ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 3–8

УДК 511.14
MSC2000 01A20

© В.А. Быковский*

По следам далекого прошлого

Феодор из Кирены доказал, что $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ — иррациональные числа. Мы реконструируем доказательство Феодора.

Ключевые слова: *иррациональные числа, Платон, Феодор из Кирены.*

Введение

Платон (427–347 гг. до н.э.), ученик Сократа, жил в Афинах в эпоху Пелопоннесских войн. Он основал около 377 г. до н.э. философскую школу — Академию, которая просуществовала более девятисот лет, до 529 г. н.э., и была закрыта императором Юстинианом как языческая. Из сочинений Платона, дошедших до нас, можно получить некоторое представление об эпохе становления математики как науки в VI–V веках до н.э.

К числу математических фрагментов сочинений Платона, которые привлекают наибольшее внимание специалистов, относится следующий текст из диалога "Теэтет":

"Т е э т е т. Присутствующий здесь Феодор чертил нам что-то о квадратных корнях, показывая, что стороны квадратов, содержащих три и пять квадратных футов, несоизмеримы со стороной одного квадратного фута. Он выбирал один за другим квадраты вплоть до семнадцатифутового, а на нем остановился" (см [1] или [2]).

Вот уже два столетия специалисты пытаются реконструировать ход мысли Феодора из Кирены (V век до н.э.), опираясь на переводы фрагмента с древнегреческого, которые в смысловом плане не отличаются от вышеприведенного. В 90-е годы XX столетия на русском языке вышло собрание сочинений Платона, в котором интересующий нас текст (перевод с древнегреческого Т.В. Васильевой, т. 2) выглядит совершенно по-иному:

"Т е э т е т. Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата, налагая их на трехфутовый и пятифутовый соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовыми; и так перебирая один за другим, он дошел до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило...".

Комментируя этот перевод (см. [3], стр. 478), А.А. Тахо-Годи отметила: "... Впрочем, здесь, возможно, содержится намек на некий способ доказательства несоизмеримости отрезка длиной $\sqrt{n}$ (где n — неквадратное число) с единичным отрезком..."

В настоящей работе предлагается новая реконструкция доказательства Феодора, опирающаяся на перевод Т.В. Васильевой, которая подтверждает предположение А.А. Тахо-Годи.

1. Немного истории

Судя по комментариям Прокла (412—485 гг. н.э.) к Евклиду, "... Пифагор преобразовал занятия геометрией в свободную дисциплину, изучая ее высшие основания и рассматривая

* Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

теоремы “в отвлечении от материи” и ноэтически. Он же открыл теорию иррациональных и конструкцию космических фигур [= правильных многогранников]” (см [1]).

У нас нет оснований не доверять Проклу, человеку энциклопедического склада ума, в свое время возглавлявшему Академию Платона в Афинах. Тем более что он опирался на Евдема Родосского (IV век до н.э.), ученика Аристотеля, написавшего труд по истории ранней греческой математики. Мы точно не знаем, сам ли Пифагор открыл несоизмеримые величины или кто-то из его учеников. К сожалению, мы располагаем немногочисленными косвенными данными о математическом аппарате, на который они опирались при доказательстве тех или иных утверждений.

Благодаря открытому недавно сочинению арабского математика Ибн ал-Хусайна (X век н.э.), переведенному на русский язык в [4], подтвердилось предположение Б.Л. Ван дер Вардена (см [2]), что VII, VIII и IX книги “Начал” Евклида (см [5]), жившего в IV веке до н.э., являются обработками сочинений Архита Тарентского (ок. 428–ок. 365 г. до н.э.) и других математиков-пифагорейцев. В них излагается теория четных и нечетных чисел, построенная в эпоху раннего пифагорейства. У Аристотеля (384–322 гг. до н.э.) в “Первой аналитике” (см [6]) мы находим: “... при допущении положения, противоречащего первоначально принятому, вытекает нечто невозможное, как например, когда доказывают несоизмеримость диаметра со стороной, потому что, если допустить их соизмеримость, то нечетное число было бы равно четному”. Здесь речь идет о несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали.

Доказательство, о котором упоминает Аристотель, опирается на следующее утверждение (предложения 21–23 из девятой книги “Начал” Евклида).

Замечание 1. Произведение двух натуральных чисел четно тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей — четное число.

Действительно, если сторона и диагональ квадрата кратны одной длине, то по теореме Пифагора для некоторых натуральных a и b выполняется равенство

$$a^2 = 2b^2. \tag{1}$$

При этом a и b можно считать взаимно простыми (не имеют общего делителя, большего, чем единица). Согласно замечанию 1, a — четно и $\frac{a}{2} = a_1$ — натуральное число. Но тогда

$$(2a_1)^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2a_1^2 = b^2$$

и, следовательно, по той же причине b также четно. То есть a и b — четные числа, что противоречит предположению об их взаимной простоте.

Несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Замечание 2. Если площадь одного квадрата в два раза больше площади другого квадрата, то их стороны несоизмеримы.

При такой формулировке естественно возникает рассмотренный Феодором из Кирены вопрос о соизмеримости сторон квадратов, площадь одного из которых в n раз больше площади другого с натуральным $n > 1$. Другими словами, речь идет о разрешимости уравнения

$$a^2 = nb^2, \tag{2}$$

обобщающего (1), в натуральных a и b, которые можно считать взаимно простыми.

Замечание 3. Для n, отличающихся на квадраты натуральных чисел, уравнения вида (2) разрешимы только одновременно. Поэтому вопрос достаточно исследовать только для $n > 1$, не делящихся на квадрат, отличный от единицы.

Прежде всего заметим, что если $n = 2m$, где m — нечетное натуральное, то дословно повторяя рассуждения, как в случае $n = 2$, опирающиеся на замечание 1, получаем неразрешимость (2) при четных n, отличных от квадрата.

Проблемы возникают в случае нечетных n из следующего списка:

$$3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots . \tag{3}$$

Ж. Итар (см [7]) преобразовал (2) к виду

$$\frac{(a-1)(a+1)}{8} = n\frac{(b-1)(b+1)}{8} + \frac{n-1}{8}. \tag{4}$$

Из нечетности n, а также из взаимной простоты натуральных a и b следует нечетность последних. Для нечетного c одно из чисел $c-1$ и $c+1$ делится на 2, а второе — на 4. Поэтому левая часть (4) и первое слагаемое в правой части — целые числа. Следовательно, $n = 8k + 1$ при некотором натуральном k. Но все числа из (3) до 17 не имеют такого вида, и поэтому для них уравнение (2) неразрешимо.

Красивая идея! Но у нее, с интересующей нас точки зрения, имеются два недостатка:

(I) в дошедших до нас ранних античных источниках отсутствуют следы подобного рода рассуждений;

(II) во всех переводах указывается, что Феодор остановился на 17, а доказательство Итара не работает в этом случае.

Замечание 4. Две еще менее убедительные реконструкции приведены Б.Л. Ван дер Варденом в [2].

2. Новая реконструкция доказательства Феодора из Кирены

В переводе Т.В. Васильевой слова "... налагая их на трехфутовый и пятифутовый ..." в смысловом плане можно понимать как деление с остатком на 3 и 5. С современной точки зрения уже упоминавшиеся в предыдущем параграфе предложения 21—23 девятой книги "Начал" можно представить в виде следующей таблицы:

	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица 1.

При делении на 2 четные числа дают в остатке 0, а нечетные — 1. В результате их перемножения на пересечении вертикалей и горизонталей возникает остаток от деления произведения на 2. Эта таблица эквивалентна замечанию 1.

Действуя по аналогии, мы можем составить еще две таблицы произведений для остатков от деления на 3 и 5:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Таблица 2.

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Таблица 3.

Таблицы 2 и 3 содержат в себе следующие два аналога замечания 1.

Замечание 5. Произведение двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 3.

Замечание 6. Произведение двух натуральных чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на 5.

Эти утверждения позволяют доказать неразрешимость уравнения (2) для бесквадратных натуральных n, которые делятся на 3 или 5, точно так же, как в случае делимости на 2 (n — четное). Таким образом, нам осталось разобраться с числами

$$7, 11, 13, 17, 19. \tag{4}$$

Еще раз просматривая таблицу 2, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Замечание 7. Если в уравнении (2) n не делится на 3, то взаимно простые a и b также не делятся на 3 и их квадраты при делении на 3 дают в остатке 1.

Отсюда немедленно следует, что в рассматриваемом случае n имеет вид $3k + 1$ с натуральным k. Поэтому из списка (4) остаются только

$$7, 13, 19. \tag{5}$$

И наконец, в соответствии с таблицей 3, справедливо следующее утверждение.

Замечание 8. Если в уравнении (2) n не делится на 5, то взаимно простые a и b также не делятся на 5 и их квадраты при делении на 5 дают в остатке 1 или 4.

Нетрудно проверить, что в этом случае n имеет вид $5k+1$ или $5k+4$. Но первые два числа из (5) имеют другой вид. Таким образом, оперируя с остатками от деления на 2, 3, 5, мы доказали иррациональность $\sqrt{n}$ для всех неквадратных чисел n от 2 до 17 включительно.

Как уже отмечалось, вопрос об иррациональности $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ эквивалентен вопросу об иррациональности $\sqrt{2}$.

Особо отметим, что для числа 19, которое при делении на 3 дает в остатке 1, а при делении на 5 дает в остатке 4, наши рассуждения не дают ответа на интересующий нас вопрос.

Подытоживая вышесказанное, можно заключить:

(I) в переводе Т.В. Васильевой, как и предположила А.А. Тахо-Годи, содержится намек на идею доказательства Феодора — деление с остатком на 3 и 5;

(II) предлагаемая реконструкция, основанная на этой идее, исчерпывающе объясняет, почему Феодор остановился на 17.

В эпоху античности времен Платона математическая символика и формализм находились в зачаточном состоянии. По-видимому, Феодор остановился в своих исследованиях по причине крайней громоздкости рассуждений с остатками от деления на 7 и так далее.

В заключение мы можем сделать вывод о том, что уже в эпоху ранней античности (V-IV в. до н.э.) были открыты простейшие варианты метода редукции по модулю (переход от целочисленных решений к решениям в кольце классов вычетов) — мощного инструмента в теории диофантовых уравнений.

Послесловие

Продолжим цитирование приведенного во введении фрагмента из [3]:

"Т е э т е т. ... . И вот нам пришло на ум, поскольку число корней казалось бесконечным, попытаться объединить их все под одним именем, которым мы назовем все эти корни.

С о к р а т. Ну и как, нашли вы такое имя?

Т е э т е т. По-моему, нашли, но смотри сам.

С о к р а т. Говори.

Т е э т е т. Мы разделили все числа на два разряда. Те, которые способны получаться путем перемножения равных множителей, мы уподобили по фигуре квадрату и назвали их квадратными и равносторонними.

С о к р а т. Отлично.

Т е э т е т. А те, что находятся между ними, как, например, три, и пять, и всякое число, которое не может получиться из умножения равного на равное, но либо большего на меньшее, либо меньшего на большее, так что на фигуре оно всегда заключено между неравных сторон, мы уподобили прямоугольной фигуре и назвали прямоугольным числом.

С о к р а т. Отлично. Но что потом?

Т е э т е т. Все линии, которые квадрируют плоское равностороннее число, мы определили как длину; все что квадрируют прямоугольное число, — как потенции, поскольку они несоизмеримы с первыми по длине, но лишь по плоскости, которую они могут [$\sim$ обладают потенцией] [заключать в себе]. То же и об объемных фигурах".

Из этого текста мы узнаем, что живший в Афинах ученик Феодора и Платона Теэтет (около 410–368 гг. до н.э.) впервые доказал иррациональность $\sqrt{n}$ и $\sqrt[3]{n}$ для всех натуральных n, отличных от квадрата в первом случае и от куба — во втором. Скорее всего, он действовал точно так же, как в случаях делимости n на 2, 3 и 5, рассмотренных выше, опираясь на следующее фундаментальное утверждение, содержащееся в "Началах" Евклида.

Замечание 9. Произведение двух натуральных чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на это простое.

Список литературы

1. Фрагменты ранних греческих философов. Часть I. М: "Наука", 1989.

2. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, Греции. / Пер. с голландского / М: Физматгиз, 1959.

3. *Платон.* Собрание сочинений. Т.2. М: “Мысль”, 1993.

4. Научное наследство. Т.6. М: “Наука”, 1983.

5. Начала Евклида. Книги VII–X. Гос.изд. технико-теоретической лит. Москва – Ленинград. 1949.

6. *Аристотель.* Сочинения. Т.2, Москва, “Мысль”, 1978.

7. *Башмакова И.Ю., Лапин А.И.* Пифагор. Квант. Изд. “Наука”, 1986, стр. 7–12.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 декабря 2009 г.

Bykovskii V.A. In the wake of the old past. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 3–8.

ABSTRACT

Theodorus of Cyrene was proved that $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ are irrational numbers. We are reconstructing Theodorus prove.

Key words: *Irrational numbers, Plato, Theodorus of Cyrene.*