ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 9–19

УДК 539.3
MSC2000 74N10

© М.А. Гузев*

Двухфазная природа модели идеальной пластичности

С учетом относительного движения фаз построен класс двухфазных моделей деформируемого твердого тела и получены условия, при которых предложенная схема построения этих моделей в качестве предельного случая включают модель идеально-пластического тела.

Ключевые слова: *термодинамика, модель двухфазной среды, пластичность, химический потенциал.*

Введение

Проблема описания упруго-пластического поведения материалов является одной из центральных в механике деформируемого твердого тела. Разделение интересов исследователей в этой области связано с необходимостью решать различные задачи, в которых для описания внутренних свойств реальных материалов требуется — в общем случае — использование различных математических моделей.

В механике сплошной среды достаточно полно разработана математическая модель упругого деформирования материалов [1]. При построении теории упруго-пластического деформирования необходимо расширить число параметров описания. Однако механика деформируемого твердого тела как макроскопическая теория не учитывает внутренних механизмов упруго-пластического деформирования. С точки зрения физики упругая среда является идеальным кристаллом, а механизм пластических деформаций определяется структурными дефектами материала. При этом картина развития упругой деформации характеризуется более простыми физическими механизмами в отличие от упруго-пластических процессов. Известно, что анализ напряженно-деформированного состояния материалов в рамках модели упругой сплошной среды выполняется при условии, что внутренние напряжения в материале не приводят к проявлению его структурных свойств, зависящих, в частности, от характера нагружения, предыстории материала и других факторов. Тогда при введении феноменологических параметров в теорию для описания малой деформации достаточно использовать упругие постоянные, которые можно определить, используя результаты массового эксперимента.

Иная ситуация возникает при описании пластических свойств материала. Экспериментальные исследования показывают [2], что при пластическом течении идут процессы структурной перестройки. В классических моделях теории пластичности (см., например, [3]) учитывается только деформационное упрочнение материалов. Это реализуется в представлении деформаций в виде двухстадийного процесса: упругого и пластического. Для макроскопического уровня рассмотрения деформаций результаты теории находят экспериментальное

* Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио 7. Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru`

подтверждение. Тем не менее такой подход вступает в противоречие с экспериментально наблюдаемыми картинами развития пластической деформации на промежуточных — между микроскопическим и макроскопическим — масштабах. Выделение таких масштабов в кристалле определяется тем, что коллективные движения дефектов приводят к появлению в нем нового качественного состояния, характеризуемого существованием так называемых уровней деформации. Это, в частности, подтверждается экспериментально хорошо известным поведением поликристаллических материалов [2], проявляющих свойство порогового поведения при различных условиях внешнего воздействия, для которого процесс пластического течения является многостадийным.

Из вышесказанного ясно, что в математических моделях, построенных в физике пластичности, и в макроскопической теории пластичности деформируемого твердого тела пока нет той степени полноты и непротиворечивости, которая достигнута в модели упругой сплошной среды. Поэтому стремление исследователей решить проблему полного описания физико-механических свойств материалов всегда будет стимулировать разработку новых теоретических моделей поведения материалов в различных условиях.

С точки зрения механики процессы формирования пластических зон в материале можно рассматривать как появление областей новой фазы при деформировании твердого тела. Образование одной или нескольких фаз является следствием физико-химических превращений в материале, а скорость этих превращений зависит от механического состояния материала. В частности, свойство порогового поведения физико-механических характеристик упруго-пластических материалов экспериментально наблюдается, если интенсивность напряженности достигает предела текучести. С другой стороны, в механике деформируемого твердого тела при описании фазовых переходов вводится тензор химического потенциала [4]. Значит, должна существовать связь между поведением термомеханических характеристик упруго-пластического материала и его химическим потенциалом.

В данной работе материал рассматривается как двухфазная среда, состоящая из остова (решетки) и подвижных компонент, свободно перемещающихся по всему объему решетки. Последние можно рассматривать в межузловых областях решетки, при этом возможен переход компонент решетки в подвижные компоненты, что с точки зрения физики соответствует переходу из упругого состояния в пластическое при выполнении условия текучести. В работе построен класс двухфазных моделей деформируемого твердого тела при произвольных деформациях. Схема построения этих моделей является прямым обобщением классического формализма неравновесной термодинамики. Сформулированы условия, при которых эти модели совпадают с классическими моделями пластичности. Получено представление для тензора химического потенциала, определяющего фазовые превращения в материале.

1. Основные соотношения

Выпишем сначала балансовые уравнения сохранения для двухфазной сплошной среды. Для такой среды выполняется закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^k}{\partial x^{k,}} = 0, \tag{1}$$

в котором поток массы равен сумме потоков масс, связанных с каждой из фаз: $j^k = \rho_1 v_1^k + \rho_2 v_2^k$ (по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование). Коэффициенты ρ_1 и ρ_2 являются плотностями каждой из фаз, и их сумма равна плотности материала: $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Для одной из фаз закон сохранения массы выражается уравнением

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^k}{\partial x^k} = -\kappa_{12} - \frac{\partial i^k}{\partial x^k}, \tag{2}$$

в котором κ_{12} определяет интенсивность перехода первой фазы во вторую, а i^k — компоненты диффузионного потока.

Закон сохранения импульса представляется уравнением вида

$$\frac{\partial j^i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k} = 0, \tag{3}$$

в котором $\Pi^{ik} = \rho_1 v_1^i v_1^k + \rho_2 v_2^i v_2^k - \sigma^{ik}$ — тензор плотности потока импульса. Уравнения для сохранения энергии и энтропии напишем в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q^k}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial J^k}{\partial x^k} = D, \quad D \geq 0, \tag{4}$$

где Q^k и J^k — компоненты вектора потока энергии и вектора потока энтропии соответственно, D — диссипативная функция.

К сформулированным уравнениям необходимо добавить еще уравнение для скорости v_2^k и компонент тензора деформации ε_{ij}. Уравнение для скорости v_2^k мы запишем в виде

$$\frac{\partial v_2^k}{\partial t} + v_2^i \frac{\partial v_2^k}{\partial x^i} = I^k. \tag{5}$$

В правой части (5) мы ввели источник для второй фазы. В п. 2 будет показано, что структура этого источника определяется требованием представления диссипативной функции в виде билинейной формы термодинамических сил и потоков.

Чтобы записать уравнение для ε_{ij}, необходимо использовать предположения относительно кинематической структуры поля деформаций среды. В классической модели упругой среды предполагают [1], что тензор упругой деформации ε_{ij}совпадает с тензором Альманси полной деформации

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial \xi^a \partial \xi^a}{\partial x^i \partial x^j}\right), \quad \frac{d\xi^a}{dt} = \frac{\partial \xi^a}{\partial t} + v^k \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k} = 0.$$

Отсюда следует уравнение переноса для ε_{ij}:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \varepsilon_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \varepsilon_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) = e_{ij}.$$

Тензор ε_{ij} определяет метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$, который в процессе движения изменяется следующим образом:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = 0. \tag{6}$$

Однако при переходе компонент решетки в подвижные компоненты $\varepsilon_{ij} \neq A_{ij}$ и тензор g_{ij} не удовлетворяют уравнению (6). Для моделирования процессов такого типа предлагается модифицировать (6), вводя источник в правую часть [1, 5]:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = 2E_{ij}. \tag{7}$$

Ограничения, которые должны выполняться в общем случае, определяются свойством тензорной инвариантности и термодинамической корректности получаемых соотношений. Стоящий слева в (7) оператор сохраняет тензорный характер объекта, на который действует. Тензор g_{ij} характеризует деформацию решетки вместе с подвижными компонентами, поэтому v^k рассматриваются как компоненты средней скорости, определяемые через поток массы: $v^k = j^k/\rho$.

2. Диссипативная функция

Выписывание одних только балансовых уравнений сохранения в самом общем виде не представляет в настоящее время особого интереса для механики смесей, так как конкретное применение этих уравнений связано с использованием определенных гипотез о взаимодействии фаз. Реализуемый в дальнейшем подход получения уравнений движения связан с применением метода, использованного в двухскоростной гидродинамике сверхтекучего гелия [6]. Дело в том, что нельзя выбрать систему отсчета, в которой можно исключить относительное движение компонентов; поэтому нельзя разделить энергию системы на внутреннюю и кинетическую. Тогда надежным критерием согласования связей между величинами может служить принцип относительности Галилея. Перейдем в систему отсчета K_0, в которой подвижные компоненты покоятся, то есть скорость v_2^k равна нулю. Значения энергии E и потока массы j^k в системе отсчета наблюдателя связаны с их значениями E_0, j_0^kв системе K_0 следующими формулами преобразования [6]:

$$j^k = \rho v_2^k + j_0^k, \quad j_0^k = \rho_1 w^k, \quad w^k = v_1^k - v_2^k, \quad E = \frac{\rho \left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} + j_0^k v_2^k + E_0. \tag{8}$$

Пусть энергия E_0 рассматривается как функция компонент метрического тензора g_{ij}, удельной энтропии s, потока импульса j_0^k, плотности второй фазы ρ_2 и удовлетворяет термодинамическому соотношению

$$dE_0 = \mu^{ij} dg_{ij} + T d(\rho s) + w^k dj_0^k + \mu_1 d\rho_1. \tag{9}$$

Третье слагаемое отражает наличие движения в элементе континуума, которое нельзя устранить выбором системы отсчета. Соотношение (9) записывается в виде

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = \mu^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + T\frac{\partial \rho s}{\partial t} + w^k \frac{\partial j_0^k}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial t}. \tag{10}$$

Мы ввели объекты $\mu^{ij} = \partial E_0/\partial g_{ij}$ и $\mu_1 = \partial E_0/\partial \rho_1$, которые, как мы покажем в п. 4, определяет тензор химического потенциала среды и химический потенциал подвижных компонент.

Дальнейшие вычисления выполняем в следующем порядке. В уравнение сохранения энергии (4) подставляем E из (8), причем производная $\partial E_0/\partial t$ выражается согласно соотношению (10), в котором мы исключим производную $\partial \rho s/\partial t$ с помощью второго уравнения из (4), тогда получаем

$$\mu^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + T\left(D - \frac{\partial J^k}{\partial x^k}\right) + w^k\frac{\partial j_0^k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} + j_0^k v_2^k\right) + \mu_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial Q^k}{\partial x^k}.$$

Отсюда находим

$$D = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(J^k - \frac{Q^k}{T}\right) - \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}Q^k - \frac{1}{T}\mu^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{T}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} -$$

$$-\frac{1}{T}w^k\frac{\partial j_0^k}{\partial t} - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} + j_0^k v_2^k\right). \tag{11}$$

Рассмотрим два последних вклада в (11). Производные по времени от ρ исключаем с помощью (1), а производную от j_0^k мы выразим через производные от ρ, j^k согласно (8), (3). В результате получим

$$-\frac{1}{T}w^k\frac{\partial j_0^k}{\partial t} - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \left|\mathbf{v}\right|^2}{2} + j_0^k v_2^k\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{1}{T}\left(\frac{j^k \left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} + \rho_1 v_1^k v_1^i w^i\right) +$$

$$+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\left(\frac{j^k\left|\mathrm{v}_2\right|^2}{2}+\rho_1 v_1^k v_1^i w^i\right)-\frac{1}{T}j^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2}-v_1^i v_2^i\right)-$$

$$-\frac{1}{T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\left(\rho_1 v_1^k v_1^i+\rho_2 v_2^k v_2^i\right)-\frac{v_1^k}{T}\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial x^i}+\frac{\rho_2}{T}w^k\frac{\partial v_2^k}{\partial t}.$$

Остальные вклады в (11) следует записать в виде

$$-\frac{1}{T}\mu^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{T}v^k\mu^{ij}g_{ij}\right)+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}v^k\mu^{ij}g_{ij}+$$

$$+\frac{1}{T}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj}g_{ki}-\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks}\right)-\frac{1}{T}v^k g_{ij}\frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k}-\frac{2}{T}\mu^{ij}E_{ij}. \tag{12}$$

$$-\frac{\mu_1}{T}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\mu_1}{T}\left(\rho_1 v_1^k+i^k\right)+\frac{\mu_1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\left(\rho_1 v_1^k+i^k\right)\right)+\frac{\kappa_{12}}{T}\mu_1-\frac{1}{T}i^k\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}.$$

Выделим в тензоре напряжений девиаторную часть τ_k^i, полагая

$$\sigma_k^i=\tau_k^i-\delta_k^i p, \tag{13}$$

и запишем

$$\frac{v_1^k}{T}\frac{\partial \sigma_k^i}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{T}v_1^k\tau_k^i\right)+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^i}v_1^k\tau_k^i-\frac{1}{T}\tau_k^i\frac{\partial v_1^k}{\partial x^i}-\frac{1}{T}v_1^k\frac{\partial p}{\partial x^k}.$$

Сводя полученные выражения вместе, получим выражение для диссипативной функции в следующем виде:

$$D=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(J^k+\frac{1}{T}\left(-Q^k+\frac{j^k\left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2}+\rho_1 v_1^k v_1^i w^i+v^k\mu^{ij}g_{ij}-v_1^i\tau_k^i\right)+\mu_1\left(\rho_1 v_1^k+i^k\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\left(-Q^k+\frac{j^k\left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2}+\rho_1 v_1^k v_1^i w^i+v^k\mu^{ij}g_{ij}-v_1^i\tau_k^i+\mu_1\left(\rho_1 v_1^k+i^k\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{T}v_1^k\frac{\partial p}{\partial x^k}-\frac{v^k}{T}g_{ij}\frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k}+\frac{1}{T}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj}g_{ki}-\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks}\right)-$$

$$-\frac{1}{T}j^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2}-v_1^i v_2^i\right)-\frac{1}{T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\left(\rho_1 v_1^k v_1^i+\rho_2 v_2^k v_2^i\right)+\frac{\tau_k^i}{T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^i}+$$

$$+\frac{\rho_2}{T}w^k\frac{\partial v_2^k}{\partial t}-\frac{2}{T}v^k\mu^{ij}E_{ij}+\frac{k}{T}\mu_1-\frac{1}{T}i^k\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}. \tag{14}$$

Введем p по формуле

$$E_0+p=\frac{2}{3}\mu^{ij}g_{ij}+\mu_1\rho_1+\rho_1\left|\mathbf{w}\right|^2+T\rho s. \tag{15}$$

Дифференцируя (15) и используя (9), получим следующее выражение для дифференциалов термодинамических параметров:

$$dp = \frac{2}{3} g_{ij} d\mu^{ij} - \frac{1}{3}\mu^{ij} dg_{ij} + \rho_1 d\mu_1 + \rho s dT + j_0^k dw^k. \tag{16}$$

Это позволяет записать вклады из (14) следующим образом:

$$\frac{1}{T} v_1^k \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{v^k}{T} g_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{3}\frac{v_1^k}{T}\mu^{ij} g_{ij}\right) + \frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\frac{1}{3T}\mu^{ij} g_{ij} -$$

$$-\frac{1}{3T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k} v_1^k \mu^{ij} g_{ij} + \frac{1}{T}\left(v_1^k - v^k\right) g_{ij} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{T}\rho s v_1^k \frac{\partial T}{\partial x^k} + j_0^i \frac{\partial w^i}{\partial x^k} v_1^k. \tag{17}$$

Тогда диссипативная функция (14) равна

$$D = \frac{\partial}{\partial x^k}\Bigg(J^k + \frac{1}{T}\Big(- Q^k + \frac{j^k \left|\mathrm{v}_2\right|^2}{2} + \rho_1 v_1^k v_1^i w^i + v^k \mu^{ij} g_{ij} -$$

$$- \frac{v_1^k \mu^{ij} g_{ij}}{3} - v_1^i \tau_i^k + \mu_1 \left(\rho_1 v_1^k + i^k\right) \Big) \Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\Big(- Q^k + \frac{j^k \left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} + \rho_1 v_1^k v_1^i w^i + v^k \mu^{ij} g_{ij} -$$

$$- \frac{v_1^k \mu^{ij} g_{ij}}{3} - v_1^i \tau_i^k + \rho s T v_1^k + \mu_1 \left(\rho_1 v_1^k + i^k\right) \Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{T}\left(v_1^k - v^k\right) g_{ij} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{T}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj} g_{ki} - \delta_i^j \mu^{ks} g_{ks}\right) + \frac{\tau_k^i}{T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{1}{3T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\mu^{ij} g_{ij} + \frac{1}{T} j_0^i \frac{\partial w^i}{\partial x^k} v_1^k - \frac{1}{T} j^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\left|\mathrm{v}_2\right|^2}{2} - v_1^i v_2^i\right) -$$

$$- \frac{1}{T}\frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\left(\rho_1 v_1^k v_1^i + \rho_2 v_2^k v_2^i\right) + \frac{\rho_2}{T} w^k \frac{\partial v_2^k}{\partial t} - \frac{2}{T}\mu^{ij} E_{ij} + \frac{\kappa_{12}}{T}\mu_1 - \frac{1}{T} i^k \frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}. \tag{18}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что

$$j_0^i \frac{\partial w^i}{\partial x^k} v_1^k - j^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\left|\mathrm{v}_2\right|^2}{2} - v_1^i v_2^i\right) - \frac{\partial v_1^k}{\partial x^k}\left(\rho_1 v_1^k v_1^i + \rho_2 v_2^k v_2^i\right) +$$

$$+ \rho_2 w^k \frac{\partial v_2^k}{\partial t} = w^k \left(\frac{\partial v_2^k}{\partial t} + v_2^i \frac{\partial v_2^k}{\partial x^i}\right). \tag{19}$$

Поскольку

$$v_1^k - v^k = \frac{\rho_2 w^k}{\rho}, \tag{20}$$

то (19) группируется с $\left(v_1^k - v^k\right) g_{ij} \partial \mu^{ij} / \partial x^k$ в выражение

$$\rho_2 w^k \left(\frac{\partial v_2^k}{\partial t} + v_2^i \frac{\partial v_2^k}{\partial x^i} + \frac{1}{\rho} g_{ij} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Учитывая (20), объединим в (18) вклады, содержащие $\partial v_1^i / \partial x^j$, тогда это дает

$$\frac{1}{T}\frac{\partial v_1^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj} g_{ki} - \frac{2}{3}\delta_i^j \mu^{ks} g_{ks} + \tau_i^j\right).$$

Сводя все полученные выражения вместе, получаем следующее выражение для диссипативной функции

$$D = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(J^k + ...\right) + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\left(-Q^k + ...\right) +$$
$$+\frac{1}{T}\frac{\partial v_1^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \frac{2}{3}\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks} + \tau_i^j\right) + \frac{1}{T}\rho_2 w^k\left(\frac{\partial v_2^k}{\partial t} + v_2^i\frac{\partial v_2^k}{\partial x^i} + \frac{1}{\rho}g_{ij}\frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k}\right) -$$
$$-\frac{1}{T}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \delta_i^j\mu^{ks}g_{ks}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\rho_2 w^i}{\rho} - \frac{2}{T}\mu^{ij}E_{ij} + \frac{\kappa_{12}}{T}\mu_1 - \frac{1}{T}i^k\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}, \qquad (21)$$

где многоточием обозначены слагаемые, стоящие в круглых скобках (18).

В соответствии со стандартной схемой неравновесной термодинамики диссипативная функция должна быть представлена в виде билинейной формы термодинамических сил и потоков [7]. Правая часть выражения (21) этому условию не удовлетворяет. Чтобы ему удовлетворить, выберем источник в (5) в виде

$$I^k = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Gamma_q^k}{\partial x^q} - \frac{1}{\rho}g_{ij}\frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^k},$$

где функции Γ_q^k подлежат определению. Это позволяет в последнем слагаемом соотношения (21) выделить дивергентный вклад и билинейную форму термодинамических сил и потоков:

$$\frac{\rho_2 w^k}{\rho T}\frac{\partial \Gamma_q^k}{\partial x^q} = \frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{\rho_2 w^k}{\rho T}\right) + \frac{\rho_2}{\rho T^2}\frac{\partial T}{\partial x^q}\Gamma_q^k w^k - \frac{\Gamma_q^k}{T}\frac{\partial}{\partial x^q}\left(\frac{\rho_2 w^k}{\rho}\right).$$

Тогда выражение для диссипативной функции редуцируется к виду

$$D = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(J^k + ... + \frac{\rho_2 w^k}{\rho T}\right) + \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^k}\left(-Q^k + ... + \frac{\rho_2 w^k}{\rho T}\right) +$$
$$+\frac{1}{T}\frac{\partial v_1^i}{\partial x^j}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \frac{2}{3}\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks} + \tau_i^j\right) +$$
$$+\frac{1}{T}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \frac{2}{3}\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks} + \Gamma_i^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\rho_2 w^i}{\rho} - \frac{2}{T}\mu^{ij}E_{ij} + \frac{\kappa_{12}}{T}\mu_1 - \frac{1}{T}i^k\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}.$$

Выбирая компоненты J^k, Q^k в виде

$$J^k = \frac{1}{T}\left(Q^k - \frac{j^k\left|\mathbf{v}_2\right|^2}{2} - \rho_1 v_1^k v_1^i w^i - v^k\mu^{ij}g_{ij} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}v_1^k\mu^{ij}g_{ij} + v_1^i\tau_k^i - \mu_1\left(\rho_1 v_1^k + i^k\right) - \frac{\rho_2 w^k}{\rho}\right),$$
$$J^k - \rho s v_1^k = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x^k}, \quad i^k = -\lambda_1\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}\lambda, \quad \lambda,\ \lambda_1 \geq 0,$$

получаем представление для диссипативной функции

$$D = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial T}{\partial x^k}\frac{\partial T}{\partial x^k} + \frac{\lambda_1}{T}\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k}\frac{\partial \mu_1}{\partial x^k} + \frac{1}{T}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \frac{2}{3}\delta_i^j\mu^{ks}g_{ks} + \tau_i^j\right)\frac{\partial v_1^i}{\partial x^j} - \qquad (22)$$
$$-\frac{1}{T}\left(2\mu^{kj}g_{ki} - \delta_i^j\mu^{ks}g_{ks} + \Gamma_i^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\rho_2 w^i}{\rho} - \frac{2}{T}\mu^{ij}E_{ij} + \frac{\kappa_{12}}{T}\mu_1.$$

В такой форме диссипативная функция представлена в виде билинейной формы термодинамических сил и потоков: $D(X) = X^i Y_i$, $\partial D/\partial X^i = Y^i$, $D \geq 0$.

3. Переход к пластичности

Дальнейшая редукция соотношений для двухфазной среды к теории пластичности возможна при записи выражения (23) в принятом для теории пластичности виде

$$DT = v_i^k \tau_k^i. \tag{23}$$

С этой целью выберем $E_0 = E_0\left(s, g_{ij}, w^k\right), D = D\left(T, E_{ij}\right)$ и рассмотрим двухфазную среду в отсутствие вязкого трения, тогда

$$DT = -2\mu^{ij} E_{ij} + \kappa_{12}\mu_1. \tag{24}$$

Это позволяет найти функции τ_i^j, Γ_i^j:

$$\tau_i^j = -2\mu^{kj} g_{ki} + \frac{2}{3}\delta_i^j \mu^{ks} g_{ks}, \quad \Gamma_i^j = \delta_i^j \mu^{ks} g_{ks} - 2\mu^{kj} g_{ki}. \tag{25}$$

Тогда вклад в диссипацию (22), определяемый фазовыми переходами, имеет вид

$$DT = E_{ij} g^{kj} \tau_k^i - \frac{2}{3} E_{ij} g^{ij} \mu^{ks} g_{ks} + \kappa_{12}\mu_1. \tag{26}$$

Введем источник $e_i^k = E_{ij} g^{kj}$ и выделим в девиаторный вклад $\tilde{e}_k^i$, полагая

$$\tilde{e}_k^i = e_k^i - \frac{1}{3}\delta_k^i e_s^s.$$

Это позволяет записать (26) в виде

$$DT = \tilde{e}_i^k \tau_k^i - \frac{2}{3} E_{ij} g^{ij} \mu^{ks} g_{ks} + \kappa_{12}\mu_1. \tag{27}$$

Формула (27) совпадает с (23), если

$$v_i^k = \tilde{e}_i^k, \quad \kappa_{12}\mu_1 = \frac{2}{3} E_{ij} g^{ij} \mu^{ks} g_{ks}. \tag{28}$$

Чтобы выяснить физический смысл последнего условия, вычислим $e_k^k = E_{ij} g^{ij}$. Из (7) сразу следует

$$g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + v^k g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 2\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 2E_{ij} g^{ij}. \tag{29}$$

Используя тождество $\partial g/\partial x^k = g g^{ij} \partial g_{ij}/\partial x^k$, где $g = \det||g_{ij}||$, нетрудно из (28) получить

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{g}v^k}{\partial x^k} = \sqrt{g} E_{ij} g^{ij}.$$

Введем плотность ρ_0 в начальном состоянии и плотность $R = \rho_0\sqrt{g}$, тогда для R имеем

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R v^k}{\partial x^k} = R E_{ij} g^{ij}.$$

Сравним это уравнение с уравнением (1), в котором $v^k = j^k/\rho$. Они совпадают при условии $E_{ij} g^{ij} = 0$, тогда из (28) сразу следует $\kappa_{12} = 0$.

Таким образом, представление диссипативной функции в виде (22) возможно при условии, что след источника равен нулю: $e_k^k = E_{kj} g^{kj} = 0$. Это позволяет вычислить v_i^k (22). Пусть D — функция первой степени однородности от v_i^k: $D\left(\lambda\tilde{e}_i^k\right) = |\lambda|\, D\left(\tilde{e}_i^k\right)$. Воспользуемся условием текучести Мизеса для материала. Тогда

$$D=\tau_0\sqrt{\tilde{e}_i^k\tilde{e}_k^i},\quad \tau_i^j=\tau_0\frac{\tilde{e}_i^j}{\sqrt{\tilde{e}_i^k\tilde{e}_k^i}},$$

что эквивалентно соотношениям

$$\tilde{e}_i^j=\Lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_j^i},\quad f=\tau_i^k\tau_k^i-\tau_0^2.$$

В результате скорость изменения метрического тензора g_{ij} можно записать в виде

$$E_{ij}=\tilde{e}_i^k g_{kj}=\Lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_k^i}g_{kj}.$$

4. Химический потенциал

Рассмотрим следствия системы сформулированных уравнений (25). Подставляя сюда $\tau_k^i=\sigma_k^i+\delta_k^i p$ и используя (13), получаем для компонент тензора μ^{ij} следующее выражение:

$$\mu^{ij}=\frac{1}{2}g^{ik}\rho\mu_k^j,\quad \mu_k^j=\delta_k^j\left(e_0-Ts-c_1\left|\mathbf{w}\right|^2-c_2\mu_2\right)-\frac{\sigma_k^j}{\rho},\tag{30}$$

где e_0 — удельная плотность энергии E_0 в системе отсчета K_0, c_1 — концентрация первой фазы. Чтобы выяснить физический смысл тензора μ_j^i, рассмотрим случай, соответствующий среде без подвижных компонент ($\mu_2=0$):

$$\mu_k^j=\delta_k^j\left(e_0-Ts-c_1\left|\mathbf{w}\right|^2\right)-\frac{\sigma_k^j}{\rho}.\tag{31}$$

В предельном случае механического равновесия формула (31) переходит в

$$\mu_i^j=\delta_i^j\left(u-Ts\right)-\frac{\sigma_i^j}{\rho},\tag{32}$$

где u — удельная плотность внутренней энергии сплошной среды. Соотношение (32) представлено в эйлеровых переменных. Запишем его в лагранжевых переменных ξ. В этих переменных компоненты μ_j^i определяются в соответствии с правилами преобразования тензоров

$$\mu_\beta^\alpha(\xi)=\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^j}\mu_i^j(\mathbf{x}).$$

Подставляя сюда μ_j^i (32), получаем

$$\mu_\beta^\alpha(\xi)=\delta_\beta^\alpha\left(u-Ts\right)-\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\sigma_i^j}{\rho}.\tag{33}$$

Воспользуемся формулой, связывающей тензор Пиола – Кирхгофа π_i^α с тензором Коши:

$$\frac{\sigma_i^j}{\rho}=\frac{\pi_i^\alpha}{\rho_0}\frac{\partial x^j}{\partial\xi^\alpha},$$

где ρ_0 — плотность начальной конфигурации среды. Тогда соотношение (33) приводим к следующему виду:

$$\mu_\beta^\alpha(\xi)=\delta_\beta^\alpha\left(u-Ts\right)-\frac{\pi_i^\alpha}{\rho_0}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta}.\tag{34}$$

При рассмотрении когерентных фазовых равновесий в [4, с.85] согласно формуле (2.41) был введен контравариантный тензор химического потенциала. Справедливо утверждение: если в этой формуле выполнить операцию опускания индекса с помощью метрического тензора начальной конфигурации, использованного в [4], то получаемый тензор совпадает с $\mu_{\beta}^{\alpha}(\xi)$ (34) (доказательство этого факта для читателя является несложным упражнением из тензорного исчисления, поэтому мы его опускаем).

Рассмотрим случай наличия подвижных компонент ($\mu_2 \neq 0$). Пусть фазы находятся в механическом равновесии. Выберем в твердом теле поверхность, нормаль к которой соответствует одному из главных направлений тензора напряжений. Значение μ_k^k на этой поверхности равно

$$\mu_k^k = \delta_k^j \left(e_0 - Ts - c_2\mu_2\right) - \frac{\sigma_k^k}{\rho},$$

В работе [8, 9] показано, что правую часть этого выражения можно понимать как главное значение тензора химического потенциала μ_i^k неподвижного компонента твердого тела, а μ_2 — как химический потенциал так называемого подвижного компонента. Тогда вторая формула в (30) обобщает этот результат для случая относительного движения фаз.

5. Заключение

Использование формализма неравновесной термодинамики позволило построить класс двухфазных моделей механики деформируемого твердого тела при произвольных деформациях остова с учетом процессов перехода компонент твердого тела в раствор. Модель идеальной пластичности вкладывается в этот класс при определенном выборе диссипативной функции и энергии. При этом оказывается, что источник пластических деформаций, вычисляемый через девиатор тензора напряжений, допускает естественную интерпретацию в терминах тензора химического потенциала. Последний характеризует сродство химических реакций, а значит, скорость протекания процесса фазовых превращений. Для упругопластических материалов этот процесс обладает свойством порогового поведения, поскольку наблюдается при условии, что интенсивность напряжений достигает предела текучести. Тензор химического потенциала определяется микроструктурой материала, тогда установленная связь между ним и физико-механическими характеристиками материала показывает, как влияют его внутренние параметры на макроскопическое состояние материала. Полученные соотношения определяют степень функционального произвола между переменными и дают возможность определения феноменологических параметров модели.

Список литературы

1. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.

2. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др.* Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1990.

3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.

4. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990.

5. *Мясников В.П., Гузев М.А.* Геометрическая модель дефектной структуры упругопластической сплошной среды // ПМТФ. 1999. Т.40. №2. С. 163 - 173.

6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

7. *Пригожин И., Кодепуди Д.* Современная термодинамика М.: Мир, 2002.

8. *Русанов А.И.* Термодинамические основы механохимии // Ж. общей химии. 2000. Т.70. Вып.3. С. 353 - 382.

9. *Русанов А.И.* Тепловые эффекты в механохимии // Ж. общей химии. 2002. Т.72. Вып.3. С. 353 - 372.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 5 декабря 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №08-01-00581-а и частично в рамках проекта №09-01-12130-офи-м.

Guzev M.A. Two-phase feature of perfect plasticity model. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 9–19.

ABSTRACT

The two phase continuum model of solid is proposed. The model takes into account relative motion of phases and includes perfect plasticity model in the limit case.

Key words: *thermodynamics, continua, the two phase model, plasticity, chemical potential.*