ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2009. Том 9. № 1–2. С. 194–203
УДК 517.9
MSC2000 49K20

© В.Е. Цыба*

Задача о минимизации работы при создании магнитного поля заданной конфигурации

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Рассматривается задача с жестким управлением в правой части для одномерного магнитогидродинамического течения между параллельными плоскостями (течение Гартмана). Минимизируется функционал, соответствующий работе, совершаемой сторонними электродвижущими силами при создании магнитного поля заданной конфигурации. Получены условия существования и единственности решения задачи, построена система оптимальности.

Ключевые слова: *уравнения магнитной гидродинамики, жесткое управление, система оптимальности*

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающих в безразмерных переменных одномерное магнитогидродинамическое (МГД) течение между параллельными плоскостями (течение Гартмана).

$$\dot{u} - \nu u_{xx} = \beta B_x, \tag{1}$$

$$\dot{B} - \nu_m B_{xx} = \beta u_x + E_x,\ x \in (0,1),\ t \in (0,T). \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — скорость течения, $B = B(x,t)$ — магнитная индукция, $E = E(x,t)$ — сторонние электродвижущие силы (ЭДС), $\nu = 1/Re$, $\nu_m = 1/Re_m$, где Re — число Рейнольдса, Re_m — магнитное число Рейнольдса, β — индукция постоянного внешнего магнитного поля. Через $\dot{u}, \dot{B}$ обозначим частные производные по времени, а через u_x, B_x, E_x и u_{xx}, B_{xx} — первые и вторые частные производные по x.

Граничные условия ставятся исходя из условия прилипания на твердых поверхностях и условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad B|_{x=0} = 0, \quad B|_{x=1} = 0. \tag{3}$$

Система (1)–(3) получается из уравнений МГД течения вязкой несжимаемой жидкости [1, с. 337] в предположениях, что течение происходит между параллельными плоскостями, давление в канале постоянно и орты векторов скорости, магнитного поля и сторонних ЭДС образуют правую тройку.

Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии покоя:

$$u|_{t=0} = 0, \quad B|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,1). \tag{4}$$

* Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40. Электронная почта: tsiba-vl@yandex.ru

Предположим, что мы можем воздействовать на жидкость с помощью сторонних ЭДС E. Требуется в момент времени $t = T$ создать в канале магнитное поле заданной конфигурации

$$B|_{t=T} = B_s(x), \tag{5}$$

совершив при этом минимальную работу, которая определяется следующим выражением:

$$J_a(E) = \int_0^T \int_0^1 BE_x dxdt.$$

Воспользовавшись соотношениями (1)–(5), преобразуем функционал J_a:

$$J_a(E) = \int_0^T \int_0^1 BE_x dxdt = \int_0^T \int_0^1 B(\dot{B} - \nu_m B_{xx} - \beta u_x)dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}B^2 + \nu_m B_x^2 + \beta u B_x\right) dxdt = \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}B^2 + \nu_m B_x^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2 + \nu u_x^2\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(B_s^2 + u_{t=T}^2\right) dx + \int_0^T \int_0^1 \left(\nu_m B_x^2 + \nu u_x^2\right) dxdt.$$

Постановка задачи о минимизации работы при создании магнитного поля заданной конфигурации выглядит следующим образом:
найти функцию $E(x,t)$, минимизирующую функционал

$$J(E) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2|_{t=T} dx + \int_0^T \int_0^1 \left(\nu_m B_x^2 + \nu u_x^2\right) dxdt$$

на решениях системы (1)–(5), при условии

$$\int_0^T \int_0^1 E^2 dxdt \leq M^2. \tag{6}$$

Здесь $M > 0$ — заданное число.

В работе доказаны существование и единственность решения поставленной задачи, а также получена система оптимальности для нахождения ее решения. Аналогичные методы доказательства использовались в [2] при исследовании задачи о разгоне покоящейся жидкости до заданной скорости. Вопросы разрешимости нестационарных задач магнитной гидродинамики изучены в [3], [4], вопросы точной управляемости – в [5]. Для уравнений параболического типа точная и аппроксимативная управляемость доказаны в работах [6]–[9]. Задачи управления системой (1)–(5) рассмотрены в работах [10], [11].

2. Функциональные пространства и операторы

Определим пространства и операторы, которые будут использованы в дальнейшем. Обозначим $H = L^2(0,1)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале $(0,1)$, и $V = H_0^1(0,1)$ – пространство Соболева, состоящее из функций, интегрируемых с квадратом вместе с первой производной и принимающих на концах отрезка нулевые значения. Будем также использовать пространства Соболева $H^s(0,1)$ с целым показателем.

Определим скалярное произведение в H и V следующим образом:

$$(u,v)_H = (u,v) = \int_0^1 uvdx, \quad (u,v)_V = ((u,v)) = \int_0^1 u_x v_x dx.$$

Через $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ будем обозначать нормы в H и V соответственно. В силу теоремы Рисса можно отождествить пространство H с сопряженным с ним пространством H'. Обозначим через $V' = H^{-1}(0,1)$ пространство, сопряженное с V. Тогда справедливы включения

$$V \subset H = H' \subset V',$$

причем указанные вложения являются плотными и непрерывными.

Определим пространства состояний $\mathbb{Y}$ и управлений U_e:

$$\mathbb{Y} = \{w \in L^2(0,T;V),\ \dot{w} \in L^2(0,T;V')\},\ \|w\|_{\mathbb{Y}}^2 = \int_0^T \left(\|w\|^2 + \|\dot{w}\|_{V'}^2\right) dt,$$

$$U_e = \{E \in L^2(0,T;H):\ (E,1) = 0\},\ \|E\|^2_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T |E|^2 dt.$$

Дополнительное условие $(E,1) = 0$ добавлено для того, чтобы установить взаимнооднозначное соответствие между управлением и состоянием, поскольку управление E входит в уравнение (2) под знаком производной по x.

Здесь и в дальнейшем через $L^p(0,T;X)$, где X — банахово пространство, обозначаем пространство L^p функций, определенных на $[0,T]$ и принимающих значения в X. Аналогичным образом определяется пространство $C([0,T];X)$.

Введем основные операторы. Оператор $F(E) : U_e \to V'$ определим соотношением

$$(F(E), w) = -(E, w_x)\ \forall w \in U_e.$$

Рассмотрим оператор $A : V \to V'$, действующий по правилу

$$(A\varphi, \xi) = (\varphi_x, \xi_x) \quad \forall \varphi, \xi \in V.$$

Оператор A непрерывно обратим, т.е. для любого $f \in V'$ существует единственный элемент $\varphi = -A^{-1} f \in V$.

Определим оператор интегрирования $I(f) : V' \to H$ с помощью равенства

$$(I(f), \xi) = -((A^{-1}f)_x, \xi) = (A^{-1}f, \xi_x) \quad \forall \xi \in V.$$

Отметим некоторые его свойства.

1. $I(f)_x = f$. Равенство понимается как равенство распределений.

2. Оператор I непрерывен. Пусть $f = A\varphi$. Тогда

$$((A\varphi, \varphi)) = \|\varphi\|^2 = |(f, \varphi)| \le \|f\|_{V'} \|\varphi\|,$$

$$\|\varphi\| \le \|f\|_{V'}.$$

Таким образом,

$$\|I(f)\|_H = \|(A^{-1}f)_x\|_H = \|\varphi\|_V \le \|f\|_{V'}. \tag{7}$$

3. $(I(f), 1) = 0$. Действительно, $(I(f), 1) = -((A^{-1}f)_x, 1) = (\varphi_x, 1) = 0$.

Используя введенные обозначения, дадим определение обобщенного решения системы (1)–(4). Под решением системы (1)–(4) будем понимать пару $\{u, B\} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$, удовлетворяющую следующим уравнениям в пространстве V':

$$\dot{u} + \nu A u = \beta B_x, \tag{8}$$

$$\dot{B} + \nu_m A B = \beta u_x + F(E) \tag{9}$$

– и начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad B|_{t=0} = 0. \tag{10}$$

Замечание 1. Рассмотрим уравнение (8). Если считать, что функция $B \in \mathbb{Y}$ задана, то уравнение (8) с начальными условиями (10) имеет единственное решение $u \in \mathbb{Y}$ [12, с.110, теорема 1.2]. При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathbb{Y}} \leq C_\Omega \beta \|B\|_{\mathbb{Y}}, \tag{11}$$

где C_Ω — константа, зависящая только от области течения.

Обозначим через $G : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ разрешающий оператор задачи (8), (10):

$$u = G(B).$$

Отметим, что оператор G линейный и, в силу оценки (11), непрерывный.

3. Разрешимость задачи управления

3.1. Априорные оценки решения управляемой системы

Рассмотрим систему (8)–(10). Пусть $\{u, B\}$ — ее решение, соответствующее управлению E. Умножим скалярно в H уравнение (8) на u, (9) на B и сложим полученные выражения:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|^2 + |B|^2) + \nu_m\|B\|^2 + \nu\|u\|^2 = |(E, B_x)| \leq \frac{1}{2\nu_m}|E|^2 + \frac{\nu_m}{2}\|B\|^2.$$

Из полученного неравенства следуют оценки u, B в нормах пространств $L^\infty(0,T;H)$ и $L^2(0,T;V)$:

$$|u|^2 + |B|^2 \leq C_1^2, \qquad \int_0^T \left(\nu_m\|B\|^2 + 2\nu\|u\|^2\right) dt \leq C_1^2, \tag{12}$$

где $C_1^2 = \frac{1}{\nu_m}\int_0^T |E|^2 dt$. Из полученных оценок следует однозначная разрешимость задачи (8)–(10) с нулевыми начальными условиями для любой функции $E \in U_e$ [12, с. 110].

3.2. Формализация задачи управления

С помощью оператора G систему (8)–(10) можно записать в виде одного уравнения

$$\dot{B} + \nu_m AB - \beta(G(B))_x = F(E) \tag{13}$$

с начальными условиями

$$B|_{t=0} = 0, \quad B|_{t=T} = B_s. \tag{14}$$

Отметим, что каждой функции $E \in U_e$ соответствует единственное решение $B \in \mathbb{Y}$ задачи (13)–(14).Таким образом, исходная задача может быть формализована в следующем виде.

Задача P. Пусть $B_s \in H$, $B_s \neq 0$. Требуется найти пару $\{B, E\} \in \mathbb{Y} \times U_e$, удовлетворяющую системе (13)–(14), условию

$$\|E\|_{U_e} \leq M \tag{15}$$

и минимизирующую функционал

$$J(E) = \frac{1}{2}|G(B)|^2_{t=T} + \int_0^T \left(\nu_m\|B\|^2 + \nu\|G(B)\|^2\right) dt. \tag{16}$$

Замечание 2. Компонента B решения задачи P ищется в классе $\mathbb{Y}$, при этом условия (14) имеют смысл, поскольку есть вложение $\mathbb{Y} \subset C([0,T];H)$.

Пару $\{B, E\}$ будем называть допустимой, если $B \in \mathbb{Y},\ E \in U_e$ являются решением системы (13)–(14) и выполняется условие (15). Множество допустимых пар будем обозначать через $\mathcal{D} \subset \mathbb{Y} \times U_e$.

3.3. Существование и единственность решения задачи управления

Предварительно выразим в явном виде управление E через состояние $\{u, B\}$. Из уравнения (13) получаем

$$E = I(\dot{B}) - \nu_m B_x - \beta u + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — некоторая функция времени. Умножая полученное равенство скалярно на 1 и используя определение пространства управлений U_e и свойство 3 оператора I, найдем функцию α:

$$\alpha(t) = (\beta u, 1). \tag{17}$$

Поэтому

$$E = I(\dot{B}) - \nu_m B_x - \beta u + \beta(u, 1). \tag{18}$$

Теорема 1. *Существует положительное число M_0 такое, что при $M \geq M_0$ задача P имеет единственное решение $\{B, E\} \in \mathbb{Y} \times U_e$, а при $M < M_0$ решение задачи P не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B_1 \in \mathbb{Y}$ есть решение задачи

$$-\dot{B}_1 + \nu_m A B_1 = 0, \quad B_1|_{t=T} = B_s,$$

существование и единственность которого вытекает стандартным образом из [12, с. 110, теорема 1.2]. Рассмотрим функцию $\varphi \in C^\infty[0, T]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = 1$, и положим

$$\hat{B} = \varphi B_1.$$

Тогда пара

$$\{\hat{B}, \hat{E}\} = \{\hat{B},\ I(\hat{B}) - \nu_m \hat{B}_x - \beta G(\hat{B}) + \beta(G(\hat{B}), 1)\} \in \mathbb{Y} \times U_e$$

удовлетворяет системе (13)–(14), и если $M_0 > \|\hat{E}\|_{U_e}$, то выполняется неравенство (15). Таким образом, $\{\hat{B}, \hat{E}\} \in \mathcal{D}$. Следовательно, при достаточно больших M множество допустимых пар не пусто и существует последовательность $\{B_m, E_m\} \in \mathcal{D}$, минимизирующая функционал $J(E)$. Причем в силу условия (15) множество управлений слабо замкнуто и ограничено в $L^2(0, T; H)$. Тогда существует последовательность $\{E_k\}$ такая, что

$$E_k \to E_* \text{ слабо в } U_e \text{ и } E_* \in U_e.$$

Записав уравнения (13)–(14) для пары $\{B_k, E_k\}$ и перейдя к пределу при $k \to \infty$, получим, что пара $(B_*, E_*) \in \mathcal{D}$ и, следовательно, множество допустимых пар слабо замкнуто в пространстве $L^2(0, T; H)$.

Из слабой замкнутости и полунепрерывности снизу функционала $J(E)$ в пространстве $L^2(0, T; H)$ получаем

$$J(E_*) \leq \lim_{k \to \infty} J(E_k).$$

Следовательно, пара (B_*, E_*) — решение задачи P.

Пусть M_0 — точная нижняя грань чисел M, при которых задача P имеет решение. Покажем, что $M_0 > 0$. Предположим противное: для любого малого $M > 0$ решение существует. Тогда, используя оценку (12), приходим к противоречию

$$0 < |B_s| = |B|_{t=T}| \leq |B|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \|E\|_{U_e}/\nu_m \leq M/\nu_m \to 0.$$

Рассмотрим предельный случай $M = M_0$. Обозначим через (B_m, E_m) решение задачи (15)–(14), при $M = M_m$, где $M_m > M_0$ и $M_m \to M_0$. Последовательности $\{B_m\}$ и $\{E_m\}$ ограничены в пространствах $\mathbb{Y}$ и U_e соответственно. Следовательно,

$$E_m \to \hat{E} \text{ слабо в } L^2(0, T; H),\ \hat{E} \in U_e,\ \|\hat{E}\|_{U_e} \leq M.$$

Записав уравнения (13)–(14) для пары (B_m, E_m) и перейдя к пределу, получим, что пара $(\hat{B}, \hat{E})$ удовлетворяет системе (13)–(14). Следовательно, множество допустимых пар не пусто и, как было показано выше, в этом случае задача P имеет решение.

Для доказательства единственности достаточно показать, что функционал (16) — строго выпуклый на множестве допустимых пар. Пусть $\{B_1, E_1\}$, $\{B_2, E_2\}$ — различные допустимые пары. Рассмотрим разность

$$aJ(E_1) + (1-a)J(E_2) - J(aE_1 + (1-a)E_2),\ a \in (0,1).$$

Учитывая линейность оператора G, получаем

$$aJ(E_1) + (1-a)J(E_2) - J(aE_1 + (1-a)E_2) =$$

$$= a(1-a)\left(\frac{1}{2}|G(B_1) - G(B_2)|^2_{t=T} + \int_0^T (\nu_m\|B_1 - B_2\|^2 + \nu\|G(B_1) - G(B_2)\|^2)dt\right) > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\{B, E\}$ — решение задачи P, тогда*

$$\|E\|^2_{U_e} = M^2. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пара $\{B_*, E_*\}$ является решением задачи P и $\|E_*\|^2_{U_e} < M^2$.

Перепишем функционал (16) в следующем виде:

$$J(E) = \int_0^T \left(\nu_m\|B\|^2 + \beta(u_x, B)\right) dt,$$

где $u = G(B)$. Поскольку система (13)–(14) устанавливает взаимно однозначное и непрерывное (в силу оценок (12)) соответствие между функциями E и B, в дальнейших рассуждениях будем рассматривать J как функционал, зависящий от $B \in \mathbb{Y}$.

Введем пространство

$$\Phi = \{\varphi \in \mathbb{Y},\ \varphi|_{t=0} = 0,\ \varphi|_{t=T} = 0\}.$$

Очевидно, что пара $(\hat{B}, \hat{E}) = (B_* + \varphi, E_* + I(\dot{\varphi}) - \nu_m\varphi_x - \beta G(\varphi) + \beta(G(\varphi), 1))$ является решением системы (13)–(14) и, в силу (7), (11), при малых φ удовлетворяет условию

$$\|\hat{E}\|_{U_e} = \|E + I(\dot{\varphi}) - \nu_m\varphi_x - \beta G(\varphi) + \beta(G(\varphi), 1)\|_{U_e} \leq$$

$$\leq \|E\|_{U_e} + \|\dot{\varphi}\|_{L^2(0,T;V')} + \nu_m\|\varphi\| + \beta C_\Omega\|\varphi\|_{\mathbb{Y}} + \beta C_\Omega\|\varphi\|_{\mathbb{Y}} \leq$$
$$< \|E\|_{U_e} + C\|\varphi\|_{\mathbb{Y}} < M.$$

Т.е. для любой $\varphi \in \Phi$ с малой нормой $\|\varphi\|_{\mathbb{Y}}$ пара $\{\hat{B}, \hat{E}\} \in \mathcal{D}$. Следовательно, пара $\{B_*, E_*\}$ является внутренней точкой множества $\mathcal{D}$. Тогда, учитывая, что в точке $\{B_*, E_*\}$ функционал J достигает минимального значения, для любого малого $\varphi \in \Phi$ должно выполняться равенство

$$\langle J'_B, \varphi\rangle = \int_0^T 2\nu_m(B_{*x}, \varphi_x) + \beta(u, \varphi_x) + \beta(G(\varphi), B_{*x})dt = 0. \tag{20}$$

Пусть $\psi = G(\varphi)$. Тогда, по определению оператора G, имеем

$$\dot{\psi} + \nu A\psi - \beta\varphi_x = 0,\ \varphi|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим решение $p \in \mathbb{Y}$ следующий задачи:

$$\dot{p} - \nu A p + \beta B_{*x} = 0, \ \ p|_{t=T} = 0. \tag{22}$$

Разрешимость задачи (22) следует из [12, с. 110, теорема 1.2], если сделать замену переменных $\tau = T - t$.

Умножим уравнение (21) на p, (22) на ψ и сложим полученные выражения. Интегрируя по частям и приводя подобные, получаем

$$(\varphi_x, p) = (B_{*x}, \psi) = (B_{*x}, G(\varphi)).$$

Подставляя в (20), приходим к уравнению

$$2\nu_m A B_* - \beta p_x - \beta u_x = 0. \tag{23}$$

Умножим полученное выражение скалярно на B_* и прибавим к нему уравнение (8), умноженное на u, и вычтем уравнение (22), умноженное на p. Интегрируя по частям и приводя подобные, получаем

$$\int_0^T 2\nu_m\|B_*\|^2 - \beta(p_x, B_*) - \beta(u_x, B_*) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 + \beta(B_*, u_x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p|^2 + \nu\|p\|^2 + \beta(B_*, p_x) dt =$$

$$\int_0^T \left(2\nu_m\|B_*\|^2 + \nu\|u\|^2 + \nu\|p\|^2\right) dt + \frac{1}{2}|u|_{t=T}|^2 + \frac{1}{2}|p|_{t=0}|^2 = 0.$$

Отсюда следует равенство $B_* = 0$, противоречащее (14), если $B_s \neq 0$.

Следствие. Задача P без ограничения (15) не имеет решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть $\{B, E\}$ — решение задачи (13)–(16). Определим число M_1 следующим образом:

$$\|E\|^2_{U_e} = M_1^2/4.$$

Тогда если $M_1 > 0$, то пара $\{B, E\}$ является решением задачи (15)–(16) при $M = M_1$ и по теореме 2

$$\|E\|^2_{U_e} = M_1^2.$$

Получили противоречие. Предположим теперь, что $M = 0$. Тогда $\|E\|_{U_e} = 0$, и из неравенств (12) следует $B \equiv 0$, что противоречит (14).

Используя результат теоремы 2, неравенство (15) в формулировке задачи P можно заменить равенством (19) и рассматривать задачу P как задачу оптимального управления с ограничениями типа равенства.

4. Вывод системы оптимальности

Выведем необходимые и достаточные условия экстремума задачи P, используя метод множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенства. Для этого рассмотрим задачу P как задачу минимизации функционала J, зависящего от $\{u, B\}$, на решениях системы (8)–(10) с ограничениями (14), (19). Здесь под решением задачи будем понимать тройку $\{u, B, E\} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_e$.

Теорема 3. *Пусть $M > M_0$. Тройка $\{\hat{u}, \hat{B}, \hat{E}\} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_D$ является решением задачи P тогда и только тогда, когда существуют функции $\{p_1, p_2\} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$, удовлетворяющие условиям*

$$-\dot{p_1} + \nu A p_1 + \beta p_{2x} = -2A\nu\lambda\hat{u}, \tag{24}$$

$$-\dot{p_2} + \nu A p_2 + \beta p_{1x} = -2A\nu_m \lambda \hat{B}, \tag{25}$$

$$p_1|_{t=T} = -\lambda \hat{u}(T), \quad \lambda \geq 0, \tag{26}$$

при этом

$$\hat{E} = -p_{2x}. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем отображение $L : \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_e \to L^2(0,T;V') \times H$, которое определяется равенством

$$L(u,B,E) = \{\dot{u} + \nu A u - \beta B_x, \dot{B} + \nu_m AB - \beta u_x - F(E), B|_{t=T}\}$$

и множества

$$U_d = \{E \in U_e : \|E\|_{U_e} \leq M\},\ X_d = \{(u,B,E) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_d\}.$$

Проверим, что выполнены все условия принципа Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенства [2, с. 76, теорема 1.3].

1. Покажем, что Im $L = L^2(0,T;V') \times H$, т.е. для любых $g_1, g_2 \in L^2(0,T;V')$, $h \in H$ существует тройка $u, B, E \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_e$, удовлетворяющая уравнениям

$$\dot{u} + \nu A u - \beta B_x = g_1,$$

$$\dot{B} + \nu_m AB - \beta u_x - F(E) = g_2,$$

$$B|_{t=T} = h.$$

Пусть $\varphi(t) \in C^\infty(0,T)$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = 1$. Выберем в качестве функции B произведение $B = \varphi\ B_1$, где $B_1 \in \mathbb{Y}$ является решением задачи с обратным временем

$$-\dot{B}_1 + \nu_m A B_1 = 0,\ B_1|_{t=T} = h.$$

Разрешимость уравнения следует из [12, с.110, теорема 1.2], если сделать замену $\tau = T - t$.

Функцию u определим из следующего уравнения:

$$\dot{u} + \nu A u = \beta B_x + g_1, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Наконец, найдем E из соотношений

$$E = I(\dot{B} - g_2) - \nu_m B_x - \beta u + \beta(u,1).$$

Из построения следует, что тройка $\{u,B,E\} \in \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times U_e$ удовлетворяет системе

$$L(u,B,E) = \{g_1, g_2, h\}.$$

2. Проверим, что $\mathrm{Int} X_d \bigcap \{(\hat{u}, \hat{B}, \hat{E}) + \mathrm{Ker} L\}$ непусто, здесь $\mathrm{Int} X_d$ — внутренность множества X_d. Пусть $\{u_*, B_*, E_*\}$ — решение задачи P, соответствующее ограничению M_0. Поскольку по условию теоремы $M > M_0$, то $E_* \in \mathrm{Int} U_d$ и тройка

$$\{u_*, B_*, E_*\} \in \mathrm{Int} X_d \bigcap \{(\hat{u}, \hat{B}, \hat{E}) + \mathrm{Ker} L\}.$$

3. Функционал J, зависящий от пары $\{u, B\}$, очевидно дифференцируем по Гато в точке $\{\hat{u}, \hat{B}\}$.

Таким образом, мы можем применить принцип Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u,B,E,\lambda,p_1,p_2,q) = \lambda J(B) + \langle \dot{u} + \nu A u - \beta B_x, p_1 \rangle_{L^2(0,T;H)} +$$

$$+\langle \dot B + \nu_m AB - \beta u_x - F(E), p_2\rangle_{L^2(0,T;H)} + (B|_{t=T} - B_s, q),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, $p_1, p_2 \in L^2(0,T;V)$ и $q \in H$. Согласно принципу Лагранжа, если $\{u, B, E\}$ являются решением задачи P, то существуют $\{\lambda, p_1, p_2, q\}$, одновременно не равные нулю, такие, что для любых $h_1, h_2 \in \mathbb{Y}$

$$\langle \mathcal{L}'_u, h_1\rangle = \lambda(u|_{t=T}, h_1|_{t=T}) + \int_0^T \Big(2\lambda\nu((u,h_1)) + (\dot{h_1} + \nu A h_1 - \beta h_{2x}, p_1)\Big)\, dt = 0,$$

$$\langle \mathcal{L}'_B, h_2\rangle = \int_0^T \Big(2\lambda\nu_m((B,h_2)) + (\dot{h_2} + \nu_m A h_2 - \beta h_{1x}, p_2)\Big)\, dt + (h_2|_{t=T}, q) = 0$$

и для любого $\xi \in U_e$ справедливо вариационное неравенство

$$\langle \mathcal{L}'_E, \xi - E\rangle = -\int_0^T (F(\xi - E), p_2) dt \geq 0. \tag{28}$$

Отсюда для p_1, p_2 получаем равенства

$$-\dot{p_1} + \nu A p_1 + \beta p_{2x} = -2\lambda\nu A u, \tag{29}$$

$$-\dot{p_2} + \nu_m A p_2 + \beta p_{1x} = -2\lambda\nu_m AB, \tag{30}$$

$$p_1|_{t=T} = -\lambda u(T), \quad p_2|_{t=T} = -q \tag{31}$$

Отметим, что уравнения (31) имеют смысл, поскольку из (29)–(30) следует, что $\dot{p_1}, \dot{p_2} \in L^2(0,T;V')$, и поэтому $p_1,\ p_2 \in C([0,T];H)$.

Рассмотрим вариационное неравенство (28). Поскольку множество управлений, в силу условия (15), есть шар, то из неравенства (28) следует, что $p_{2x} = -\lambda_1 E,\ \lambda_1 \geq 0$. Покажем, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим, что $\lambda_1 = 0$, тогда $p_{2x} \equiv 0$ и, в силу граничных условий, $p_2 \equiv 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда из уравнения (30) получаем $p_{1x} \equiv 0$ и $p_1 \equiv 0$. Получили противоречие, поскольку все множители Лагранжа равны нулю.

Следовательно, $\lambda > 0$. Умножим уравнение (29) на u и вычтем из него уравнение (8), умноженное на p_1:

$$-(\dot{p_1}, u) - (p_1, \dot u) + 2\lambda\nu\|u\|^2 + \beta(p_1, B_x) = 0.$$

Интегрируя полученное выражение по частям и учитывая (31) и соотношение $\beta p_{1x} = 2\lambda\nu_m B_{xx}$, приходим к равенству

$$\lambda |u|_{t=T}|^2 + \int_0^T \left(2\lambda\nu\|u\|^2 + 2\lambda\nu_m\|B\|^2\right) dt = 0.$$

Получаем противоречие, поскольку $B_s \neq 0$. Следовательно, $\lambda_1 > 0$. Сделав замену

$$p_1 = p_1/\lambda_1,\ p_2 = p_2/\lambda_1,\ \lambda = \lambda/\lambda_1$$

в уравнениях (29)–(31), приходим к искомой системе. Согласно [2, с. 76, теорема 1.3] полученные условия являются также и достаточными.

Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит. 2005. № 1. С. 64–77.
2. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научн. книга. 1999.
3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 174–187.
4. *Sermange M., Temam R.* Some mathematical questions related to the MHD equations // Comm. Pure Appl. Math. 1983. T. 36. C. 635-664.
5. *Barbu V., Havarneanu T., Popa C., Sritharan S.S.* Exact controllability for magnetohydrodinamic equation // Comm. Pure Appl. Math. 2003. T. 56. C. 732–783.
6. *Coron J.M.* On the controllability of 2D incompressible perfect fluids // J. Math. Pures. Appl. 1996. T. 75. C. 155–188.
7. *Fernandez-Cara E., Zuazua E.* The cost of approximate contollability for heat equation: The linear case // Advances Diff. Eqs. 2000. T. 5. C. 465–514.
8. *Russell D.L.* A unified boundary controllability theory for hiperbolic and parabolic partial differantial equations // Studies in Appl. Math. 1973. T. 52. C. 189–221.
9. *Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu.* Controllability of evolution equations // Lecture Notes Series 34. Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, Korea, 1996.
10. *Цыба В.Е.* Мультипликативное управление МГД течением Гартмана // Труды института системного анализа. 2008. №32(1). С. 87–100.
11. *Цыба В.Е., Чеботарев А.Ю.* Асимптотика оптимального управления магнитогидродинамическим течением // Ж. вычмсл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49. №3. С. 482–489.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 апреля 2009 г.

Tsiba V.E. Optimal rigid control problem for one-dimensional MHD flow. Far Eastern Mathematical Journal. 2009. V. 9. № 1–2. P. 194–203.

ABSTRACT

An optimal rigid control problem for one-dimensional magneto hydrodynamic flow between parallel planes is considered. We use the external electromotive forces as a control function and minimize the functional corresponded with their work. An existence and uniqueness theorem is proved and optimal system is derived.

Key words: *Key words: magneto hydrodynamic equation, rigid control, optimality system.*