ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 182–189

УДК 519.21
MSC2000 60K10

 Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова*

Точное решение задачи А.А. Новикова о моментах достижения для авторегрессионной прoследовательности

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

В статье рассматривается модель Лапласа, описываемая авторегрессионной случайной последовательностью. Нашей задачей является вычисление в этой модели распределения момента достижения критического уровня. Эта задача была поставлена А.А. Новиковым и получила в статье точное решение, допускающее простую компьютерную реализацию.

Ключевые слова: *модель Лапласа, моменты достижения, суммы экспонент, рекуррентные интегральные соотношения*

Введение

В статье рассматривается модель Лапласа, описываемая авторегрессионной случайной прoследовательностью

$$X_k = RX_{k-1} + \eta_k,\ X_0 = 0,\ \tau = \inf(k:\ X_k \geq X) \tag{1}$$

с независимыми случайными величинами η_k, имеющими распределение

$$P(\eta_k > t) = \frac{\exp(-\lambda t)}{2},\ t > 0,\ P(\eta_k \leq t) = \frac{\exp(\lambda t)}{2},\ t \leq 0.$$

Нашей задачей является вычисление распределения момента достижения τ. Задача возникла в теории риска и в теории надежности и была поставлена А.А. Новиковым. М. Джекобсон (M. Jacobson) и В.В. Мазалов нашли приближенное решение задачи при $R < 1$ с помощью мартингальной техники. В нашей работе выведены рекуррентные интегральные соотношения, которые позволяют представить решение не приближенно, а точно через суммы экспонент. Это решение иллюстрируется компьютерными вычислениями. Предложенное решение может быть распространено на случай произвольных R и X, зависящих от k.

1. Основные результаты

Обозначим $X_k^k = 0,\ X_k^{k-s} = XR^{k-s},\ s = 1, \dots, k$, и положим при $k \geq 1$

$$T_k(x) = P(X_k > x,\ \tau \geq k),\ x \geq 0,\ S_k(x) = P(X_k \leq x,\ \tau \geq k),\ x < 0,$$

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru`

$$P(\tau = k) = T_k(X).$$

Пусть

$$B_1(k,s,j) = \exp\left(-\lambda X_{k+1}^{k+2-s}\left(\frac{1}{R^{j+1}} - 1\right)\right),$$

$$B_2(k,s,j) = \exp\left(\lambda X_{k+1}^{k+2-s}\left(\frac{1}{R^{j+1}} + 1\right)\right),$$

$$B_3(k,s,j) = \exp\left(-\lambda X_{k+1}^{k+1-s}\left(\frac{1}{R^{j+1}} + 1\right)\right),$$

$$B_4(k,s,j) = \exp\left(\lambda X_{k+1}^{k+1-s}\left(\frac{1}{R^{j+1}} - 1\right)\right),$$

$$A_1(k,s,j) = B_1(k,s,j) - B_4^{-1}(k,s,j),\ A_2(k,s,j) = B_2(k,s,j) - B_3^{-1}(k,s,j),$$

$$A_3(k,s,j) = B_2^{-1}(k,s,j) - B_3(k,s,j),\ A_4(k,s,j) = B_1^{-1}(k,s,j) - B_4(k,s,j).$$

Теорема. *Для $k \geq 1$ справедливы следующие формулы:*
при $x \geq 0$

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{k-s} a_{k\ k-s\ j} \exp\left(-\frac{\lambda x}{R^j}\right) + \sum_{j=0}^{k-s} b_{k\ k-s\ j} \exp\left(\frac{\lambda x}{R^j}\right) + c_{k\ k-s}, \tag{2}$$

где $X_k^{k-s+1} \leq x \leq X_k^{k-s},\ s \in \{1,\dots,k\}$;
при $x < 0$

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} d_{k\ j} \exp\left(\frac{\lambda x}{R^j}\right). \tag{3}$$

Здесь

$$a_{100} = \frac{1}{2},\ b_{100} = 0,\ c_{10} = 0,\ d_{10} = \frac{1}{2},\ c_{1\ -1} = 0, \tag{4}$$

$$a_{k+1\ k+1-s\ j} = -a_{k\ k-s\ j-1}\frac{R^{2j}}{1-R^{2j}},\ 0 < j \leq k-s+1,\ 1 \leq s \leq k, \tag{5}$$

$$b_{k+1\ k+1-s\ j} = -b_{k\ k-s\ j-1}\frac{R^{2j}}{1-R^{2j}},\ 0 < j \leq k-s+1,\ 1 \leq s \leq k, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} a_{k+1\ k+1-s\ 0} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}}{1+R^{j+1}} + \right. \\ + \sum_{t=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k-t}\left[\frac{A_1(k,t,j)a_{k\ k-t\ j}}{1-R^{j+1}} + \frac{A_2(k,t,j)b_{k\ k-t\ j}}{1+R^{j+1}}\right] + \\ \left. + \sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{B_1(k,s,j)a_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}} + \frac{B_2(k,s,j)b_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}}\right]\right),\ 1 \leq s \leq k+1, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} b_{k+1\ k+1-s\ 0} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{t=s+1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{A_3(k,t,j)a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}} + \frac{A_4(k,t,j)b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}\right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{B_3(k,s,j)a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}} + \frac{B_4(k,s,j)b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}\right]\right),\ 1 \leq s \leq k,\ b_{k+1\ 0\ 0} = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$c_{k+1\ k+1-s} = c_{k\ k-s} - a_{k\ 0\ 0}\exp(-\lambda X),\ 1 \le s \le k,\ c_{k+1\ 0} = c_{k+1\ -1} = 0, \tag{9}$$

$$d_{k+1\ 0} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}}{1-R^{j+1}} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}}A_3(k,s,j) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}A_4(k,s,j)\right), \tag{10}$$

$$d_{k+1\ j+1} = -d_{k\ j}\frac{R^{2(j+1)}}{1-R^{2(j+1)}},\ 0 \le j \le k-1. \tag{11}$$

Тогда случайная величина τ имеет распределение

$$P(\tau = k) = a_{k\ 0\ 0}\exp(-\lambda X),\ k > 0. \tag{12}$$

Замечание. Полученные формулы остаются верными в случае меняющихся границы $X = X(k) > 0$ и коэффициента регрессии $R = R_k > 0$ в модели

$$X_k = R_{k-1}X_{k-1} + \eta_{k-1},\ \tau = \inf(k:\ X_k \ge X(k))$$

после переобозначений

$$X_k^k = 0,\ X_k^0 = X(k),\ X_k^j = \min\left(X_{k-1}^{j-1}R_{k-1}, X(k)\right),$$

$$R_k^0 = 1,\ R_k^j = R_{k-1}^{j-1}R_{k-1} \ne 1,\ 0 \le j \le k-1,$$

и замен R^j на R_k^j в (2), (3), R^{2j} на $(R_{k+1}^j)^2$ в (5), (6), R^{j+1} на R_{k+1}^{j+1} в (7), (8), (10), $R^{2(j+1)}$ на $(R_{k+1}^{j+1})^2$ в (11). Причем предположение $R_{k-1} < 1$ в этом случае излишне.

2. Доказательство теоремы

Очевидно, что

$$T_1(x) = \frac{\exp(-\lambda x)}{2},\ x > 0,\ S_1(x) = \frac{\exp(\lambda x)}{2},\ x \le 0, \tag{13}$$

$$P(\tau = 1) = \frac{\exp(-\lambda X)}{2}.$$

Вычислим теперь при $x \ge 0$

$$T_2(x) = \left(\int_{-\infty}^{0} dS_1\left(\frac{u}{R}\right) - \int_0^{\min(x,XR)} dT_1\left(\frac{u}{R}\right)\right)\frac{\exp(-\lambda(x-u))}{2} -$$
$$- \int_{\min(x,XR)}^{XR} dT_1\left(\frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{\exp(\lambda(x-u))}{2}\right).$$

В результате получим

$$T_2(x) = \frac{1}{2(1-R^2)}\left(\exp(-\lambda x) - R^2\exp\left(-\frac{\lambda x}{R}\right)\right) - \frac{1}{2}\exp(-\lambda X) + \tag{14}$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)\exp(-\lambda X(1+R))}{4(1+R)},\ 0 \le x \le XR,$$

$$T_2(x) = \frac{\exp(-\lambda x)}{2}\left(\frac{1}{1-R^2} - \frac{\exp\left(\lambda\left(R-1\right)X\right)}{2(1-R)}\right),\ XR \le x. \tag{15}$$

Вычислим теперь при $x < 0$

$$S_2(x) = \int_{-\infty}^{x} dS_1\left(\frac{u}{R}\right)\left(1 - \frac{\exp(-\lambda(x-u))}{2}\right) +$$

$$+\left(\int_{x}^{0} dS_1\left(\frac{u}{R}\right) - \int_{0}^{XR} dT_1\left(\frac{u}{R}\right)\right)\frac{\exp(\lambda(x-u))}{2}.$$

В результате получим

$$S_2(x) = \exp\left(\frac{\lambda x}{R}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(1+R)} - \frac{1}{4(1-R)}\right) +$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\left(\frac{1}{2(1-R)} + \frac{1}{2(1+R)}\left(1-\exp(-\lambda X(1+R))\right)\right),\ x < 0. \tag{16}$$

В соответствии с (14)–(16) предположим по индукции, что при $x \ge 0$ справедлива формула (2), а при $x < 0$ справедлива формула (3). Тогда при $x \ge 0$

$$T_{k+1}(x) = J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) + J_4(x), \tag{17}$$

где

$$J_1(x) = \int_{-\infty}^{0} dS_k\left(\frac{u}{R}\right)\frac{\exp(-\lambda(x-u))}{2},$$

$$J_2(x) = -\int_{0}^{\min\left(x, X_{k+1}^{1}\right)} dT_k\left(\frac{u}{R}\right)\frac{\exp(-\lambda(x-u))}{2},$$

при $X_{k+1}^{k+2-s} \le x \le X_{k+1}^{k+1-s},\ s \in \{1,\ldots,k+1\}$

$$J_3(x) = -\int_{\min\left(x, X_{k+1}^{1}\right)}^{X_{k+1}^{1}} dT_k\left(\frac{u}{R}\right),$$

$$J_4(x) = \int_{\min\left(x, X_{k+1}^{1}\right)}^{X_{k+1}^{1}} dT_k\left(\frac{u}{R}\right)\frac{\exp(\lambda(x-u))}{2}.$$

Вычислим $J_1(x),\ J_2(x),\ J_3(x),\ J_4(x):$

$$J_1(x) = \frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\,j}}{1+R^{j+1}}, \tag{18}$$

$$J_2(x) = \frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{a_{k\,k-t\,j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x, X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x, X_{k+1}^{k+2-t}\right)} +$$

$$+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{b_{k\,k-t\,j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x, X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x, X_{k+1}^{k+2-t}\right)}. \tag{19}$$

При $X_{k+1}^{k+2-s} \le x \le X_{k+1}^{k+1-s},\ s \in \{1,\dots,k+1\}$

$$J_3(x) = -a_{k\ 0\ 0}\exp(-\lambda X) + \sum_{j=0}^{k-s} a_{k\ k-s\ j}\exp\left(-\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-s} b_{k\ k-s\ j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right) + c_{k\ k-s}. \tag{20}$$

В свою очередь,

$$J_4(x) = \frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+2-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)}^{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+1-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)} +$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+2-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)}^{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+1-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)} \tag{21}$$

при $s \in \{1,\dots,k\}$,

$$J_3(x) = J_4(x) = 0,\ s = k+1. \tag{22}$$

Из формул (17)–(22) при $x \ge 0,\ s \in \{1,\dots,k\}$ получаем

$$T_{k+1}(x) = -a_{k\ 0\ 0}\exp(-\lambda X) + \frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}}{1+R^{j+1}} + \tag{23}$$

$$+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{a_{k\ k-t\ j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x,X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x,X_{k+1}^{k+2-t}\right)} +$$

$$+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{b_{k\ k-t\ j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x,X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x,X_{k+1}^{k+2-t}\right)} +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-s} a_{k\ k-s\ j}\exp\left(-\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right) + \sum_{j=0}^{k-s} b_{k\ k-s\ j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right) + c_{k\ k-s} +$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{a_{k\ k-t\ j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+2-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)}^{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+1-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)} +$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{b_{k\ k-t\ j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+2-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)}^{\min\left(\max\left(x,X_{k+1}^{k+1-s}\right),X_{k+1}^{1}\right)},$$

а при $s = k+1$

$$T_{k+1}(x) = \frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}}{1+R^{j+1}} + \tag{24}$$

$$+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{a_{k\ k-t\ j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x,X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x,X_{k+1}^{k+2-t}\right)} +$$

$$+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-t}\frac{b_{k\;k-t\;j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{\min\left(x,X_{k+1}^{k+1-t}\right)}^{\min\left(x,X_{k+1}^{k+2-t}\right)}.$$

Используя формулу (2), перепишем формулы (23), (24) следующим образом: при $s\in\{1,\ldots,k\}$

$$T_{k+1}(x)=-a_{k\;0\;0}\exp(-\lambda X)+\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\;j}}{1+R^{j+1}}+\right. \tag{25}$$

$$+\sum_{t=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k-t}\left[\frac{A_1(k,t,j)a_{k\;k-t\;j}}{1-R^{j+1}}+\frac{A_2(k,t,j)b_{k\;k-t\;j}}{1+R^{j+1}}\right]+$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{B_1(k,s,j)a_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}+\frac{B_2(k,s,j)b_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}\right]\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{\exp(-\frac{\lambda x}{R^{j+1}})a_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}+\frac{\exp(\frac{\lambda x}{R^{j+1}})b_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-s}a_{k\;k-s\;j}\exp\left(-\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right)+\sum_{j=0}^{k-s}b_{k\;k-s\;j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right)+c_{k\;k-s}-$$

$$-\frac{\exp(\lambda x)}{2}\left(\sum_{t=s+1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{A_3(k,t,j)a_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}+\frac{A_4(k,t,j)b_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{B_3(k,s,j)a_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}+\frac{B_4(k,s,j)b_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}\right]\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{\exp(-\frac{\lambda x}{R^{j+1}})a_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}+\frac{\exp(\frac{\lambda x}{R^{j+1}})b_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1-s}a_{k+1\;k+1-s\;j}\exp\left(-\frac{\lambda x}{R^{j}}\right)+\sum_{j=0}^{k+1-s}b_{k+1\;k+1-s\;j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j}}\right)+c_{k+1\;k+1-s},$$

а при $s=k+1$

$$T_{k+1}(x)=\frac{\exp(-\lambda x)}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\;j}}{1+R^{j+1}}+\right. \tag{26}$$

$$+\sum_{t=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k-t}\left[\frac{A_1(k,t,j)a_{k\;k-t\;j}}{1-R^{j+1}}+\frac{A_2(k,t,j)b_{k\;k-t\;j}}{1+R^{j+1}}\right]+$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{B_1(k,s,j)a_{k\;k-s\;j}}{1-R^{j+1}}+\frac{B_2(k,s,j)b_{k\;k-s\;j}}{1+R^{j+1}}\right]\right)=a_{k+1\;0\;0}\exp(-\lambda x).$$

Вычислим теперь при $x<0$

$$S_{k+1}(x)=\int_{-\infty}^{x}dS_k\left(\frac{u}{R}\right)\left(1-\frac{\exp(-\lambda(x-u))}{2}\right)+ \tag{27}$$

$$+\left(\int_x^0 dS_k\left(\frac{u}{R}\right)-\int_0^{X_{k+1}^1} dT_k\left(\frac{u}{R}\right)\right)\frac{\exp(\lambda(x-u))}{2}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} d_{k\ j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2(1+R^{j+1})}-\frac{1}{2(1-R^{j+1})}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}\exp(\lambda x)}{1-R^{j+1}}+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}}\exp\left(-\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}+1\right)\right)\Bigg|_{X_{k+1}^{k+1-s}}^{X_{k+1}^{k+2-s}}+$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\frac{b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}\exp\left(\lambda u\left(\frac{1}{R^{j+1}}-1\right)\right)\Bigg|_{X_{k+1}^{k+1-s}}^{X_{k+1}^{k+2-s}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} d_{k\ j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2(1+R^{j+1})}-\frac{1}{2(1-R^{j+1})}\right)+$$

$$+\frac{\exp(\lambda x)}{2}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d_{k\ j}}{1-R^{j+1}}+\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\left[\frac{A_3(k,s,j)a_{k\ k-s\ j}}{1+R^{j+1}}+\frac{A_4(k,s,j)b_{k\ k-s\ j}}{1-R^{j+1}}\right]\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k} d_{k+1\ j}\exp\left(\frac{\lambda x}{R^{j}}\right).$$

Из равенств (13)–(16), (25)–(27) получаем формулы (5)–(12). Теорема доказана.

3. Численные расчеты

Доказательство теоремы содержит сложные и длинные символьные вычисления, которые являются источником многочисленных ошибок. Чтобы избежать этих ошибок, приходится тестировать результаты символьных вычислений численными расчетами.

Предположим, что $X = 1$, $R = 0.5$, $\lambda = 0.4491$, тогда, в соответствии с теоремой 1, получаем численные результаты, представленные в таблице 1.

Таблица 1.

k	$P(\tau = k)$
10	0.03052
20	0.00512968
30	0.000861841
40	0.000144798
50	0.0000243276
60	4.08729×10^{-6}
70	6.86708×10^{-7}
80	$1.15374\ \times10^{-7}$
90	1.93841×10^{-8}
100	3.25672×10^{-9}

Авторы благодарят А.А. Новикова за полезные обсуждения.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 03 марта 2009 г.

Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Accuracy solution of A.A. Novikov problem for reaching moments of autoregressive sequence. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 182–189.

ABSTRACT

In this paper the Laplas model described by an autoregressive random sequence is considered. Our problem is to calculate a distribution of a reaching moment in the model. The problem is put by A.A. Novikov and obtained in the paper an accuracy solution. This solution may be realized sufficiently simple numerically.
Key words: *the Laplas model, a reaching moment, a sum of exponents, a recurrent integral equality*