ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 190–193
УДК 514.8+519.86+519.87
MSC2000 49Qxx+60J20+90xx

© Г.Ш. Цициашвили*

Вероятностная и детерминированная задачи о минимальном промежутке

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Задача о минимальном промежутке между соседними точками на отрезке возникает в самых разнообразных приложениях: в физике твердого тела, в физике поверхности, в математической экономике, в исследовании операций и во многих других. В математическом плане эти задачи нестандартны и требуют для своего решения разработки специальных приемов. В работе разбираются как вероятностная, так и детерминированная постановка задачи. Строятся оригинальные алгоритмы решения и асимптотические соотношения.

Ключевые слова: *задача о минимальном промежутке, уравнение Беллмана, теорема Карлина*

1. Вероятностная постановка задачи

В физике твердого тела возникает задача о минимальном интервале между соседними n точками. Для ее решения в группе А.А. Саранина методом Монте-Карло был проведен объемный вычислительный эксперимент и сформирована гипотеза об экспоненциальном хвосте распределения минимального интервала. Однако физики нуждались не только в статистическом, но и в аналитическом обосновании этой гипотезы. В настоящем параграфе это обоснование дается с помощью аисмптотических методов и известных теорем теории вероятностей.

Рассмотрим n независимо и равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ точек. Обозначим $u_1, u_2, \ldots, u_n$ их координаты, упорядоченные по величине, $0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le 1$. Определим последовательные разности

$$w_1 = u_1,\ w_2 = u_2 - u_1, \ldots, w_n = u_n - u_{n-1}$$

и вычислим вероятность

$$Q(t) = P(\min(w_1, \ldots, w_n, 1 - w_1 - \ldots - w_n) > t),\ 0 < t < 1/n.$$

Теорема 1. *1) Выполняется соотношение*

$$Q(t) = (1 - (n+1)t)^n,\ 0 < t < \frac{1}{n+1}.$$

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru

2) Если $\alpha > 1$ и $t = \dfrac{\tau}{n^\alpha}$, то

$$-\ln Q\left(\frac{\tau}{n^\alpha}\right) \sim \frac{\tau}{n^{\alpha-2}},\ Q\left(\frac{\tau}{n^2}\right) \sim \exp(-\tau),\ n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно, что $Q(t) = P(w_1 > t, w_1 > t, \ldots, w_n, 1 - w_1 - \ldots - w_n > t)$. Случайные величины $w_1, \ldots, w_n$ имеют совместное равномерное распределение [1, гл. 9] на множестве $Z_0 = \{z_1, \ldots, z_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^n z_k \leq 1\}$. Из несложных геометрических построений находим, что при $0 < t < 1/(n+1)$ множество $Z_1 = \{z_1, \ldots, z_n \geq t,\ \sum_{k=1}^n z_k \leq 1 - t\}$ изоморфно множеству $Z_2 = \{z_1, \ldots, z_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^n z_k \leq 1 - (n+1)t\}$. В свою очередь, множество Z_2 может быть получено из множества Z_0 растяжением по всем n координатам в $(1 - (n+1)t)$ раз, следовательно, получаем равенство

$$Q(t) = (1 - (n+1)t)^n,\ 0 < t < \frac{1}{n+1}.$$

2) Доказательство асимптотических формул очевидно.

2. Детерминированная постановка задачи

В математической экономике и теории исследования операций возникает задача о выборе внутри подотрезков некоторого отрезка таких точек, что минимальное расстояние между соседними точками максимально. В качестве примера приведем задачу о расположении вдоль трассы придорожных кафе для дальнобойщиков. Компания ставит ровно одно кафе в каждом регионе (или районе края), что объясняется исключительным правом торговли, выделяемым одному продавцу на этой территории. Тогда нужно максимизировать минимальное расстояние между ближайшими кафе, чтобы дальнобойщики "успели проголодаться". Для этой задачи в параграфе получен аналог уравнения Беллмана. Доказана теорема о существовании решения задачи и его единственности и предложен алгоритм его нахождения.

Предположим, что с помощью точек $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{n-1} = 1$ построено разбиение отрезка $[0, 1]$ на совокупность смежных и непересекающихся подотрезков $[z_{k-1}, z_k]$, $1 \leq k \leq n - 1$. Обозначим

$$\Delta_k = z_k - z_{k-1},\ 1 \leq k \leq n - 1.$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{W} = \{\{w_k = u_k - u_{k-1},\ 1 \leq k \leq n :\ u_0 = 0,\ u_k \in [z_k, z_{k-1}],\ 1 \leq k \leq n-1,\ u_n = 1\}\}.$$

Нашей задачей является вычисление $\max\limits_{W \in \mathcal{W}} \min\limits_{1 \leq k \leq n} w_k$.

Теорема 2. *Если $\Delta_k = \dfrac{1}{n-1}$, $1 \leq k \leq n-1$, то*

$$\max_{W \in \mathcal{W}} \min_{1 \leq k \leq n} w_k = \frac{1}{n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\widehat{\mathcal{W}} = \{\{w_k = u_k - u_{k-1},\ 1 \leq k \leq n :\ 0 = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_{n-1} \leq u_n = 1\}\}.$$

Очевидно, что

$$\widehat{\mathcal{W}} \supset \mathcal{W},\ \min_{1 \leq k \leq n} w_k \leq \frac{1}{n},\ (w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{W}. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \geq \max_{W \in \widehat{\mathcal{W}}} \min_{1 \leq k \leq n} w_k \geq \max_{W \in \mathcal{W}} \min_{1 \leq k \leq n} w_k, \tag{2}$$

причем $\min\limits_{W \in \widehat{\mathcal{W}}} \max\limits_{1 \leq k \leq n} w_k$ достигается в единственной точке $\overline{W} = (\overline{w}_k = \frac{1}{n},\ 1 \leq k \leq n)$, $\overline{W} \in \widehat{\mathcal{W}}$, и значит, совпадает с $1/n$. Последовательности $\overline{W}$ соответствует последовательность $u_k = \frac{k}{n},\ 0 \leq k \leq n$. Непосредственной проверкой получаем, что

$$u_k = \frac{k}{n} \in [z_{k-1}, z_k] = \left[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right],\ 1 \leq k \leq n-1,$$

и значит, что

$$\min_{W \in \mathcal{W}} \max_{1 \leq k \leq n} w_k = \max_{1 \leq k \leq n} \overline{w}_k = \frac{1}{n},\ \overline{W} \in \mathcal{W}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Если $\Delta_k,\ 1 \leq k \leq n$, не удовлетворяют равенству $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n$ и $x_k = u_k - z_{k-1} \geq 0,\ 1 \leq k \leq n$, то рекуррентно определяемые функции*

$$T_1(t) = t,\ T_{n+1}(t) = \max_{0 \leq x_k \leq \Delta_k,\ 1 \leq k \leq n} \min(x_1, \Delta_1 - x_1 + x_2, \ldots, \Delta_n - x_n + t),\ n \geq 1, \tag{4}$$

удовлетворяют аналогу уравнения Беллмана

$$T_{n+1}(t) = \max_{0 \leq x_n \leq \Delta_n} \min(T_n(x_n), \Delta_n - x_n + t). \tag{5}$$

Функция $T_n(t),\ 0 \leq t,\ 1 \leq n$, является монотонно неубывающей, непрерывной и кусочно-линейной с числом линейных кусков, не превосходящим n.

Доказательство. В силу равенств

$$T_{n+1}(t) = \max_{0 \leq x_k \leq \Delta_k,\ 1 \leq k \leq n} \min[\min(x_1, \Delta_1 - x_1 + x_2, \ldots, \Delta_{n-1} - x_{n-1} + x_n),$$

$$\Delta_n - x_n + t] = \max_{0 \leq x_n \leq \Delta_n} \min[\max_{0 \leq x_k \leq \Delta_k,\ 1 \leq k \leq n-1} \min(x_1, \Delta_1 - x_1 + x_2, \ldots,$$

$$\Delta_{n-1} - x_{n-1} + x_n), \Delta_n - x_n + t]$$

получаем аналог уравнения Беллмана (5). Методом математической индукции докажем, что функция $T_l(t),\ 0 \leq t,\ 1 \leq l$, является монотонно неубывающей, непрерывной и кусочно-линейной, причем число линейных кусков в ней не превосходит l.

При $l = 1$ это утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при $l = n > 1$ и функция $T_n(t),\ 0 \leq t$, является линейной на смежных отрезках

$$[t_0, t_1],\ [t_1, t_2], \ldots, [t_{m_n - 1}, t_{m_n}],\ [t_{m_n}, \infty);\ t_0 = 0,\ t_{m_n} = \Delta_n,\ m_n \leq n-1.$$

Обозначим $X_k = T_n(t_k),\ 0 \leq k \leq m_n$. По предположению индукции, справедливы неравенства $X_0 \leq X_1 \leq \ldots \leq X_{m_n}$. Тогда

$$Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_{m_n},\ Z_i = t_i + X_i - \Delta_n,\ 0 \leq i \leq m_n.$$

Построим непрерывную, монотонно неубывающую функцию $S(t),\ t \geq \min(0, Z_0)$, которая является линейной на отрезках $[Z_{i-1}, Z_i],\ 1 \leq i \leq m_n$, и удовлетворяет равенствам $S(Z_i) = X_i$. При $t \geq Z_{m_n}$ полагаем $S(t) = X_{m_n}$, а при $0 \leq t \leq Z_0$ (если $Z_0 > 0$) полагаем $S(t) = \Delta_n + t$. Таким образом, определена монотонно неубывающая, непрерывная и кусочно-линейная функция $S(t),\ t \geq 0$, число линейных кусков у которой не более $n + 1$. Тогда $T_{n+1}(t) = S(t),\ t \geq 0$, — монотонно неубывающая, непрерывная и кусочно-линейная функция с числом линейных кусков, не превосходящим $n + 1$.

Замечание 1. Формулировки теорем 2, 3 останутся прежними, если поменять минимум и максимум местами. Однако построение функции $S(t)$ в теореме 3 меняется следующим образом: при $t \geq Z_{m_n}$ полагаем $S(t) = X_{m_n} + (t - Z_{m_n})$, а при $0 \leq t \leq Z_0$ (если $Z_0 > 0$) полагаем $S(t) = X_0$.

Теорема 4. *При* $t = x_{n+1} = 0$ *существует вектор* $(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющий равенству* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Описанный в теореме 3 алгоритм позволяет построить функции $T_1(t), \ldots, T_{n+1}(t)$. Из уравнения (5)

$$T_{n+1}(0) = \max_{0 \leq x_n \leq \Delta_n} \min(T_n(x_n), \Delta_n - x_n). \tag{6}$$

Поэтому а) если $T_n(0) \geq \Delta_n$, то $x_n = 0$, в) если $T_n(0) < \Delta_n$, то в силу монотонного неубывания функции $T_n(t)$, $0 \leq t$, существует x_n, $0 \leq x_n \leq \Delta_n$, удовлетворяющее уравнению (6). Найдя таким образом x_n, можно перейти к определению x_{n-1}, решая уравнение

$$T_n(x_n) = \max_{0 \leq x_{n-1} \leq \Delta_{n-1}} \min(T_{n-1}(x_{n-1}), \Delta_{n-1} - x_{n-1} + x_n)$$

относительно неизвестного x_{n-1}, $0 \leq x_{n-1} \leq \Delta_{n-1}$, и убеждаясь аналогичным предыдущему способом, что это решение существует. Повторяя описанную процедуру еще $n-2$ раз, находим вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий равенству (4), в котором $t = x_{n+1} = 0$. Можно привести примеры, когда вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий равенству (4), является неединственным.

Замечание 2. Если в исходной задаче поменять минимум и максимум местами, то утверждение теоремы 4 будет верным. Однако определение вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ в доказательстве этой теоремы изменится: условия пунктов а), в) поменяются местами.

Список литературы

1. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 07 апреля 2009 г.

Tsitsiashvili G.Sh. Probability and deterministic problems of minimal interval. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 190–193.

ABSTRACT

A problem of a minimal interval between neighbor points appears in different applications: in the solid state physics, in the surface physics, in the mathematical economics, in the operations research and etc. From a mathematical point of view these problems are sufficiently substandard and demand a creation of special approaches. In this paper as probability so deterministic formulations of this problem are considered. Original algorithms of the problem solution and asymptotic formulas are constructed.

Key words: *a minimal interval problem, the Bellman equation, the Karlin theorem*