

© Д.А. Терешко\*

## Численное решение задач управления для стационарной модели тепловой конвекции

*Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием*

Предлагается численный алгоритм решения задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции, основанный на использовании метода Ньютона для решения нелинейных соотношений, представляющих собой необходимые условия экстремума первого порядка. Этот алгоритм применяется для получения безотрывного режима обтекания двух круговых цилиндров в канале за счет нагрева и охлаждения определенных участков границы.

Ключевые слова: *тепловая конвекция, задачи управления, численное решение*

### 1. Введение

Интерес к задачам управления для различных моделей гидродинамики вызван наличием актуальных приложений в авиа- и судостроении, промышленном производстве, охране окружающей среды и других областях. За последние двадцать лет вышло большое число публикаций, посвященных теоретическому исследованию задач управления для стационарных моделей гидродинамики и тепловой конвекции (см, например, [1, 2, 3, 6, 4, 5, 7, 8]). В этих работах исследована разрешимость экстремальных задач, выведены и исследованы системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. В некоторых частных случаях на основе анализа системы оптимальности установлены достаточные условия единственности и устойчивости решений задач управления.

При этом следует отметить, что опубликовано очень мало работ, посвященных численному решению задач управления для стационарных моделей гидродинамики вязкой жидкости (см [9, 10, 11, 12]). Это объясняется тем, что в рассматриваемых задачах условной минимизации в качестве ограничений выступают системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа систем уравнений Навье – Стокса. Поэтому при численном решении указанных задач возникает ряд трудностей, связанных, например, с построением сеток в сложных областях, с аппроксимацией дифференциальных уравнений, с решением нелинейных систем и т.п. Дополнительные вычислительные проблемы вносят специфические особенности самих экстремальных задач. Все это приводит к тому, что возникают новые идеи и подходы, ориентированные на практическую реализацию с использованием доступных вычислительных средств.

Одна из наиболее актуальных задач управления в гидродинамике связана с минимизацией силы сопротивления, действующей на тело со стороны вязкой жидкости. При определенных режимах обтекания за телом образуется отрывная зона, что приводит к увеличению

\* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: [ter@iam.dvo.ru](mailto:ter@iam.dvo.ru)

силы сопротивления. В процессе решения задачи минимизации находятся значения управлений, обеспечивающие безотрывное обтекание тела. При численном решении таких задач обычно рассматривается наиболее простой случай, когда в качестве математической модели используются уравнения Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости без учета силы тяжести и тепловых эффектов, роль управления играет вектор скорости на части границы, а область течения имеет относительно простой вид (см, например, [12]). Вопросы практической значимости полученных решений и поиски других типов управлений приводят к необходимости рассматривать более сложные математические модели динамики вязкой жидкости.

Наша работа посвящена численному решению задачи управления для модели тепловой конвекции в приближении Обербека – Буссинеска, когда роль управления играет поток тепла через часть границы области течения. В статье выводятся необходимые условия экстремума первого порядка, для решения которых предлагается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона. Эффективность предложенного алгоритма проверяется на примере минимизации  $\mathbf{L}^2$ -нормы отклонения вектора скорости от заданного безвихревого векторного поля для задачи обтекания двух круговых цилиндров плоским потоком вязкой жидкости в канале.

Ниже в качестве математической модели динамики вязкой теплопроводной жидкости будем рассматривать следующие соотношения:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} + \text{grad } p = (1 - \beta T) \mathbf{G}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$-\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \text{grad } T = f \text{ в } \Omega, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda \partial T / \partial n|_{\Gamma_N} = \chi. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей —  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ ,  $\mathbf{u}$  и  $T$  — скорость и температура,  $p = P/\rho$ , где  $P$  — давление,  $\rho = \text{const}$  — плотность среды,  $\nu > 0$ ,  $\lambda > 0$  — постоянные коэффициенты кинематической вязкости и температуроводности,  $f$  — объемная плотность источников тепла,  $\mathbf{G}$  — вектор ускорения свободного падения,  $\beta$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\psi$  и  $\chi$  — некоторые функции.

При математической формулировке задач управления будем использовать пространства Соболева  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  и  $L^2(D)$ , где  $D$  представляет собой область  $\Omega$  либо границу  $\Gamma$  или ее некоторую часть  $\Gamma_0$ . Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через  $\mathbf{H}^s(D)$  и  $\mathbf{L}^2(D)$ . Скалярные произведения в  $L^2(\Omega)$  либо в  $L^2(\Gamma_N)$  будем обозначать через  $(\cdot, \cdot)$  либо  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$ , норму в  $L^2(\Omega)$  либо в  $L^2(\Gamma_N)$  — через  $\|\cdot\|$  либо  $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ , норму в  $H^1(\Omega)$  и  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  — через  $\|\cdot\|_1$ , норму в  $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$  либо в  $H^{1/2}(\Gamma_N)$  — через  $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma}$  либо  $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_N}$ , отношение двойственности — через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Положим  $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p, 1) = 0\}$ ,  $\mathcal{T} = H^1(\Omega, \Gamma_D) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S|_{\Gamma_D} = 0\}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) : (\mathbf{g}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(i)}} = 0, i = 1, 2, \dots, N, \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$ .

Пусть выполняются условия:

(i)  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma \in C^{0,1}$ , состоящей из  $N$  связанных компонент  $\Gamma^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $\Gamma_D \in C^{0,1}$ ,  $\text{meas } \Gamma_D > 0$ ,  $\Gamma_N \in C^{0,1}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ ;

(ii)  $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ;

(iii)  $\chi \in L^2(\Gamma_N)$ .

Разобьем множество всех исходных данных задачи (1), (2) на две группы: группу управлений, куда внесем функцию  $\chi$ , и группу фиксированных данных, куда внесем неизменяемые ниже функции  $\beta$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $f$  и  $\psi$ . Положим  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, T)$ . Будем считать, что управление  $\chi$  может изменяться на множестве  $K = L^2(\Gamma_N)$ .

Полагая  $X = \mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ,  $Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ , введем оператор  $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) : X \times K \rightarrow Y$ , где

$$\langle F_1(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\text{div } \mathbf{v}, p) - ((1 - \beta T) \mathbf{G}, \mathbf{v}),$$

$$\begin{aligned} \langle F_4(\mathbf{x}, \chi), S \rangle &= \lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N}, \\ \langle F_2(\mathbf{x}), q \rangle &= (\operatorname{div} \mathbf{u}, q), \quad F_3(\mathbf{x}) = \mathbf{u}|_{\Gamma} - \mathbf{g}, \quad F_5(\mathbf{x}) = T|_{\Gamma_D} - \psi. \end{aligned}$$

Умножая уравнения в (1), (2) на тестовые функции и интегрируя, стандартным образом приходим к слабой формулировке задачи (1), (2). Она заключается в нахождении такой тройки  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, T) \in X$ , что

$$F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0. \quad (3)$$

Хорошо известно (см [8]), что при выполнении условий (i), (ii) для любого элемента  $\chi \in L^2(\Gamma_N)$  существует решение  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, T) \in X$  задачи (3) и справедливы оценки  $\|\mathbf{u}\|_1 \leq M_{\mathbf{u}}$ ,  $\|p\| \leq M_p$ ,  $\|T\|_1 \leq M_T$ . Здесь  $M_{\mathbf{u}}$ ,  $M_p$  и  $M_T$  – неубывающие непрерывные функции норм  $\|\beta\|$ ,  $\|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}$ ,  $\|f\|$ ,  $\|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}$ ,  $\|\chi\|_{\Gamma_N}$ .

## 2. Система оптимальности

Сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\mathbf{x}, \chi) \equiv \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \chi) = 0, \quad (\mathbf{x}, \chi) \in X \times L^2(\Gamma_N). \quad (4)$$

Здесь  $\mu > 0$  – параметр регуляризации, заданная вектор-функция  $\mathbf{u}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  играет роль измеренного либо желаемого поля скоростей в области  $\Omega$ .

Введем сопряженное состояние  $\mathbf{y}^* = (\xi, \sigma, \zeta, \theta, \zeta_1) \in Y^*$ , где функции  $\xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $\sigma \in L_0^2(\Omega)$  и  $\theta \in \mathcal{T}$  имеют смысл сопряженных скорости, давления и температуры, и лагранжиан  $\mathcal{L}$  формулой  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \chi, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, \chi) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, \chi) \rangle$ . Дифференцируя лагранжиан по сопряженному состоянию  $\mathbf{y}^*$ , исходному состоянию  $\mathbf{x}$ , управлению  $\chi$  и приравнивая эти производные к нулю, получаем следующие необходимые условия оптимальности первого порядка в точке экстремума  $(\mathbf{u}, p, T, \chi)$ :

$$F(\mathbf{x}, \chi) = 0, \quad F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \chi)^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \chi) = 0, \quad F'_{\chi}(\mathbf{x}, \chi)^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_{\chi}(\mathbf{x}, \chi) = 0. \quad (5)$$

Соотношения (5) представляют собой систему оптимальности для задачи (4), которые можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall S \in \mathcal{T}, \quad (6)$$

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + ((1 - \beta T) \mathbf{G}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \xi) + \\ &+ (\mathbf{w} \cdot \nabla T, \theta) + (\sigma, \operatorname{div} \mathbf{w}) + \lambda_0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda(\nabla h, \nabla \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla h, \theta) + (\beta h \mathbf{G}, \xi) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{T}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \xi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \xi = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma, \quad \theta = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad (11)$$

$$(\lambda_0 \mu \chi - \theta, \phi)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall \phi \in L^2(\Gamma_N).$$

Далее будем предполагать, что множитель Лагранжа  $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$  является регулярным (см об этом подробнее в [5, 8]). Тогда можно положить  $\lambda_0$  равным единице и выразить из последнего равенства управление  $\chi$  по формуле  $\chi = \theta/\mu$ . Подставив это выражение в (6), получаем

$$\lambda(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) - (f, S) - (1/\mu)(\theta, S)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall S \in \mathcal{T}. \quad (12)$$

Таким образом мы исключили управление  $\chi$  из системы оптимальности и получили новую нелинейную задачу (7)–(12) для исходного и сопряженного состояний, которую для краткости будем записывать в виде операторного уравнения

$$\Phi(\mathbf{u}, p, T, \xi, \sigma, \theta) = 0. \quad (13)$$

### 3. Численный алгоритм

С учетом нелинейности оператора  $\Phi$  для численного решения полученного уравнения предлагается итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона. Он состоит из следующих этапов:

0. выбираем начальное приближение  $\mathbf{u}_0, p_0, T_0, \xi_0, \sigma_0, \theta_0$ , полагаем  $n = 0$ ;
1. вычисляем  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\theta})$  как решение линейного операторного уравнения

$$\Phi'(\mathbf{u}_n, p_n, T_n, \xi_n, \sigma_n, \theta_n)(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}, \tilde{\theta}) = -\Phi(\mathbf{u}_n, p_n, T_n, \xi_n, \sigma_n, \theta_n),$$

имеющего в подробной записи вид следующей краевой задачи для системы линейных уравнений в частных производных относительно  $\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{T}, \tilde{\xi}, \tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - (\tilde{p}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\beta \tilde{T} \mathbf{G}, \mathbf{v}) + \\ & + \nu(\nabla \mathbf{u}_n, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}) - (p_n, \operatorname{div} \mathbf{v}) + ((1 - \beta T_n) \mathbf{G}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ & \lambda(\nabla \tilde{T}, \nabla S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla T_n, S) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla \tilde{T}, S) - (1/\mu)(\tilde{\theta}, S)_{\Gamma_N} + \\ & + \lambda(\nabla T_n, \nabla S) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla T_n, S) - (f, S) - (1/\mu)(\theta_n, S)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall S \in \mathcal{T}, \\ & \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \tilde{\xi}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{w}, \tilde{\xi}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \xi_n) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \tilde{\xi}) + \\ & + (\mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{T}, \theta_n) + (\mathbf{w} \cdot \nabla T_n, \tilde{\theta}) + (\tilde{\sigma}, \operatorname{div} \mathbf{w}) + \mu_0(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + \\ & + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \xi_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{w}, \xi_n) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \xi_n) + \\ & + (\mathbf{w} \cdot \nabla T_n, \theta_n) + (\sigma_n, \operatorname{div} \mathbf{w}) + \mu_0(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ & \lambda(\nabla h, \nabla \tilde{\theta}) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla h, \theta_n) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla h, \tilde{\theta}) + (\beta h \mathbf{G}, \tilde{\xi}) + \\ & + \lambda(\nabla h, \nabla \theta_n) + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla h, \theta_n) + (\beta h \mathbf{G}, \xi_n) = 0 \quad \forall h \in H^1(\Omega; \Gamma_D), \\ & \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_n \text{ в } \Omega, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g} - \mathbf{u}_n \text{ на } \Gamma, \quad \tilde{T} = \psi - T_n \text{ на } \Gamma_D, \\ & \operatorname{div} \tilde{\xi} = -\operatorname{div} \xi_n \text{ в } \Omega, \quad \tilde{\xi} = -\xi_n \text{ на } \Gamma, \quad \tilde{\theta} = -\theta_n \text{ на } \Gamma_D; \end{aligned} \tag{14}$$

2. пересчитываем значения искомых величин по формулам  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tilde{\mathbf{u}}, p_{n+1} = p_n + \tilde{p}, T_{n+1} = T_n + \tilde{T}, \xi_{n+1} = \xi_n + \tilde{\xi}, \sigma_{n+1} = \sigma_n + \tilde{\sigma}, \theta_{n+1} = \theta_n + \tilde{\theta}$ ;

3. проверяем условие выхода из цикла. Если оно не выполняется, то увеличиваем номер шага  $n$  на 1 и переходим к этапу 1.

При проведении вычислительных экспериментов роль условия выхода из цикла играло неравенство  $\|T_{n+1} - T_n\| < 10^{-6}$ . Для численного решения системы (14) методом конечных элементов использовался свободно распространяемый пакет программ freeFEM++ ([www.freefem.org](http://www.freefem.org)).

### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Обсудим кратко результаты вычислительных экспериментов на примере задачи обтекания двух круговых цилиндров плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости в канале. На рис. 1 представлены линии тока течения, полученного путем решения двумерной краевой задачи

$$-(1/\operatorname{Re}) \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{15}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_1(y), \quad (1/\operatorname{Re}) \partial \mathbf{u} / \partial n - p \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0} \tag{16}$$

для безразмерных уравнений Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы тяжести в случае, когда число Рейнольдса  $\operatorname{Re} = 100$ . Граничные условия (16) отвечают заданию параболического профиля  $\mathbf{g}_1(y) = \{y(3-y), 0\}$  для скорости на участке втекания  $\Gamma_1$ ,

условий прилипания на жестких границах  $\Gamma_0$  (поверхностях цилиндров и боковых стенках канала) и “естественного” краевого условия  $(1/\text{Re})\partial\mathbf{u}/\partial n - p\mathbf{n} = \mathbf{0}$  на участке вытекания  $\Gamma_2$ . Последнее условие использовалось, в частности, в работах [19, 20], посвященных исследованию экстремальных задач для стационарных уравнений Навье – Стокса, в которых роль управления играет функция  $\mathbf{g}$  в (2) либо плотность внешних сил.

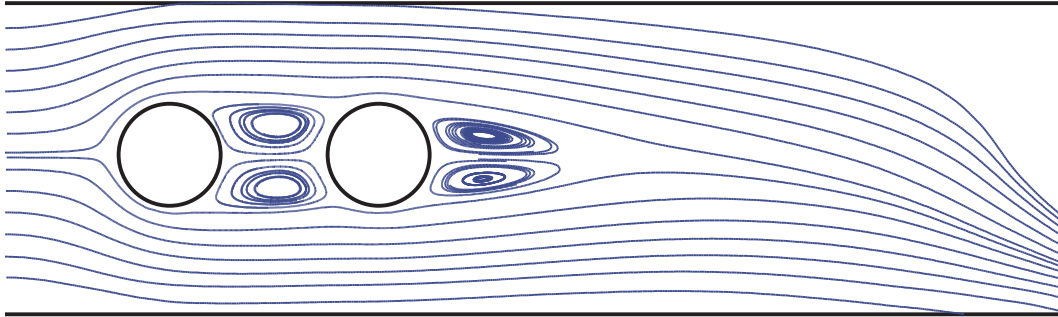


Рис. 1. Неуправляемое течение ( $\text{Re}=100$ )

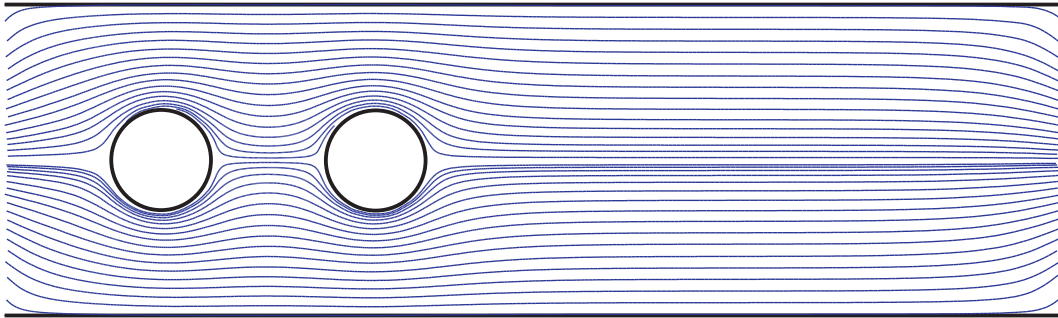


Рис. 2. Безвихревое течение  $\mathbf{u}_d$

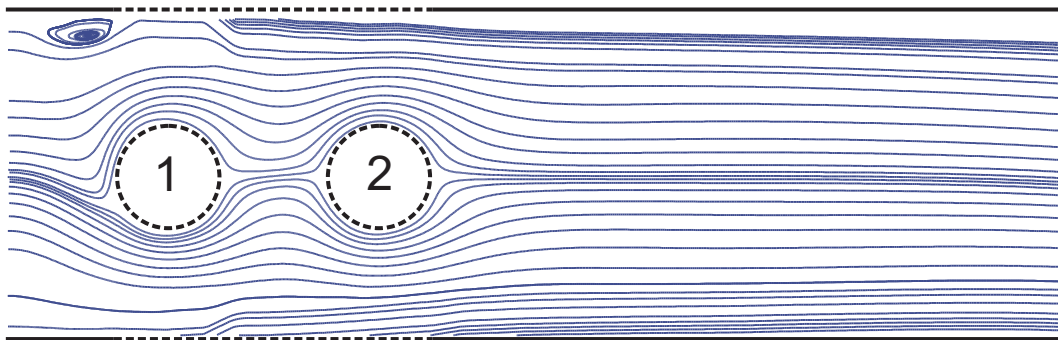


Рис. 3. Управляемое течение ( $\text{Re}=100, \text{Ra}=10^5$ )

Из рис. 1 видно, что за цилиндрами образуются отрывные зоны. Для того, чтобы уменьшить или полностью устранить эти зоны, решим задачу минимизации (4), где  $\mathbf{u}_d$  — заданный вектор скорости с нулевой завихренностью (см соответствующие линии тока на рис. 2), а роль ограничения  $F(\mathbf{x}, u) = 0$  играет слабая формулировка безразмерного аналога полной модели (1), (2) при граничных условиях (16) для скорости и условия  $T = 0$  на  $\Gamma_D \equiv \Gamma_1$  для температуры. На рис. 3 показаны линии тока течения, полученного в результате решения задачи при параметре регуляризации  $\mu = 10^{-5}$ , числе Рейнольдса  $\text{Re} = 100$  и числе Рэлея  $\text{Ra} = 10^5$  в случае, когда управление достигается за счет выбора теплового потока  $\chi$

на поверхности цилиндров и на близлежащих участках стенок канала, отмеченных штрихпунктирными линиями. На оставшихся частях стенок канала и на участке вытекания  $\Gamma_2$  задано граничное условие  $\partial T/\partial n = 0$ . На рис. 3 хорошо видно, что при помощи нагрева и охлаждения указанных участков границы области удается получить безотрывное обтекание цилиндров.

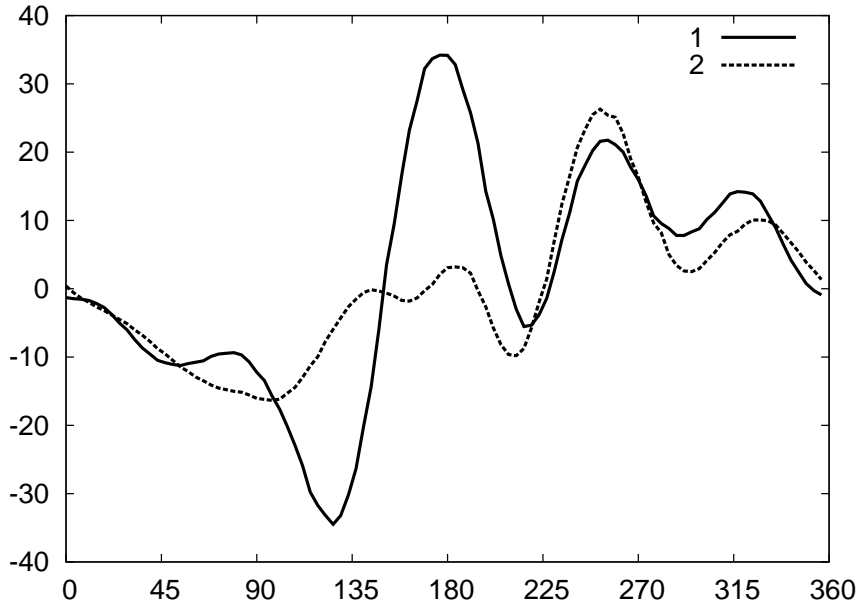


Рис. 4. Графики безразмерных потоков тепла через поверхности цилиндров

На рис. 4 представлены графики безразмерных потоков тепла в область через поверхности первого и второго цилиндров в виде зависимости от угла  $\alpha$ , измеряемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки. Анализ зависимости потока тепла от  $\alpha$  позволяет понять механизм создания безотрывного течения при помощи граничного температурного управления. На верхней поверхности цилиндра ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) действие управления приводит к охлаждению жидкости, в силу чего жидкость опускается за телом вниз. На нижней поверхности цилиндра ( $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ ) жидкость нагревается и поднимается за телом вверх. Поэтому отрыва потока не происходит.

Для оценки эффективности решения экстремальной задачи, помимо картины обтекания, следует рассмотреть и некоторые числовые характеристики течения. В первую очередь, речь идет об  $\mathbf{L}^2$ -норме завихренности  $\|\text{rot } \mathbf{u}\|$ . Так как вектор  $\mathbf{u}_d$  был выбран в качестве желаемого векторного поля из-за условия  $\text{rot } \mathbf{u}_d = 0$ , то указанная норма в некоторой степени является характеристикой достижения поставленной цели. Таблица 1 показывает уменьшение этой нормы в результате решения задачи управления при всех рассмотренных значениях числа Рейнольдса  $Re$ .

Важной характеристикой процесса обтекания тела является коэффициент сопротивления, который в данном случае вычисляется по формуле  $C_x = 2F_x/(DU^2)$ , где  $D$  — диаметр цилиндра,  $U$  — характерная скорость набегающего на тело потока, причем горизонтальная компонента  $F_x$  силы, действующей на тело со стороны жидкости, определяется через тензор напряжений  $\mathbf{T}$  формулой

$$F_x = \oint_{\Gamma_C} (\mathbf{T}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x d\sigma.$$

Здесь  $\Gamma_C$  — поверхность цилиндра,  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор в направлении оси  $Ox$ . Значения

коэффициентов сопротивления  $C_{x1}$  и  $C_{x2}$  для левого и правого цилиндров соответственно в случае неуправляемого (NS) и управляемого (ОВ) течений при различных значениях числа Рейнольдса  $Re$  представлены в таблице 1.

**Таблица 1.** Значения нормы завихренности и коэффициентов сопротивления для неуправляемого (NS) и управляемого (ОВ) течений

		Re=20	Re=40	Re=60	Re=80	Re=100
NS	$\ \text{rot } \mathbf{u}\ $	9.99	10.88	11.58	12.15	12.64
	$C_{x1}$	4.11	2.70	2.22	1.98	1.83
	$C_{x2}$	3.41	1.70	1.10	0.79	0.60
ОВ	$\ \text{rot } \mathbf{u}\ $	9.76	10.06	10.39	10.88	11.58
	$C_{x1}$	4.26	2.16	1.50	1.10	0.77
	$C_{x2}$	3.93	2.07	1.34	1.01	0.89

Анализ таблицы говорит о значительном уменьшении коэффициента сопротивления  $C_{x1}$  при росте числа Рейнольдса  $Re$  по сравнению с неуправляемым случаем. При этом следует обратить внимание на то, что значения коэффициента сопротивления для второго цилиндра в неуправляемом случае меньше. Это связано с наличием отрывной зоны между цилиндрами, что уменьшает давление на второй цилиндр со стороны набегающего потока.

Анализ приведенных результатов показывает эффективность предложенного алгоритма и позволяет сделать вывод о том, что граничное температурное управление может успешно влиять на поле скоростей вязкой жидкости с целью получения течений заданной конфигурации.

## Список литературы

1. Gunzburger M.D., Hou L., Svobodny T.P. The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling // *Comput. Fluids*. 1993. V. 22. P. 239–251.
2. Ito K., Ravindran S.S. Optimal control of thermally convected fluid flows // *SIAM J. Sci. Comput.* 1998. V. 19. № 6. P. 1847–1869.
3. Алексеев Г.В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // *Сиб. мат. журн.* 1998. Т. 39. № 5. С. 982–998.
4. Lee H.-C., Imanuvilov O.Yu. Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. V. 242. P. 191–211.
5. Алексеев Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений теплопереноса // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42. № 5. С. 971–991.
6. Алексеев Г.В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // *Журн. вычисл. матем. матем. физ.* 2002. Т. 42. № 3. С. 380–394.
7. Алексеев Г.В. Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теплопереноса // *Журн. вычисл. матем. матем. физики.* 2007. Т. 47. № 6. С. 1055–1076.
8. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
9. Desai M., Ito K. Optimal control of Navier-Stokes equations // *SIAM J. Contr. Optim.* 1994. V. 32. № 5. P. 1428–1446.

10. *Slawig T.* PDE-constrained control using FEMLAB—Control of the Navier – Stokes equations // Numer. Algorithms. 2006. V. 42, N 2. P. 107–126.
11. *De los Reyes J.C., Tröltzsch F.* Optimal control of the stationary Navier – Stokes equations with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. 2007. V. 46, N 2. P. 604–629.
12. *Dede L.* Optimal flow control for Navier – Stokes equations: Drag minimization // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2007. V. 55. № 4. P. 347–366.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2810.2008.1), гранта РФФИ “Дальний Восток” (проект № 09-01-98518-р-восток-а) и грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-A-03-07).

---

*Tereshko D.A.* Numerical solution of control problems for stationary model of heat convection. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 168–175.

#### ABSTRACT

Numerical algorithm for boundary control problems for stationary model of heat convection is preposed. Results of numerical experiments are presented and analyzed. Key words: *heat convection, control problems, numerical algorithm*