zeta(z) = n(z) \cdot \omega$. Далее там, где это не вызовет недоразумений, будем опускать зависимость от переменной z.

Оператор $\widehat{B}_{fr}$ задается формулой [10]

$$(\widehat{B}_{fr} f^+)(z, \omega) = R(z, \zeta) f^+(z, \omega_R) + T(z, \zeta) f^+(z, \omega_T), \tag{21}$$

где

$$\omega_R = \omega - 2\zeta n, \quad \omega_T = \psi(\zeta) n + \widetilde{\kappa}(\zeta)(\omega - \zeta n),$$

$$R(\zeta) = \frac{1}{2}(R_\parallel^2(\zeta) + R_\perp^2(\zeta)), \quad T(\zeta) = 1 - R(\zeta),$$

$$R_\parallel(\zeta) = \frac{\widetilde{\kappa}(\zeta)\psi(\zeta) - \zeta}{\widetilde{\kappa}(\zeta)\psi(\zeta) + \zeta}, \quad R_\perp(\zeta) = \frac{\psi(\zeta) - \widetilde{\kappa}(\zeta)\zeta}{\psi(\zeta) + \widetilde{\kappa}(\zeta)\zeta}.$$

Здесь ω_R(или ω_T) — направление потока излучения, падающего на поверхность ∂G_j и в результате зеркального отражения (или соответственно преломлению по закону Снеллиуса [16]) меняющего свое направление на ω. Все векторы $\omega, \omega_R, \omega_T$ лежат в одной плоскости. Коэффициенты R и T в (21) характеризуют отражательную и пропускательную способность границы раздела сред G_i и G_j при френелевском отражении (преломлении) для неполяризованного излучения [16].

Оператор $\widehat{B}_d$ в (20), описывающий диффузное отражение, имеет вид

$$(\widehat{B}_d f^+)(z,\omega) = \int\limits_{\Omega} S_d(z,\omega,\omega')f^+(z,\omega')d\omega', \tag{22}$$

где функция $S_d(z,\omega,\omega')$, называемая индикатрисой отражения, ограничена и измерима на $\gamma \times \Omega \times \Omega$ и удовлетворяет условию нормировки (17) почти для всех $(z,\omega) \in \gamma \times \Omega$.

Неотрицательные функции β_{fr}, β_d в (20) принадлежат $L_\infty(\gamma \times \Omega)$, удовлетворяют неравенству $\beta_{fr}(z,\omega) + \beta_d(z,\omega) \leq 1$ и определяют френелевскую и диффузную составляющие в отраженном свете.

Учитывая сформулированные ограничения на оператор сопряжения, покажем, что $\widehat{B}$: $L_\infty(\gamma) \to L_\infty(\gamma)$. Обозначим через $\widehat{S}$ оператор, действующий из $L_\infty(G_0 \times \Omega)$ в $L_\infty(G_0 \times \Omega)$ и определенный формулой

$$(\widehat{S}f)(r,\omega) = \mu_s(r) \int\limits_{\Omega} S(r,\omega \cdot \omega')f(r,\omega')d\omega'. \tag{23}$$

Теперь можно сформулировать определение решения.

Определение 3. *Решением краевой задачи (1), (18), (19) будем называть функцию $f \in D$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) почти всюду в $G \times \Omega$ уравнению (1)

$$\widehat{L}f = \widehat{S}f + J, \tag{24}$$

2) почти всюду на Γ^- граничному условию (18)

$$f^- = h, \tag{25}$$

3) почти всюду на $\gamma \times \Omega$ условию сопряжения (19)

$$f^- = \widehat{B}f^+. \tag{26}$$

4. Свойства решения краевой задачи

Учитывая, что для любой функции $f \in D$ справедливо представление (13), для решения уравнения (1) почти всюду в $G \times \Omega$ выполняется равенство

$$f(r,\omega) = f(r - t_1(r,-\omega)\omega + 0\omega, \omega) \exp\left(-\tau_1(r,\omega)\right) + \\ + \int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \exp\left(-\tau(r,\omega,t)\right)(\widehat{S}f + J)(r - t\omega, \omega)dt. \tag{27}$$

Доопределим функцию h нулем на множестве $\gamma \times \Omega$ и расширим область определения оператора сопряжения $\widehat{B}$ и область его значений на множество функций, заданных на всем Γ^-_γ, положив $\widehat{B}$ нулевым оператором на Γ^-. Введем оператор $\widehat{A}$, действующий по формуле

$$(\widehat{A}F)(r,\omega) = \int\limits_0^{t_1(r,-\omega)} \exp\left(-\tau(r,\omega,t)\right) F(r - t\omega, \omega) dt. \tag{28}$$

Заметим, что в силу сформулированных доопределений и результатов пункта 2 следует, что $\widehat{B} : L_\infty(\Gamma^+_\gamma)$ в $L_\infty(\Gamma^-_\gamma)$ и $\widehat{A} : L_\infty(G_0 \times \Omega) \to D(G_0 \times \Omega)$. Поэтому если $f \in D$ и $F \in L_\infty(G_0 \times \Omega)$, то $\widehat{B}f^+ \in L_\infty(\Gamma^-_\gamma)$ и $\widehat{B}(\widehat{A}F)^+ \in L_\infty(\Gamma^-_\gamma)$, так как следы $f^\pm$ функций из D принадлежат $L_\infty(\Gamma^\pm_\gamma)$.

Из соотношений (23)–(27) вытекает: f — решение краевой задачи тогда и только тогда, когда $f \in D$ удовлетворяет уравнению

$$f(r,\omega) = f_0(r,\omega) + (\widehat{T}f)(r,\omega) \tag{29}$$

почти всюду в $G \times \Omega$, где $(\widehat{T}f)(r,\omega) = (\widehat{B}f^+)\exp(-\tau_1(r,-\omega)) + (\widehat{A}\widehat{S}f)(r,\omega)$ и

$$f_0(r,\omega) = J_\Gamma(r - t_1(r,-\omega)\omega, \omega)\exp(-\tau_1(r,-\omega)) + (\widehat{A}J)(r,\omega). \tag{30}$$

Пусть

$$\lambda(r) = \frac{\mu_s(r)}{\mu(r)}, \quad \overline{\lambda} = \|\lambda(r)\|_G.$$

Функцию $\lambda(r)$ иногда называют альбедо однократного рассеяния [8].

Теорема 1. *Пусть $\overline{\lambda} < 1$ и $\|\widehat{B}\| < 1$, тогда существует единственное решение краевой задачи, удовлетворяющее почти всюду в $G \times \Omega$ неравенству*

$$|f(r,\omega)| \le \frac{\max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \left\|\dfrac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}}{1 - \max\{\|\widehat{B}\|, \overline{\lambda}\}}. \tag{31}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что при сформулированных условиях в классе D однозначно разрешимо уравнение (29). Если мы покажем, что норма оператора $\widehat{T}$, переводящего банахово пространство D в себя, меньше единицы, то отсюда немедленно будет следовать разрешимость краевой задачи и, кроме того, для решения задачи справедливо представление в виде ряда Неймана

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{T}^j f_0, \tag{32}$$

сходящегося в норме пространства D.

Оценим норму $\widehat{T}$ в пространстве D. Учитывая условие нормировки (17), для любой функции $f \in D$

$$\|\widehat{T}f\|_D = \max\left\{\|(\widehat{T}f)^-\|_{\Gamma^-_\gamma}, \left\|\frac{\widehat{L}\widehat{T}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} =$$

$$= \max\left\{\|\widehat{B}f^+\|_{\Gamma^-_\gamma}, \left\|\frac{\widehat{S}f}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} \le \max\left\{\|\widehat{B}\|, \overline{\lambda}\right\} \|f\|_{G_0\times\Omega}.$$

В силу оценки (16)
$$\|\widehat{T}f\|_D \le \max\left\{\|\widehat{B}\|, \overline{\lambda}\right\}\|f\|_D.$$
Так как $\overline{\lambda} < 1$ и $\|\widehat{B}\| < 1$, то $\|\widehat{T}\| < 1$.

Оценим норму f_0. Из (30) получаем оценку
$$\|f_0\|_{G_0\times\Omega} \le \max\left\{\|J_\Gamma\|_{\Gamma^-_\gamma}, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} = \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}.$$
Следовательно, почти всюду в $G\times\Omega$
$$|f(r,\omega)| \le \left\|\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{T}^j f_0\right\|_{G_0\times\Omega} \le \frac{\|f_0\|_{G_0\times\Omega}}{1-\|\widehat{T}\|} \le \frac{\max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}}{1-\max\{\|\widehat{B}\|,\overline{\lambda}\}}. \tag{33}$$

Для вещественного стационарного уравнения переноса с помощью так называемой теоремы сравнения [8, 10] грубую оценку (31) удается улучшить. А именно: для вещественного решения немодулированного уравнения переноса выполняется неравенство типа принципа максимума. Очевидно, что для комплексного уравнения (1) теорема сравнения неверна, поэтому мы, к сожалению, не можем применить схему, которая была реализована при исследовании уравнения переноса немодулированного излучения [10], для построения соответствующих оценок решения. Несмотря на это, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\overline{\lambda} < 1$ и $\|\widehat{B}\| < 1$, тогда для решения f краевой задачи (1),(18),(19) справедливо*
$$|f(r,\omega)| \le \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}(1-\overline{\lambda})^{-1}\right\} \tag{34}$$
почти всюду в $G\times\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — решение краевой задачи, тогда почти всюду справедливо уравнение (29). Следовательно,
$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \le \|J_\Gamma + \widehat{B}f^+\|_{\Gamma^-_\gamma}\exp\left(-\int_0^{t_1(r,-\omega)}\mu(r-t\omega)dt\right) +$$
$$+\left\|\frac{\widehat{S}f+J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\left(1-\exp\left(-\int_0^{t_1(r,-\omega)}\mu(r-t\omega)dt\right)\right) \le$$
$$\le \max\left\{\|h+\widehat{B}f^+\|_{\Gamma^-_\gamma}, \left\|\frac{\widehat{S}f+J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}. \tag{35}$$

Учитывая, что носители функций J_Γ и $\widehat{B}f^+$ не пересекаются и $\|\widehat{S}f/\mu\| < \overline{\lambda}\|f\|$, из (35) получаем
$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \le \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \|\widehat{B}f^+\|_{\Gamma^-_\gamma}, \overline{\lambda}\|f\|_{G_0\times\Omega} + \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \|\widehat{B}\|\|f\|_{G_0\times\Omega}, \overline{\lambda}\|f\|_{G_0\times\Omega} + \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\} \tag{36}$$

Поскольку $\|\widehat{B}\| < 1$, то неравенство $\|f\| \leq \|\widehat{B}\|\|f\|$ возможно только для нулевой функции, поэтому из (36) вытекает неравенство

$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \leq \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \overline{\lambda}\|f\|_{G_0\times\Omega} + \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}\right\}. \tag{37}$$

Следовательно,

$$\|f\|_{G_0\times\Omega} \leq \max\left\{\|h\|_{\Gamma^-}, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_{G_0\times\Omega}(1-\overline{\lambda})^{-1}\right\}. \tag{38}$$

Из последнего неравенства, в силу определения нормы в L_∞, вытекает утверждение теоремы.

В частности, из (38) при $J = 0$ вытекает неравенство $\|f\|_{G_0\times\Omega} \leq \|h\|_{\Gamma^-}$, означающее, что существенная верхняя грань модуля решения краевой задачи внутри области не превосходит его верхней грани на границе. Отметим, что ограничения на оператор сопряжения $\widehat{B}$ и альбедо однократного рассеяния λ в формулировке доказанной теоремы более сильные, чем в работе [10] ($\overline{\lambda} \leq 1$, $\|\widehat{B}\| \leq 1$). Естественно, что при строгих неравенствах $\overline{\lambda} < 1$, $\|\widehat{B}\| < 1$ приведенная в теореме 2 схема доказательства справедлива и для стационарного уравнения. Отметим также, что если в среде и на поверхности раздела излучение частично поглощается, т.е. $\mu_a(r) = \mu(r) - \mu_s(r) \geq \text{const} > 0$ и $\beta_{fr}(z,\omega) + \beta_d(z,\omega) \leq \text{const} < 1$, то выполнение вышеупомянутых строгих неравенств гарантировано.

Список литературы

1. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно - неоднородных средах. М.: Мир, 1981.

2. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.

3. *Тучин В.В.* Исследование биотканей методами светорассеяния. //Успехи физических наук. 1997. Т. 167. №5. С. 517–539.

4. *Arridge S.R.* Optical tomography in medical imaging. //Inverse Problems. 1999. Vol. 15. Issue 2. R41-R93.

5. *Ren K., Abdoulaev G.S., Bal G., Hielscher A.H.* Algorithm for solving the equation of radiative transfer in the frequency domain. //Optics Letters. 2004. Vol. 29. №6. P. 578–580.

6. *Ren K., Bal G., Hielscher A.* Frequency Domain Optical Tomography Based on the Equation of Radiative Transfer. //SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. Vol. 28. №4. P. 1463-1489.

7. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. //Тр.МИАН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.

8. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.:Наука. 1986.

9. *Прохоров И.В.* Краевая задача теории переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе. //Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. №6. С. 848–851.

10. *Прохоров И.В.* О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред. //Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. №6. С. 169–192.

11. *Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., and Krasnikova T.V.* An extremum problem for the radiation transfer equation. //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. T. 13. №4. P. 365–382.

12. *Прохоров И.В.* Определение поверхности раздела сред по данным томографического просвечивания. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. №10. С. 1542-1555.

13. *Прохоров И.В., Яровенко И.П.* Исследование задач оптической томографии методами теории переноса излучения. //Оптика и спектроскопия. 2006. Т. 101. №5. С. 817-824.

14. *Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., Nazarov V.G.* Optical tomography problems at layered media. //Inverse Problems. 2008. Vol. 24. Issue 2. 025019.

15. *Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E. and Prokhorov I.V.* Transport Equation and Tomography. VSP. Utrecht-Boston. 2002.

16. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.:Наука. 1973.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 06 мая 2009 г.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №09-01-98521), грантом конкурса Ведущих научных школ РФ (проект НШ-2810.2008.1) и грантами конкурса интеграционных проектов ДВО, СО и УрО РАН (№№09-II-СУ-001, 09-II-СО-004

Prokhorov I.V., Mun V.M. Boundary Value Problem for the Transfer Equation of Amplitude Modulated Radiation. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 150–160.

ABSTRACT

In the paper a class of solutions of the non-stationary radiative transfer equation with the harmonic time-dependence have been considered. In this class solubility of the boundary-value problem with generalized matching conditions on the interface are proved and estimations for the solutions are obtained.

Key words: *Key words: radiation transport theory, boundary value problems*