ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 161–167

УДК 515.122.7
MSC2000 18F10

© Е. Е. Скурихин*

Топологии Гротендика на частично упорядоченных множествах

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Доказывается обобщенная теорема Стоуна. Показывается, что произвольная топология Гротендика на частично упорядоченном множестве задается канонической топологией на подходящем фрейме.

Ключевые слова: *топология Гротендика, частично упорядоченное множество, предпучок множеств.*

Введение

Согласно стандартным определениям, понятие топологического пространства, или топологии, на множестве X сводится к заданию некоторого множества T подмножеств множества X, обладающего следующими свойствами: X и $\emptyset$ принадлежат T, объединение любого семейства и пересечение любого конечного семейства элементов T принадлежат T. Если T – топология, то подмножества X, принадлежащие T, называются открытыми.

Одно из достоинств этого понятия состоит в том, что оно позволяет формализовать свойства локальности. Например, некоторое свойство функций, заданных на открытых подмножествах топологического пространства X, можно назвать локальным, если ограничение всякой функции, обладающей этим свойством, также обладает им, и наоборот, если f – функция, заданная на множестве $U \in T$ и для всякой точки $x \in U$ имеется $V \in T$ такое, что $x \in V$ и $f|V$ обладает указанным свойством, то этим свойством обладает f. Последнее можно переформулировать так: если имеется открытое покрытие $\alpha = \{V_i \mid i \in I\}$ множества U и $f|V_i$ обладают рассматриваемым свойством, то и f им обладает.

Таким образом, можно сказать, что локальное свойство – это такое свойство, наличие которого "в малом" влечет за собой наличие его "в целом". При этом малость измеряется открытыми множествами. В связи с этим понятие топологического пространства корректирует интуицию, например, в контексте алгебраической геометрии. В топологии Зарисского открытые множества практически никогда не являются "малыми" и локальность там сильно отличается от локальности в эвклидовых пространствах.

Если обратиться к строгим определениям, то ясно, что понятие локальности в сформулированном выше смысле эквивалентно понятию пучка на топологическом пространстве. Не случайно теория пучков эффективно применяется в алгебраической геометрии и теории функций нескольких комплексных переменных, где в терминах пучковых когомологий формулируются достаточные условия существования глобальных объектов, обладающих определенными локальными свойствами.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `eesku@iam.dvo.ru`

Понятие локальности обобщается в терминах топологии Гротендика. Топология Гротендика τ на топологическом пространстве задается путем выделения класса покрытий из всех открытых покрытий всех открытых множеств. В связи с этим понятие локальности может быть заменено на более общее понятие τ-локальности. Таким образом появляется понятие τ-пучка, и, поскольку топология Гротендика может быть определена на произвольной категории, теория τ-пучков также развивается в общекатегорном контексте.

Возвращаясь к топологическим пространствам, отметим, что значительная часть результатов общей топологии может быть выведена из того факта, что множество T открытых множеств произвольного топологического пространства образует полную брауэрову решетку, или фрейм. Последнее означает, что что если рассматривать T как частично упорядоченное по включению множество, то любое семейство элементов имеет супремум (который совпадает с объединением) и инфимум (который равен внутренности пересечения) и выполняется следующее соотношение дистрибутивности:

$$(\vee\{U_i \mid i \in I\}) \wedge V = \vee\{U_i \wedge V \mid i \in I\},$$

где $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно супремум и инфимум в T (отметим, что двойственное соотношение в решетке открытых множеств, вообще говоря, не выполняется).

Таким образом, задать структуру полной брауэровой решетки на некотором множестве – это значит задать на нем структуру, близкую к топологической (“бесточечную топологическую структуру”), и располагать для ее изучения методами, которые разработаны для изучения топологических пространств, включая гомологические методы.

В работе [1] дано подробное определение категорного топологического пространства. Это понятие позволяет задавать на классе обобщенных подобъектов произвольного объекта произвольной категории бесточечную топологическую структуру, тесно связанную с заданной на этой категории топологией Гротендика.

В этой работе мы рассматриваем частично упорядоченные множества. Если трактовать их элементы как аналоги открытых подмножеств топологического пространства, то ясно, что они не обязательно образуют полную брауэрову решетку. Если же на частично упорядоченном множестве задана топология Гротендика, то, ассоциируя с данным множеством тем или иным способом категорное топологическое пространство, можем ли мы быть уверены, что изучаем именно исходное множество?

Относящиеся к этому вопросу результаты формулировались в некоторых работах автора и использовались в последующих работах, но их доказательств и даже подробных формулировок нет в журнальных публикациях, как и доказательства обобщенной теоремы Стоуна, служащей основой самого понятия категорного топологического пространства и ряда результатов теории пучковых когомологий. Здесь мы доказываем названную теорему, а также теорему о связи топологии Гротендика на частично упорядоченном множестве со структурой соответствующего категорного топологического пространства.

1. Обобщенная теорема Стоуна

Напомним некоторые определения и обозначения (подробности имеются в [1]).

Пусть K – категория. Предпучком множеств на K называется любой функтор $A : K^0 \to Sets$, то есть контравариантный функтор из K в категорию множеств. Гомоморфизмом предпучков $u : A \to B$ называется естественное преобразование функторов, то есть такая совокупность отображений $u(a) : A(a) \to B(a)$ $(a \in K)$, что если $f : a \to b$ – морфизм категории K, то $B(f) \circ u(b) = u(a) \circ A(f)$. Категория предпучков множеств K обозначается $\hat{K}$.

Предпучок множеств A называется подпредпучком предпучка B, если для любого $a \in K$, $A(a) \subset B(a)$ и совокупность отображений включения $A(a) \to B(a)$ является гомоморфизмом предпучков. Если D – предпучок множеств на категории K, то класс всех подпредпучков множеств D обозначается через K_D. Отметим, что отношение включения задает частичный порядок на K_D.

Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – предпучки множеств на K, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_i$ – подпредпучки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$ – L-подпредпучок $\mathcal{B}$, $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – гомоморфизм предпучков, то следующие соотношения определяют предпучки:

$u(\mathcal{A}_1)(k) = u(k)(\mathcal{A}_1(k)) \subset \mathcal{B}(k)$;

$u^{-1}(\mathcal{B}_1)(k) = u(k)^{-1}(\mathcal{B}_1(k)) \subset \mathcal{A}(k)$;

$\cap\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}(k) = \cap\{\mathcal{A}_i(k) \mid i \in I\}$;

$\cup\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}(k) = \cup\{\mathcal{A}_i(k) \mid i \in I\}$.

Обозначим через 1_K или 1 предпучок множеств, задаваемый с точностью до изоморфизма следующим условием: $1_K(a)$ – одноэлементное множество для любого $a \in K$. Еще один предпучок на K, обозначаемый $\emptyset$, задается равенством $\emptyset(a) = \emptyset$ $\forall a \in K$. Ясно, что для любого предпучка множеств A имеются единственные гомоморфизмы $A \to 1_K$ и $\emptyset \to A$. Говоря категорным языком, 1_K и $\emptyset$ являются соответственно финальным (терминальным) и инициальным объектами категории $\hat{K}$.

Пусть A – предпучок множеств на категории K. Любой элемент $s \in A(a)$ называется сечением предпучка A над a, а элемент $A(g)(s) \in A(b)$, где $g : b \to a$ – морфизм K, обозначается sg. Если же g – единственный морфизм $b \to a$, то пишем $A(g)(s) = s|b$ и говорим, что $s|b$ – это ограничение сечения s на b.

Если $\alpha = \{f_i : a_i \to a \mid i \in I\}$, $s \in A(a)$, то обозначаем $s|\alpha = \{sf_i \mid i \in I\}$. Семейство $\{s_i \in A(a_i) \mid i \in I\}$ называется α-согласованным, если $\forall i, j \in I$, $\forall b \in K$, $\forall u : b \to a_i, v : b \to a_j$ из того, что $f_i \circ u = f_j \circ v$ следует, что $s_i u = s_j v$. Совокупность всех α-согласованных семейств сечений предпучка A обозначается $H^0(\alpha, A)$. Ясно, что $(s|\alpha) \in H^0(\alpha, A)$, так что определено каноническое отображение $A(b) \to H^0(\alpha, A)$.

Пусть K – категория, $\alpha = \{f_i : a_i \to a \mid i \in I\}$ и $\beta = \{g_j : b_j \to a \mid j \in J\}$ – семейства морфизмов с общим концом. Говорят, что α вписано в β ($\alpha \prec \beta$), если существуют отображение $\varphi : I \to J$ и для каждого $i \in I$ морфизм $h_i : a_i \to b_{\varphi(i)}$ такие, что $g_{\varphi(i)} \circ h_i = f_i$.

Топологией Гротендика на категории K называется отображение τ, сопоставляющее каждому $a \in K$ категории K класс $\tau(a)$ семейств морфизмов с концом в a, удовлетворяющее следующим условиям:

($\tau 1$) *$\forall a \in K$, $\{1_a : a \to a\} \in \tau(a)$, где $1_a : a \to a$ – тождественный морфизм.*

($\tau 2$) Для любого $a \in K$, любого семейства $\alpha \in \tau(a)$ и любого морфизма $g : b \to a$ существует $\beta \in \tau(b)$ такое, что $g \circ \beta \prec \alpha$.

($\tau 3$) *Для любого $a \in K$ и любого семейства $\alpha = \{f_i : a_i \to a \mid i \in I\} \in \tau(a)$, если для каждого $i \in I$, $\{f_{ij} : a_{ij} \to a_i \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$, то $\{f_i \circ f_{ij} : a_{ij} \to a \mid i \in I, j \in J_i\} \in \tau(a)$.*

($\tau 4$) *Для любого $a \in K$, $\forall \alpha = \{f_i : a_i \to a \mid i \in I\}$, если существует $\beta \in \tau(a)$ такое, что $\beta \prec \alpha$, то $\alpha \in \tau(a)$.*

Пара (K, τ), где K – категория, а τ – топология Гротендика на K, называется сайтом.

Любое $\alpha \in \tau(a)$ называется τ-покрытием a.

Отметим, что из условий ($\tau 2$) и ($\tau 3$) следует ($\tau 5$).

($\tau 5$) *Если $\alpha, \beta \in \tau(a)$, то $\exists \gamma \in \tau(a)$ такое, что $\gamma \prec \alpha$, $\gamma \prec \beta$.*

Пусть (K, τ) – сайт, D – предпучок множеств на K, K_D – совокупность всех подпредпучков множеств предпучка D. Если $A \in K_D$, то определим τ-замыкание $[A]^D_\tau$ предпучка A в D, полагая $s \in [A]^D_\tau(a) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \tau(a)$ такое, что $s|\alpha \subset A$. Совокупность всех

τ-замкнутых (то есть совпадающих со своим τ-замыканием) подпредпучков D будем обозначать через $K_{D,\tau}$. Если $u : D \to E$ – гомоморфизм предпучков множеств на K, то через K_u будем обозначать совокупость всех подпредпучков D вида $u^{-1}(H)$, где H – подпредпучок E, а через $K_{u,\tau}$ – совокупость всех τ-замкнутых подпредпучков из K_u.

Теорема 1.1 (обобщенная теорема Стоуна). *Пусть K – категория, $u : D \to E$ – гомоморфизм предпучков множеств на K. Тогда*

1) *Каждое семейство $\{A_i \in K_{u,\tau} \mid i \in I\}$ имеет супремум $\vee$ и инфимум $\wedge$ в $K_{u,\tau}$, и для любого $B \in K_{u,\tau}$ выполняется следующее соотношение дистрибутивности:*

$$(*) \qquad \vee\{A_i \mid i \in I\}) \wedge B = \vee\{A_i \wedge B \mid i \in I\}$$

При этом $(\vee\{A_i \mid i \in I\} = [\cup\{A_i \mid i \in I\}]^D_\tau$, $(\wedge\{A_i \mid i \in I\} = \cap\{A_i \mid i \in I\}$.

2) *Если $K_{u,\tau}$ – множество, то оно является полной брауэровой решёткой (то есть является частично упорядоченным множеством, для которого выполняются условия пункта* 1)).

Доказательство базируется на свойствах τ-замыканий, перечисляемых в нижеследующей лемме.

Лемма 1.2 *Пусть K – категория, $u : D \to E$ – гомоморфизм предпучков множеств на K. Тогда*

1) *для любых $A, B \in K_D$*

(a) $A \subset [A]^D_\tau$;

(b) $A \subset [B]^D_\tau \Rightarrow [A]^D_\tau \subset [B]^D_\tau$;

(c) $A \subset B \Rightarrow [A]^D_\tau \subset [B]^D_\tau$;

(d) $[[A]^D_\tau]^D_\tau = [A]^D_\tau$;

(e) $[A \cap B] = [A] \cap [B]$;

2) *для любого $H \in K_E$,* $[u^{-1}(H)]^D_\tau = u^{-1}([H]^E_\tau)$.

Отметим, что в силу соотношения (d) пункта 1) $K_{D,\tau}$ состоит в точности из τ-замыканий подпредпучков D, а в силу пункта 2) $K_{u,\tau}$ состоит в точности из полных прообразов τ-замкнутых подпредпучков E.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы.

1) Для упрощения обозначений будем до конца доказательства данного пункта писать $[A]$ вместо $[A]^D_\tau$.

(a) Если $s \in A(a)$ и $\alpha = 1_k : k \to k$, то $\alpha \in \tau(k)$, и поэтому $s|\alpha = s \subset A$, а значит, $s \in [A](k)$.

(b) Пусть $s \in [A](a)$. Тогда для некоторого $\alpha = \{f_i : a_i \to a \mid i \in I\} \in \tau(a)$, $s|\alpha \subset A$, то есть $sf_i \in A(a_i)$, и значит, $sf_i \in [B](a_i)$. По определению τ-замыкания, имеется $\alpha_i = \{f_{ij} : a_{ij} \to a_i \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$ такое, что $(sf_i)|\alpha_i \subset B$. Поскольку $(sf_i)f_{ij} = s(f_i \circ f_{ij})$, то $s(f_i \circ f_{ij}) \in B(a_{ij})$. По свойству ($\tau$3) топологии Гротендика $\gamma = \{f_i \circ f_{ij} : a_{ij} \to a \mid i \in I, j \in J_i\} \in \tau(a)$, и поэтому $s|\gamma \subset B$, что и означает $s \in [B](a)$. Таким образом, $[A] \subset [B]$.

Условия (c) и (d) очевидным образом следуют из (a) и (b).

(e) Включение $[A \cap B] \subset [A] \cap [B]$ следует из (a). Наоборот, если $s \in ([A] \cap [B])(a)$, то $s \in [A](a)$ и $s \in [B](a)$, так что имеются такие $\alpha, \beta \in \tau(a)$, что $s|\alpha \subset A$, $s|\beta \subset B$. По свойству (τ5) топологий Гротендика, имеется такое $\gamma \in \tau(a)$, что $\gamma \prec \alpha$, $\gamma \prec \beta$. Поэтому $s|\gamma \subset A$, $s|\gamma \subset B$, откуда $s \in (A \cap B$. Обратное включение доказано.

2). $s \in u^{-1}([H]^E_\tau)(a) \Leftrightarrow u(s) \in [H]^E_\tau(a) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \tau(a) : u(s)|\alpha \subset H \Leftrightarrow \exists \alpha \in \tau(a) : u(s|\alpha) \subset H \Leftrightarrow \exists \alpha \in \tau(a) : (s|\alpha) \subset u^{-1}(H) \Leftrightarrow s \in [u^{-1}(H)]^D_\tau(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.1.

Как и выше, будем здесь сокращать обозначение $[A]^D_\tau$ до $[A]$.

Убедимся, что супремум $\vee$ в $K_{u,\tau}$ семейства $\alpha = \{A_i \in K_{D,\tau} \mid i \in I\}$ задается равенством $(\vee\{A_i \mid i \in I\} = [\cup\{A_i \mid i \in I\}]^D_\tau$. Из свойств полных прообразов следует, что $\cup\{A_i \mid i \in I\} \in K_u$, и значит, в силу леммы 1.2.2) $[\cup\{A_i \mid i \in I\}] \in K_{u,\tau}$. Из свойства (a) τ-замыканий следует, что $[\cup\{A_i \mid i \in I\}]$ является верхней гранью α в $K_{u,\tau}$. Пусть $C \in K_{u,\tau}$ — верхняя грань семейства α, то есть $A_i \subset C = [C]$. Тогда $\cup\{A_i \mid i \in I\} \subset [C]$ и по свойству (b) $[\cup\{A_i \mid i \in I\}]^D_\tau \subset [C] = C$. Таким образом, $[\cup\{A_i \mid i \in I\}]$ – точная верхняя грань α в $K_{u,\tau}$.

Убедимся, что инфимум $\wedge$ в $K_{D,\tau}$ семейства α задается равенством $\wedge\{A_i \mid i \in I\} = \cap\{A_i \mid i \in I\}$. Из свойств полных прообразов следует, что предпучок $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ принадлежит K_u, и значит, достаточно доказать, что он τ-замкнут в D, то есть $[\cap\{A_i \mid i \in I\}]$=$\cap\{A_i \mid i \in I\}$. Очевидно, $\cap\{A_i \mid i \in I\} \subset A_j = [A_j]$, следовательно, по свойству (b) $[\cap\{A_i \mid i \in I\}] \subset A_j$, и значит, $[\cap\{A_i \mid i \in I\}] \subset \cap\{A_i \mid i \in I\}$. По свойству (a) имеется обратное включение, откуда получаем требуемое равенство.

Проверим равенство $(*)$. Так как $\cup$ и $\cap$ предпучков определяются через соответствующие операции над множествами, то

$$(\cup\{A_i \mid i \in I\}) \cap B = \cup\{A_i \cap B \mid i \in I\}$$

Переходя к τ-замыканиям, получаем

$\vee\{A_i \wedge B \mid i \in I\}$=$[\cup\{A_i \cap B \mid i \in I\}]$=$[(\cup\{A_i \mid i \in I\}) \cap B]$. Последнее выражение равняется, в силу (c), $[(\cup\{A_i \mid i \in I\})] \cap B$=$(\vee\{A_i \mid i \in I\}) \cap B$=$(\vee\{A_i \mid i \in I\}) \wedge B$.

Замечание. Общие свойства операторов замыкания, то есть отображений, удовлетворяющих условиям (a) и(b) леммы 1.2, описаны, например, в [2].

2. Топологии Гротендика на частично упорядоченных множествах

Если K – частично упорядоченное множество, то его можно рассматривать как категорию. При этом объектами считаются элементы K, а множество морфизмов $Hom_K(a, b)$ состоит из одного элемента, если $a \leq b$, и пусто в противном случае. Таким образом, морфизм $f : a \to b$ можно отождествлять с соотношением $a \leq b$.

Определение топологии Гротендика поэтому переписывается для частично упорядоченных множеств так.

Лемма 2.1 *Пусть K – частично упорядоченное множество. Отображение τ, сопоставляющее каждому $a \in K$ класс $\tau(a)$ семейств элементов $\leq a$, является топологией Гротендика на K тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$(\tau 1)$ для любого $a \in K$, $\{a\} \in \tau(a)$;

$(\tau 2)$ для любых $a \in K$, $\alpha \in \tau(a)$, $b \leq a$, существует $\beta \in \tau(b)$ такое, что $\beta \prec \alpha$;

$(\tau 3)$ *для любых $a \in K$, $\alpha = \{a_i \mid i \in I\} \in \tau(a)$, если для каждого $i \in I$ $\{a_{ij} \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$, то $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J_i\} \in \tau(a)$;*

$(\tau 4)$ *для любых $\forall a \in K$, $\forall \alpha = \{a_i \leq a \mid i \in I\}$, если имеется $\beta \in \tau(a)$ такое, что $\beta \prec \alpha$, то $\alpha \in \tau(a)$.*

Определение 2.2. *Пусть K – частично упорядоченное множество, $\alpha = \{k_i \in K \mid i \in I\}$. Предпучком R_α, порожденным семейством α, называется подпредпучок $1 = 1_K$, задаваемый так: $R_\alpha(k) = 1(k)$, если $\{k\} \prec \alpha$, и $R_\alpha(k) = \emptyset$ — в противном случае. Предпучок, порожденный одноэлементным семейством $\{k\}$, обозначается $j(k)$. Таким образом, $j(a)(k) = 1(k)$, если $k \leq a$, и $j(a)(k) = \emptyset$ — в противном случае. Наконец, через $j_\tau(k)$ обозначаем $[j(k)]^1_\tau$. Будем рассматривать j и j_τ как отображения: $j : K \to K_1$, $j_\tau : K \to K_{1,\tau}$.*

Согласно теореме 1.1, частично упорядоченное по включению множество $K_{1,\tau}$ τ-замкнутых подпредпучков предпучка $1 = 1_K$ является полной брауэровой решеткой.

Теорема 2.3. *Пусть K – частично упорядоченное множество, $\alpha = \{k_i \in K \mid i \in I, k_i \leq k\}$. Тогда*

$$\alpha \in \tau(k) \Leftrightarrow \vee\{j_\tau(k_i) \mid i \in I\} = j_\tau(k)$$

Для доказательства нам понадобятся некоторые свойства отображений j и j_τ.

Лемма 2.4. *Пусть K – частично упорядоченное множество, τ – топология Гротендика на K.*

1) *Отображения $j : K \to K_1$ и $j_\tau : K \to K_{1,\tau}$ являются гомоморфизмами частично упорядоченных множеств, если считать K_1 и $K_{1,\tau}$ упорядоченными по включению. Точнее:*

a) *$l \leq k \Leftrightarrow j(l) \subset j(k) \Leftrightarrow j(k)(l) \neq \emptyset$, так что $j(k) = j(l) \Leftrightarrow k = l$;*

b) *$l \leq k \Rightarrow j_\tau(l) \subset j_\tau(k)$.*

2) *Пусть $B \in K_1$. Тогда*

a) *$B(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow j(k) \subset B$, так что $B = \cup\{j(k) \mid B(k) \neq \emptyset\}$ и $[B]_\tau = \vee\{j_\tau(k) \mid B(k) \neq \emptyset\}$. Если же $B \in K_{1,\tau}$, то $B(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow j_\tau(k) \subset B$;*

b) *$[B]_\tau(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\alpha = \{k_i \mid i \in I\} \in \tau(k)$: $\forall i \in I$ $B(k_i) \neq \emptyset$;*

c) *если $B, C \in K_1$, то $B(k) \subset C(k) \Leftrightarrow (B(k) \neq \emptyset \Rightarrow C(k) \neq \emptyset)$, и значит $(B \subset C) \Leftrightarrow \forall k \in K$ $(B(k) \neq \emptyset \Rightarrow C(k) \neq \emptyset)$.*

В частности, $B = C \Leftrightarrow \forall k \in K$ $(B(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow C(k) \neq \emptyset)$.

3) *$j(\wedge\{k_i \mid i \in I\}) = \cap\{j(k_i) \mid i \in I\}$. Наоборот, если $\cap\{j(k_i) \mid i \in I\} = j(k)$, то $\wedge\{k_i \mid i \in I\}$ существует и равен k.*

4) *$j_\tau(\wedge\{k_i \mid i \in I\}) = \cap\{j_\tau(k_i) \mid i \in I\}$, если I – конечное множество.*

5) *Если $\alpha = \{k_i \in K \mid i \in I\}$, то $R_\alpha = \cup\{j(k_i) \mid i \in I\}$.*

Доказательство.

2)c) Прямо следует из того, что $B(k)$ и $C(k)$ не более чем одноэлементны и лежат в одноэлементном множестве $1(k)$.

a) Пусть $B(k) \neq \emptyset$. Если $l \leq k$, то $B(l) \neq \emptyset$ и значит $j(k)(l) \subset 1(l) = B(l)$, что и влечет за собой $j(k) \subset B$. Наоборот, если $j(k) \subset B$, то $1(k) = j(k)(k) \subset B(k)$, так что $B(k) \neq \emptyset$.

Из доказанного прямо следует, что $\cup\{j(k) \mid B(k) \neq \emptyset\} \subset B$. Наоборот, если $B(l) \neq \emptyset$, то $(\cup\{j(k) \mid B(k) \neq \emptyset\})(l) \supset j(l)(l) \neq \emptyset$ и, по c), $B \subset \cup\{j(k) \mid B(k) \neq \emptyset\}$.

Остальное следует из свойства (b) τ-замыканий (лемма 1.2.).

b) ($\Rightarrow$) Прямо следует из определения τ-замыкания.

($\Leftarrow$) Пусть $s \in 1(k)$. Тогда $s \mid k_i \in 1(k_i) = B(k_i)$, и значит, $s \in [B]_\tau(k)$, откуда $[B]_\tau(k) \neq \emptyset$.

1)a) По определению j, $l \leq k \Leftrightarrow j(k)(l) \neq \emptyset$, а по 2)a)
$j(l) \subset j(k) \Leftrightarrow j(k)(l) \neq \emptyset$.

b) Прямо следует из a) и монотонности τ-замыкания.

3) Пусть $k = \wedge\{k_i \mid i \in I\}$. Ясно, что $j(k) \subset \cap\{j(k_i) \mid i \in I\}$. Пусть $j(k)(l) \neq \emptyset$. Тогда $j(k_i)(l) \neq \emptyset$, и значит, $l \leq k_i$, так что $l \leq k$, откуда $j(k)(l) \neq \emptyset$. По 2)c) $j(k) \supset \cap\{j(k_i) \mid i \in I\}$.

Пусть теперь $k \in K$ и $\cap\{j(k_i) \mid i \in I\} = j(k)$. Тогда $j(k) \subset j(k_i)$, и значит, $k \leq k_i$. Если $l \leq k_i$, то $j(l) \leq j(k_i)$, значит, $j(l) \subset \cap\{j(k_i) \mid i \in I\} = j(k)$, откуда $l \leq k$. Таким образом, $k = \wedge\{k_i \mid i \in I\}$.

4) Следует из 3) и свойства (e) τ-замыканий (лемма 1.2).

5) По определению R_α, $R_\alpha(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \{k\} \prec \alpha$, то есть по 1)a) $\Leftrightarrow$ имеется $i \in I$ такое, что $j(k_i)(k) \neq \emptyset$, и значит, $\Leftrightarrow \cup\{j(k_i) \mid i \in I\}(k) \neq \emptyset$. По 2)c) это влечет равенство $R_\alpha = \cup\{j(k_i) \mid i \in I\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.3.

Докажем сначала, что $[R_\alpha]^1_\tau = \vee\{j_\tau(k_i) \mid i \in I\}$. По лемме 2.4.5), $[R_\alpha]^1_\tau = [\cup\{j(k_i) \mid i \in I\}]^1_\tau$. По свойствам τ-замыканий (лемма 1.2), $[\cup\{j(k_i) \mid i \in I\}]^1_\tau = [\cup\{j_\tau(k_i) \mid i \in I\}]^1_\tau = \vee\{j_\tau(k_i) \mid i \in I\}$.

Таким образом, нужно доказать, что

$\alpha = \{k_i \leq k \mid i \in I\} \in \tau(k) \Leftrightarrow [R_\alpha]^1_\tau = j_\tau(k)$.

($\Rightarrow$) Покажем, что $[R_\alpha]^1_\tau \supset j(k)$. По лемме 2.4.2)a) достаточно доказать, что $[R_\alpha]^1_\tau(k) \neq \emptyset$. Пусть $s \in j(k)(k)$. Тогда $(s|k_i) \in j(k)(k_i) = 1(k_i) = j(k_i)(k_i) = R_\alpha(k_i)$, и так как $\alpha \in \tau(k)$, то $s \in [R_\alpha]_\tau(k)$. По свойствам τ-замыканий отсюда следует, что $[R_\alpha]^1_\tau \supset [j(k)]^1_\tau = j_\tau(k)$. Так как $j(k_i) \subset j(k)$, то $[R_\alpha]^1_\tau \subset [j(k)]^1_\tau = j_\tau(k)$. Таким образом, $[R_\alpha]^1_\tau = j_\tau(k)$.

($\Leftarrow$) Пусть $s \in j(k)(k)$. Так как $[R_\alpha]^1_\tau \supset j(k)$, то $\exists\beta = \{b_j \mid j \in J\} \in \tau(k)$ такое, что $s|\beta \subset R_\alpha$, то есть $(s|b_j) \in R_\alpha(b_j) = (\cup\{j(k_i)(b_j) \mid i \in I\})$. Таким образом, для любого $j \in J$ имеется $i \in I$ такое, что $j(k_i)(b_j) \neq \emptyset$, то есть $b_j \leq k_i$, откуда $\beta \prec \alpha$. По аксиоме ($\tau 2$), $\alpha \in \tau(k)$.

Список литературы

1. *Скурихин Е.Е.* Категорные топологические пространства и размерности // Дальневосточный Математический журнал. 2008. Т.8. №1. С. 98–111.

2. *Кон П.* Универсальная алгебра. М: Мир, 1968. 352 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН 09-1-ОМН-06 и гранта НШ 2810.2008.1.

Skurikhin E.E. Grothendieck topologies on posets. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 161–167.

ABSTRACT

In this paper we study of Grothendieck topology on posets with the help of the concept of categorical topological space.

Key words: *Grothendieck topology, poset, presheaf of sets.*