

© И.П. Яровенко*

О диффузионном приближении для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния

Посвящается Н.В. Кузнецову в связи с 70-летием

Работа посвящена выводу диффузионного приближения для полихроматического уравнения переноса излучения в случае, когда среди видов взаимодействия излучения со средой преобладает комптоновское рассеяние. Полученное диффузионное приближение представляет собой вырождающееся параболическое уравнение. Обсуждается выбор начального условия для диффузионного приближения.

Ключевые слова: *теория переноса излучения, диффузионное приближение, комптоновское рассеяние.*

1. Введение

Интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения является довольно точной математической моделью процесса взаимодействия излучения с веществом. Но зачастую это уравнение представляется слишком сложным или недостаточно изученным объектом. В связи с этим существует стремление рассматривать другие, более простые или более привычные, описания процесса распространения излучения. К последним можно отнести диффузионное приближение.

Различные приближения широко используются в прикладных задачах теории переноса излучения для оценки количественных характеристик потока фотонов, и теория в этом направлении достаточно хорошо развита, особенно для моноэнергетического уравнения переноса излучения [1–3]. Интерес к диффузионным приближениям обусловлен тем обстоятельством, что решение задач теории переноса излучения, как правило, требует применения ресурсоемких алгоритмов и сопряжено с большой вычислительной сложностью, в то время как краевые задачи для диффузионного приближения зачастую могут быть решены в рамках классического курса математической физики.

Еще один из факторов, обуславливающий актуальность построения и исследования различных приближений для уравнения переноса излучения, связан с постановкой и исследованием обратных задач в терминах таких приближений. Эти задачи могут быть интерпретированы как задачи томографии. Диффузионные приближения применяются не только в рентгеновской, но и в оптической томографии для описания процессов распространения немодулированных потоков и волн диффузной плотности [4–8]. Как правило, диффузионные приближения представляют собой линейные дифференциальные уравнения в частных

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: yarovenko@iam.dvo.ru

производных второго порядка относительно некоторой функции u , имеющей смысл полной (усредненной по направлениям) интенсивности излучения в точке. Такой подход дает возможность использовать для исследования и решения обратных задач хорошо развитый для подобных уравнений математический аппарат [4,8].

Особенностью нашей работы является то, что диффузионное приближение строится для уравнения переноса излучения в случае преобладания (среди остальных видов взаимодействия излучения с веществом) некогерентного комптоновского рассеяния. Этот эффект для большинства веществ начинает проявляться на энергии порядка 10 кэВ. Он был открыт Комптоном в 1923 г. и представляет собой процесс некогерентного (с потерей энергии) рассеяния квантов на свободном электроны. При этом разность величин, обратно пропорциональных энергиям падающего и рассеянного фотонов, зависит только от угла рассеяния θ и не зависит от свойств рассеивающего вещества и энергии падающего излучения. Эта связь выражается соотношением Комптона, имеющим вид [9]

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha} + 1 - \cos \theta. \quad (1)$$

Здесь α, α' — энергии до и после рассеяния соответственно, выраженные в безразмерных единицах и связанные с энергией в электрон-вольтах соотношением $\alpha = E_0/E$, где E_0 — энергия покоя электрона. У фотона, имеющего безразмерную энергию α , вероятность рассеяться на угол θ определяется сечением Кляйна – Нишины – Тамма [9]. Интересно, что даже прямая задача для уравнения переноса излучения с сечением Кляйна – Нишины – Тамма в интеграле столкновений была строго исследована лишь недавно [10, 11]. Основная же масса работ по комптоновскому рассеянию посвящена разработке различных численных алгоритмов [12–15].

Полученное в работе диффузионное приближение для полихроматического уравнения переноса излучения представляет собой параболическое уравнение типа уравнения теплопроводности с обратным временем и поглощением тепла. При этом первая производная в уравнении описывает динамику усредненного по направлениям потока излучения в энергетическом диапазоне. Появление производной по энергетической переменной в диффузионном приближении приводит к необходимости задать не только граничные условия, которые очевидным образом вытекают из граничного условия для уравнения переноса излучения, но и начальное условие, которое отсутствует в изначальной постановке задачи. В работе рассматривается пример построения такого условия, вытекающего из физических особенностей комптоновского рассеяния.

2. Диффузионное приближение для уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием

Будем считать, что процесс переноса излучения рассматривается в некоторой области G , пусть фотоны в процессе взаимодействия излучения с веществом могут рассеиваться только по закону Комптона. Последнее предположение приводит к тому, что при переходе — в результате рассеяния — фотона с характеристиками (ω, α) в фотон с характеристиками (ω', α') эти переменные связаны соотношением Комптона, которое может быть записано следующим образом:

$$\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha), \quad g(\omega \cdot \omega', \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \alpha(1 - \omega \cdot \omega')}, \quad (2)$$

где $\omega \cdot \omega'$ означает скалярное произведение векторов ω и ω' , описывающих направления распространения фотона до и после рассеяния соответственно. Переменная ω изменяется на

единичной сфере Ω , а переменная ω' принадлежит подмножеству единичной сферы $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' : \omega' \in \Omega, \omega \cdot \omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\bar{\alpha}\}$, и верны неравенства $\alpha \leq g(\omega \cdot \omega', \alpha) \leq \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ — максимальная энергия излучения, испускаемая источниками.

Уравнение переноса в этом случае будет иметь вид [10,11]

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha) f(r, \omega, \alpha) = \\ = \int_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r, \omega, \omega', \alpha) f(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega' + J(r, \omega, \alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $f(r, \omega, \alpha)$ — плотность потока излучения в точке $r \in G$, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$ и имеющего энергию $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$; $\mu(r, \alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия излучения со средой в точке r при энергии α ; $J(r, \omega, \alpha)$ — плотность внутренних источников излучения. Функция $k(r, \omega, \omega', \alpha)$ называется индикатрисой рассеяния и для среды, состоящей из химического элемента с атомным номером Z , может быть записана в виде [16]

$$k(r, \omega, \omega', \alpha) = \sigma(r) \frac{S(x, Z)}{Z} k_{KN}(\omega \cdot \omega', \alpha). \quad (4)$$

Здесь $x = 29.1445\alpha\sqrt{1 - \omega \cdot \omega'}$ — момент электрона отдачи, величина $\sigma(r)$ описывает плотность электронов в точке r ; функция $k_{KN}(\omega \cdot \omega', \alpha)$ имеет вид

$$k_{KN}(\omega \cdot \omega', \alpha) = \frac{r_0^2 \chi_{[\alpha, \bar{\alpha}]}(g(\omega \cdot \omega', \alpha))}{2\sqrt{1 - \omega \cdot \omega'}} \left(\frac{1}{1 - \alpha(1 - \omega \cdot \omega')} - \alpha(1 - \omega \cdot \omega') + (\omega \cdot \omega')^2 \right) \quad (5)$$

и называется дифференциальным (по угловой переменной) сечением Кляйна – Нишины – Тамма [17]. Последнее соотношение получается из классической формулы интегрированием по переменной $\alpha' \in (\alpha, \bar{\alpha})$, $\chi_{[\alpha, \bar{\alpha}]}$ — характеристическая функция интервала $[\alpha, \bar{\alpha}]$. Функция $S(x, Z)$ в формуле (4) носит поправочный характер и называется функцией некогерентного рассеяния. Она позволяет учитывать наличие связи электронов в атоме вещества. Величина $S(x, Z)$ при фиксированном атомном номере Z представляет собой функцию, которая равна нулю при $x = 0$ и постепенно возрастает до Z при увеличении x .

На рис. 1 приведены графики функций $S(x, Z)/Z$ для углерода и свинца [16]. Как видно из графиков на рис. 1 и из определения величины x , введение функции некогерентного рассеяния приводит к уменьшению вероятности комптоновского рассеяния вперед ($\omega \cdot \omega' = 1$) и к некоторому увеличению вероятности рассеяния назад относительно первоначального движения фотона для небольших энергий и более тяжелых элементов. Учитывая, что количество электронов в атоме совпадает с атомным номером Z , физический смысл функции $S(x, Z)$ можно объяснить следующим образом: она описывает количество электронов в атоме, которые могут рассматриваться как свободные при заданных энергии и угле рассеяния. В случае, когда среда состоит из сложного химического вещества, индикатриса рассеяния получается как линейная комбинация индикатрис для химических элементов, входящих в состав этого вещества [16].

Отметим, что мы изначально ограничились в уравнении (1) учетом только комптоновского рассеяния. Приведем некоторую оценку того, в какой степени это является оправданным при конкретных расчетах. Коэффициент ослабления μ можно представить в виде $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_c + \mu_p$, где μ_f, μ_r, μ_c и μ_p — коэффициенты ослабления, обусловленные каждым из следующих видов взаимодействия: фотоэлектрического поглощения, релеевского рассеяния, комптоновского рассеяния, образования пар [9]. Таким образом, величины $\bar{\mu}_f = \mu_f/\mu$, $\bar{\mu}_r = \mu_r/\mu$, $\bar{\mu}_c = \mu_c/\mu$, и $\bar{\mu}_p = \mu_p/\mu$ характеризуют относительный вклад каждого из процессов в общий процесс взаимодействия излучения с веществом.

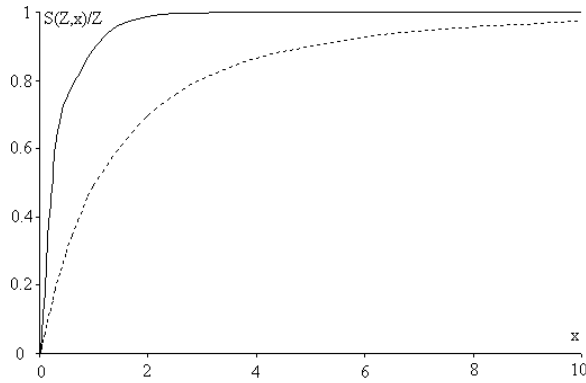


Рис 1. Графики нормированных функций некогерентного рассеяния для углерода (непрерывная кривая) и свинца (пунктирная кривая) в зависимости от момента электрона отдачи — x

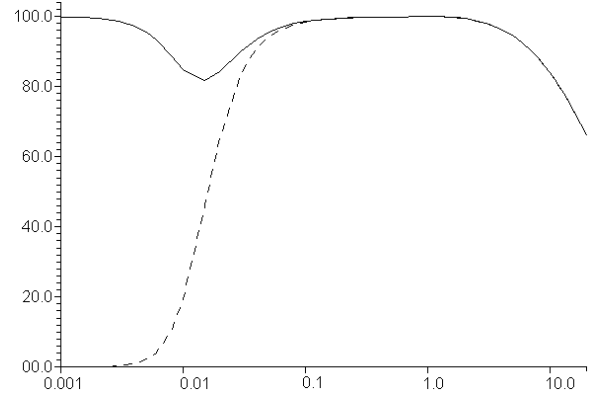


Рис 2. Вклад (в процентах) комптоновского рассеяния (пунктирная кривая) и суммарный вклад фотоэффекта и комптоновского рассеяния (сплошная кривая) в коэффициент полного взаимодействия для бериллия

В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости величин $\overline{\mu}_c$ (пунктирная кривая) и $\overline{\mu}_f + \overline{\mu}_c$ (сплошная кривая) от энергии для бериллия в интервале энергии от 1кэВ до 10МэВ. Вклад релеевского рассеяния в процесс взаимодействия оказывается незначительным почти на всем диапазоне энергий, и при энергии более 50 кэВ он не превышает 4,5%. Аналогично выглядят соответствующие зависимости и для других химических элементов с той лишь разницей, что с увеличением атомного номера элемента диапазон энергий, в котором вклад комптоновского рассеяния оказывается существенным, сдвигается вправо [18]. Графики на рис. 2 построены на основании таблиц [18].

Следуя стандартной схеме построения диффузионного приближения [1-3], разложим функции $f(r, \omega, \alpha)$ и $J(r, \omega, \alpha)$ в ряды Фурье по полной системе сферических функций:

$$f(r, \omega, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm}(r, \alpha) \cos m\gamma + b_{nm}(r, \alpha) \sin m\gamma) P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad (6)$$

$$J(r, \omega, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm}(r, \alpha) \cos m\gamma + B_{nm}(r, \alpha) \sin m\gamma) P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где $a_{nm}(r, \alpha)$, $b_{nm}(r, \alpha)$ и $A_{nm}(r, \alpha)$, $B_{nm}(r, \alpha)$ — соответствующие этим разложениям коэффициенты Фурье, функции $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ называются присоединенными функциями Лежандра и определяются следующим образом:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n], \quad (7)$$

здесь $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n .

Ограничиваясь в разложениях (6) первыми двумя членами, получаем следующие приближения для функций f и J :

$$\tilde{f}(r, \omega, \alpha) = f_0(r, \alpha) + \omega \cdot f_1(r, \alpha), \quad \tilde{J}(r, \omega, \alpha) = J_0(r, \alpha) + \omega \cdot J_1(r, \alpha), \quad (8)$$

где $f_0(r, \alpha) = a_{00}(r, \alpha)$, $f_1(r, \alpha) = (a_{11}(r, \alpha), b_{11}(r, \alpha), a_{10}(r, \alpha))$, $J_0(r, \alpha) = A_{00}(r, \alpha)$, $J_1(r, \alpha) = (A_{11}(r, \alpha), B_{11}(r, \alpha), A_{10}(r, \alpha))$.

Далее, для определения $a_{00}(r, \alpha) = f_0(r, \alpha)$, подставим приближения (8) в уравнение переноса (3):

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r(f_0(r, \alpha) + \omega \cdot f_1(r, \alpha)) + \mu(r, \alpha)(f_0(r, \alpha) + \omega \cdot f_1(r, \alpha)) = \\ = \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} k(r, \omega, \omega', \alpha) \left(f_0(r, g(\omega \cdot \omega', \alpha)) + \omega' \cdot f_1(r, g(\omega \cdot \omega', \alpha)) \right) d\omega' + \\ + J_0(r, \alpha) + \omega \cdot J_1(r, \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Будем считать, что фотоны рассеиваются преимущественно на малые углы, так что $\omega \cdot \omega' \sim 1$. Раскладывая под интегралом функции f_0 и f_1 в ряд Тейлора по переменной α и ограничиваясь в разложении для f_0 первыми двумя членами, а в разложении f_1 одним членом, получаем

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r(f_0(r, \alpha) + \omega \cdot f_1(r, \alpha)) + \mu(r, \alpha)(f_0(r, \alpha) + \omega \cdot f_1(r, \alpha)) = \\ = \mu_s^*(r, \alpha) f_0(r, \alpha) + \alpha^2 (\mu_s^*(r, \alpha) - \bar{\nu}(r, \alpha)) \frac{\partial}{\partial \alpha} f_0(r, \alpha) + \bar{\nu}(r, \alpha) \omega \cdot f_1(r, \alpha) + \\ + J_0(r, \alpha) + \omega \cdot J_1(r, \alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Величина

$$\mu_s^*(r, \alpha) = \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} k(r, \omega, \omega', \alpha, \alpha') d\omega' \quad (11)$$

называется двойственным коэффициентом рассеяния [17] и имеет следующий физический смысл: отношение $\mu_s^*(r, \alpha)/\mu(r, \alpha)$ показывает, какая часть фотонов в точке r с первоначальной энергией $\alpha' \in [\alpha, \bar{\alpha}]$ в результате комптоновского рассеяния на различные углы приобретет энергию α .

Функция

$$\bar{\nu}(r, \alpha) = \int_{\Omega_{\omega, \alpha}} (\omega \cdot \omega') k(r, \omega, \omega', \alpha, \alpha') d\omega' \quad (12)$$

обычно называется фактором анизотропии и представляет собой средний косинус угла рассеяния в точке r на энергии α [1–3].

Проинтегрировав равенство (10) по ω , и учитывая, что для произвольного трехкомпонентного вектора $F(r)$ выполняются тождества

$$\int_{\Omega} \omega \cdot F(r) d\omega = 0, \quad \int_{\Omega} \omega \cdot \nabla_r(\omega \cdot F(r)) d\omega = \frac{4\pi}{3} \operatorname{div} F(r), \quad \int_{\Omega} \nabla_r(\omega \cdot F(r)) d\omega = 0, \quad (13)$$

где в правой части последнего соотношения стоит нулевой вектор, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{3} \operatorname{div}_r f_1(r, \alpha) + (\mu(r, \alpha) - \mu_s^*(r, \alpha)) f_0(r, \alpha) - \alpha^2 (\mu_s^*(r, \alpha) - \bar{\nu}(r, \alpha)) \frac{\partial}{\partial \alpha} f_0(r, \alpha) = J_0(r, \alpha). \quad (14)$$

Умножая далее равенство (10) скалярно на ω и интегрируя его по ω , воспользовавшись соотношениями (13), в итоге приходим к еще одному уравнению, которое связывает величины f_0 и f_1 :

$$\nabla_r f_0(r, \alpha) + (\mu(r, \alpha) - \bar{\nu}(r, \alpha)) f_1(r, \alpha) = J_1(r, \alpha). \quad (15)$$

Исключая из (14) и (15) функцию $f_1(r, \alpha)$ и вводя обозначения

$$A(r, \alpha) = \mu_s^*(r, \alpha) - \bar{\nu}(r, \alpha),$$

$$\begin{aligned}
D(r, \alpha) &= \left(3(\mu(r, \alpha) - \bar{\nu}(r, \alpha)) \right)^{-1}, \\
\mu_a^*(r, \alpha) &= \mu(r, \alpha) - \mu_s^*(r, \alpha), \\
\tilde{J}(r, \alpha) &= J_0(r, \alpha) + \operatorname{div}_r \left[D(r, \alpha) J_1(r, \alpha) \right],
\end{aligned}$$

приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для неизвестной функции $f_0(r, \alpha)$:

$$\alpha^2 A(r, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} f_0(r, \alpha) = -\operatorname{div}_r \left[D(r, \alpha) \nabla_r f_0(r, \alpha) \right] + \mu_a^*(r, \alpha) f_0(r, \alpha) - \tilde{J}(r, \alpha). \quad (16)$$

Полученное уравнение представляет собой параболическое уравнение типа уравнения теплопроводности с обратным временем и поглощением тепла. При этом производная по переменной α описывает динамику усредненного по направлениям потока излучения в энергетическом диапазоне.

В случае, когда коэффициенты уравнения (16) не зависят от пространственной переменной, переход от безразмерной энергии α к длине волны в комптоновских единицах $\lambda = 1/\alpha$ [12] и введение замены

$$f_0(r, \lambda) = u(r, \lambda) \exp \left\{ \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{\mu_a^*(\lambda')}{A(\lambda')} d\lambda' \right\} \quad (17)$$

приводит нас к уравнению теплопроводности относительно новой функции $u(r, \lambda)$:

$$A(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u(r, \lambda) = D(\lambda) \Delta u(r, \lambda) + \tilde{J}(r, \lambda). \quad (18)$$

В последнем уравнении и соотношении (17) зависимость коэффициентов от α формально заменена на λ , но обозначения коэффициентов оставлены те же, что и раньше, $\bar{\lambda} = 1/\bar{\alpha}$.

3. Граничные и начальные условия

Для выделения единственного решения нам необходимо дополнить уравнение (16) граничными и начальными условиями. Граничные условия несложно получить из соответствующего условия для уравнения переноса излучения. Обычно краевое условие для него имеет вид

$$f(z, \omega, \alpha) = h(z, \omega, \alpha), \quad z \in \partial G, \quad \omega \cdot n(z) < 0, \quad \alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \quad (19)$$

где $n(z)$ — вектор внешней нормали в точке z . Условие такого типа имеет очевидный физический смысл и задает плотность потока излучения, входящего в область G извне.

При построении диффузионного приближения мы используем простейшую зависимость потока излучения от угловой переменной (8), задаваемую скалярным произведением. В связи с этим мы не можем удовлетворить граничному условию (19) точно, и необходимо построить некоторое его приближение. Классическим способом приближения этого условия является задание полного диффузионного потока, входящего внутрь области G [2,3]. Это условие имеет вид

$$\int_{\omega \cdot n(z) < 0} (n(z) \cdot \omega) \tilde{f}(z, \omega, \alpha) d\omega = \int_{\omega \cdot n(z) < 0} (n(z) \cdot \omega) h(z, \omega, \alpha) d\omega, \quad z \in \partial G. \quad (20)$$

Соотношение (20) может быть приведено к виду, содержащему только функцию f_0 . Для этого представим вектор-функцию $f_1(r, \alpha)$ в виде суммы нормальной и тангенциальной компонент:

$$f_1(z, \alpha) = f_{1n}(z, \alpha) n(z) + f_{1t}(z, \alpha) t(z),$$

где $t(z)$ — вектор, касательный к ∂G в точке z . Подставляя данное разложение в (20), приходим к следующему условию на границе:

$$\frac{1}{2}f_0(z, \alpha) + \frac{f_{1n}(z, \alpha)}{4\pi} = \int_{\omega \cdot n(z) < 0} (n(z) \cdot \omega)h(z, \omega, \alpha)d\omega = \tilde{h}(z, \alpha). \quad (21)$$

Учитывая, что $f_{1n}(z, \alpha) = n(z)f_1(z, \alpha)$, и подставляя выражение функции f_1 через f_0 из соотношения (15), окончательно получаем следующее граничное условие для уравнения (16):

$$\frac{1}{2}f_0 - \frac{3D}{4\pi} \frac{\partial f_0}{\partial n} = \tilde{h} - \frac{3D}{4\pi} n \cdot J_1. \quad (22)$$

Если граничное условие для уравнения (16) естественным образом вытекает из соответствующего условия для уравнения переноса излучения, то постановка начального условия не совсем очевидна. Остановимся более подробно на одном из вариантов начального условия для уравнения (16). Рассматривая уравнение (4) при энергии $\alpha = \bar{\alpha}$, несложно заметить, что интеграл столкновений в этом случае обращается в ноль. Указанное обстоятельство связано с тем, что при комптоновском рассеянии энергия фотонов может только уменьшиться, поэтому плотность потока излучения на максимальной энергии удовлетворяет уравнению переноса в случае отсутствия интеграла столкновений (фотоны, претерпевшие рассеяние, перейдут на другие уровни энергии). Учитывая этот факт, решение уравнения переноса для энергии $\alpha = \bar{\alpha}$ можно записать в явном виде:

$$f(r, \omega, \bar{\alpha}) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega, \alpha) \exp \left\{ - \int_0^{d(r, -\omega)} \mu(r - \omega t, \bar{\alpha}) dt \right\} + \\ + \int_0^{d(r, -\omega)} \exp \left\{ - \int_0^t \mu(r - \omega t, \bar{\alpha}) dt \right\} J(r - \omega t, \omega, \bar{\alpha}) dt, \quad (23)$$

где $d(r, \omega)$ — расстояние от точки r до границы области в направлении ω .

Интегрируя последнее выражение по переменной $\omega \in \Omega$ и вводя обозначение $\tau(r, \omega, t) = \int_0^t \mu(r - t'\omega, \bar{\alpha}) dt'$, после несложных преобразований имеем

$$f_0(r, \bar{\alpha}) = \varphi_0(r) = \int_{\partial G} h \left(\xi, \frac{r - \xi}{|r - \xi|}, \bar{\alpha} \right) \exp \left\{ -\tau \left(\xi, \frac{r - \xi}{|r - \xi|}, |r - \xi| \right) \right\} \frac{d\xi}{|r - \xi|^2} + \\ + \int_G J \left(z, \frac{r - z}{|r - z|}, \bar{\alpha} \right) \exp \left\{ -\tau \left(z, \frac{r - z}{|r - z|}, |r - z| \right) \right\} \frac{dz}{|r - z|^2}. \quad (24)$$

Отметим, что предложенное начальное условие не является единственно возможным. Оно более интересно с той точки зрения, что его вид вытекает непосредственно из физических особенностей комптоновского рассеяния. В прикладных задачах выбор начального условия должен производиться индивидуально, исходя из конкретной постановки задачи. По большому счету проблема выбора начального условия, с целью наилучшего соответствия между решениями уравнения переноса и диффузионного приближения, представляет собой отдельное направление исследований, такое же, как и оптимальный выбор граничных условий [19–21].

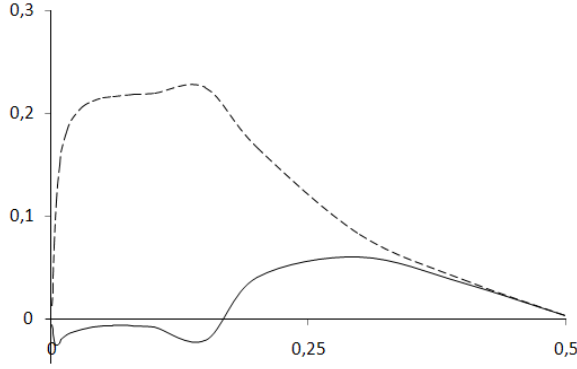


Рис. 3. Графики двойственного коэффициента рассеяния (пунктирная кривая) и фактора анизотропии (непрерывная кривая) для углерода в зависимости от энергии, $\bar{\alpha} \sim 0.511$ Мэв

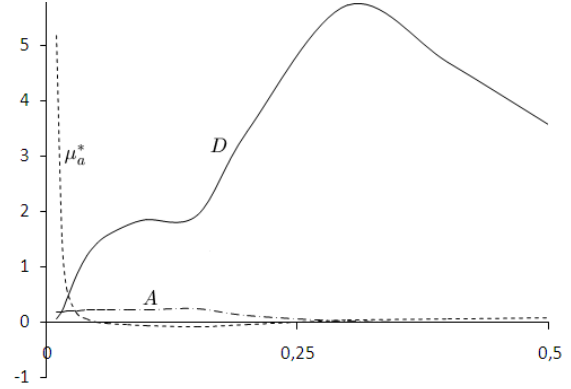


Рис. 4. Графики коэффициентов диффузионного приближения, в зависимости от энергии, для углерода. $\bar{\alpha} \sim 0.511$ Мэв

4. Заключение

Вид решения уравнения (16) во многом определяется его коэффициентами, и если зависимость коэффициентов по пространственной переменной определяется в основном плотностью электронов в среде, то зависимость по энергетической переменной более интересна. В связи с этим в заключение скажем несколько слов о характерном поведении коэффициентов диффузионного приближения.

Анализ таблиц [18] показал, что коэффициент $\mu_a^*(r, \alpha)$ может изменять знак, поэтому при различных значениях энергии член $\mu_a^* f_0$ может описывать как увеличение полной интенсивности, так и ее уменьшение. Коэффициент диффузии D , напротив, положителен на всем интервале энергий. Типичное поведение коэффициентов уравнения (16) приведено на рис. 4.

Коэффициент $A(r, \alpha)$, стоящий при первой производной, представляет собой разность двойственного коэффициента рассеяния μ_s^* и фактора анизотропии $\bar{\nu}$ и, в силу своего определения, не отрицателен. На рис. 3 изображены графики функций μ_s^* и $\bar{\nu}$, полученных интегрированием (11) и (12) при значении верхнего предела рассматриваемого диапазона энергий $\bar{\alpha} = 1 (\sim 0.511$ Мэв). Как видно из графиков, наблюдается быстрое убывание обеих функций до нуля при приближении энергии к верхней границе энергетического диапазона. Такое поведение вытекает из определения области интегрирования в формулах (11) и (12) и может быть объяснено следующим образом. Как уже говорилось, величина $\mu_{s,C}^*(\alpha)/\mu(\alpha)$ показывает, какая часть фотонов с первоначальной энергией $\alpha' \in [\alpha, \bar{\alpha}]$ в результате комптоновского рассеяния на различные углы приобретет энергию α . Неравенства $\alpha \leq \alpha' \leq \bar{\alpha}$, в частности, означают, что источники излучения не испускают фотонов, имеющих энергию выше $\bar{\alpha}$. Таким образом, учитывая соотношение Комптона (1), энергией α , близкой к $\bar{\alpha}$, будут обладать лишь фотоны, которые рассеялись в очень узком конусе относительно первоначального направления движения ($\omega \cdot \omega' \approx 1$). При этом естественно ожидать, что доля таких фотонов достаточно мала. Аналогичная ситуация справедлива и для фактора анизотропии $\bar{\nu}$.

Обращение коэффициента $A(r, \alpha)$ в ноль при $\alpha = \bar{\alpha}$ приводит к тому, что уравнение (16) в точке задания начального условия (24) вырождается к эллиптическому типу. В связи с этим начально-краевая задача (16),(22),(24) может и не иметь решения в классическом смысле. Таким образом, диффузионное приближение для уравнения переноса излучения в случае учета комптоновского рассеяния требует дальнейшего исследования.

Список литературы

1. *Лейпунский О.И., Новожилов Б.В., Сахаров В.И.* Распространение гамма-квантов в веществе. М.: ГИФМЛ. 1960
2. *Смелов В.В.* Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1976.
3. *Ishimaru A.* Wave Propagation and Scattering in Random Media. Academic Press, New York, 1978, Vol.1.
4. *Подгаецкий В.М., Селищев С.В., Терещенко С.А.* Модели распространения излучения для систем медицинской лазерной томографии. // Медицинская техника, 1999, №6, С. 3–11.
5. *Тучин В. В.* Исследование биотканей методами светорассеяния// Успехи Физических наук, 1997 (167), №5, С. 517–539.
6. *Arridge S.R.* Optical tomography in medical imaging. //Inverse Problems. 1999. Vol. 15. Issue 2. R41–R93.
7. *Ren K., Abdoulaev G.S., Bal G., Hielscher A.H.* Algorithm for solving the equation of radiative transfer in the frequency domain. //Optics Letters. 2004. Vol. 29. №6. P. 578–580.
8. *Ren K., Bal G., Hielscher A.* Frequency Domain Optical Tomography Based on the Equation of Radiative Transfer. //SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. Vol. 28. №4. P. 1463–1489.
9. *Фано У., Спенсер Л., Бергер М.* Перенос гамма излучения. М.: Госатомиздат, 1963.
10. *Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.* Комптоновский эффект в теории переноса излучения. // Доклады АН, 2004, Т. 398, №4, С. 462–465.
11. *Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.* Краевая задача для уравнения переноса с чисто комптоновским рассеянием // Сибирский математический журнал. 2005, Т. 46, №1, С. 3–16.
12. *Назаров В.Г., Солнышко Н.В., Яровенко И.П.* Численные эксперименты в теории переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния // СибЖИМ, 2005, Т. 8, №2, С. 135–143
13. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
14. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
15. *Михайлов Г. А.* Весовые методы Монте-Карло. изд. СОРАН, Новосибирск, 2000.
16. *Hubbell J.H., Veigele W.J., Briggs E.A., Brown R.T., Cromer D.T. and Howerton R.J.* Atomic Form Factors, Incoherent Scattering Functions, and Photon Scattering Cross Sections. J. Phys. Chem. Ref. Data 4, 471–538 (1975); erratum in 6, 615–616 (1977).
17. *Anikonov D.S., Nazarov V.G., and Prokhorov I.V.* Poorly Visible Media in X-Ray Tomography. – Utrecht-Boston. VSP. 2002. pp. viii+294p.
18. *Hubbell J.H. and Seltzer S.M.* Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements $Z = 1$ to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest, NISTIR 5632, 1995.

19. *Marshak R. E.* Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere // *Phys. Rev.* 1947. V. 71. P. 443–446.
20. *Germogenova T. A., Nikolaeva O. V.* Boundary condition for asymptotic approximations in two-region transport problem // *Proc. Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications.* Madrid, 1999. P. 1977–1986.
21. *Ковтанюк А.Е., Мальцева Е.В.* Влияние различных факторов на точность диффузионного приближения уравнения переноса в плоскопараллельном случае // *СибЖИМ*, 2003, Т. 6, №1, С. 40–50.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 мая 2009 г.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №09-01-98521), грантом конкурса Ведущих научных школ РФ (проект НШ-2810.2008.1) и грантами конкурса интеграционных проектов ДВО, СО и УРО РАН (№№09-II-CY-001, 09-II-CO-004)

Yarovenko I.P. About diffusion approximation for the radiation transfer equation with account of Compton scattering. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2009. V. 9. № 1–2. P. 209–218.

ABSTRACT

This paper deals with diffusion approximation for the radiation transfer equation which takes into account Compton scattering on electrons. Considered approximation is degenerate parabolic equation. The choice of initial conditions is discussed. Key words: *radiation transfer theory, diffusion approximation, Compton scattering.*