ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 20–30

УДК 539.3
MSC2000 74C15

© М.А. Гузев, М.А. Шепелов*

Пороговое поведение механических характеристик в неевклидовой модели сплошной среды

Исследуется поведение материала с дефектами структуры типа дислокаций. Для описания его напряженно-деформированного состояния используется неевклидова модель сплошной среды. Показано, что полученное решение характеризуется свойством порогового поведения.

Ключевые слова: *дислокации, дефекты структуры, тензор Бюргерса, неевклидова модель сплошной среды.*

Введение

Экспериментальные исследования различных материалов показывают, что их физико-механические характеристики обладают свойством порогового поведения при различных условиях внешнего воздействия. В частности, для упруго-пластических материалов это проявляется в переходе из упругого состояния в пластическое, если интенсивность напряжений достигает предела текучести. В классических моделях пластичности для описания такого порогового поведения материала процесс деформирования представляется в двухстадийном виде: упругом и пластическом. При этом микроскопические механизмы, определяющие переход от одной стадии к другой, не рассматриваются. С точки зрения физики они связаны с наличием коллективного движения дефектов различных типов, поэтому свойство порогового поведения макроскопических характеристик упруго-пластических материалов при внешнем воздействии должно проявляться в поведении соответствующих характеристик дефектов.

В реальном материале дефекты присутствуют всегда и влияют на его напряженно-деформированное состояние, поэтому для их описания вводят такие понятия, как дислокации, дисклинации, вакансии, а также другие характеристики «дефектности». С точки зрения классической механики сплошной среды введенные различными исследователями характеристики для описания внутренней структуры материалов явным образом потребовали расширения кинематических оснований теории. В частности, в одной из пионерских отечественных работ [1] этого направления был построен вариант неевклидовой модели сплошной среды, который описывает распределение дислокаций и включает известные макроскопические модели. В дальнейшем варианты других неевклидовых моделей предложены в работах [2–4] (см. также ссылки в них). Проведенный в них анализ позволяет связать классические механические характеристики упруго-пластических материалов с полем плотности дефектов.

* Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио 7,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио 5.
Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru, sunwards@mail.ru`

Несмотря на развитый формализм неевклидовых моделей, их применение для решения конкретных задач идет не так активно. Одна из причин является психологической, так как приходится работать с объектами, не укладывающимися в рамки классических представлений исследователей. Другая причина имеет временной аспект: поскольку число степеней свободы в неевклидовой модели больше, чем в классической модели, то необходимо затратить больше времени при применении этой модели для анализа процессов деформирования, чем при применении в рамках апробированных подходов, например, макроскопической теории пластичности. Поэтому использование неевклидовых моделей для описания напряженно-деформированного состояния материалов важно для дальнейшего понимания возможностей неклассического подхода и интерпретации рассматриваемых явлений в рамках такого подхода.

В данной работе рассматривается механическое поведение образца, содержащего дислокации, под действием нагрузки. Для описания его состояния применяется модель, в которой неевклидовым параметром является тензор плотности дислокаций. В рамках предложенного ранее формализма построения неевклидовых моделей [5–8] сформулированы уравнения состояния для рассматриваемого материала, находящегося в состоянии равновесия. Для проведения дальнейшего анализа выполнен выбор внутренней энергии и диссипативной функции и построено решение плоской задачи с полярной симметрией. Показано, что характер поведения (осцилляционное или монотонное) решения существенно зависит от соотношения между параметрами, определяющими величину внешнего силового воздействия и степень дефектности сплошной среды.

1. Общие соотношения задачи

Рассмотрим материал, находящийся в состоянии равновесия, то есть компоненты напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где x_i — декартовые координаты, по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. На границе S среды ставятся силовые условия

$$\sigma_{ij} n_j |_S = P_i, \tag{2}$$

где n_j — компоненты единичного вектора нормали к границе, P_i — компоненты внешней поверхностной силы.

Пусть материал содержит дислокации, описание которых выполняется в рамках континуальной теории. В этом случае вводится тензор плотности дислокации (тензор Бюргерса) B_i^α. Он определяется через матрицу дисторсий P^α соотношениями [9]:

$$B_i^\alpha = -\varepsilon_{ikj} C_{kj}^\alpha,\ C_{kj}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_j^\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial P_k^\alpha}{\partial x^j}\right), \tag{3}$$

где ε_{ikj} — символ Леви – Чивита. Функции C_{kj}^α характеризуют отклонение дифференциальной структуры P_j^α от евклидовой структуры. Если $B_i^\alpha = 0$, то есть материал не содержит дефектов, то начальные координаты частиц $\xi^\alpha(x,t)$ можно восстановить по заданным дисторсиям P_i^α, так что $P_i^\alpha = \partial\xi^\alpha(\mathbf{x},\ t)\ /\partial x^i$. Если $B_i^\alpha \neq 0$, то поле дисторсий является несовместным, и интеграл от B_i^α по поверхности S_L , опирающейся на произвольный контур L, определяет сумму векторов Бюргерса $\mathbf{B}$ всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром [9]:

$$B^\alpha = \int_{S_L} dS^i B_i^\alpha = -\oint_L dx^k P_k^\alpha.$$

Чтобы записать уравнение состояния для рассматриваемого материала в рамках неевклидовой модели сплошной среды, необходимо задать внутреннюю энергию U и диссипативную функцию D. Получение соответствующих уравнений состояния было выполнено при различном выборе термодинамических переменных [5, 8]. В данной работе мы предполагаем, что внутренняя энергия U является функцией энтропии s, объектов C_{ij}^{α}, обобщенной дисторсии P_i^{α} и тензора деформации Альманси A_{ij}, определяющего изменение формы тела в евклидовой метрике внешнего наблюдателя. Напомним [5, 8], что при заданном поле скорости частиц объекты A_{ij}, P_i^{α}, C_{ij}^{α} являются решениями уравнений

$$\frac{dA_{ij}}{dt} + A_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + A_{kj}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right),$$

$$\frac{dP_i^{\alpha}}{dt} + P_k^{\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = -I_i^{\alpha}, \tag{4}$$

$$\frac{dC_{ij}^{\alpha}}{dt} + C_{ik}^{\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + C_{kj}^{\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_j^{\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial I_i^{\alpha}}{\partial x^j}\right),$$

где источники I_i^{α} определяются в соответствии с принципами неравновесной термодинамики. В силу линейности уравнений (4) представим дисторсию P_i^{α} в виде $P_i^{\alpha} = \partial\xi^{\alpha}\ /\partial x^i + \varphi_i^{\alpha}$. Учитывая, что $d\xi^{\alpha}/dt = 0$, отсюда и из (3), (4) следует

$$C_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j^{\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial\varphi_i^{\alpha}}{\partial x^j}\right),\ \frac{d\varphi_i^{\alpha}}{dt} + \varphi_k^{\alpha}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = -I_i^{\alpha}. \tag{5}$$

Вывод уравнения состояния для рассматриваемого материала выполняется аналогично тому, как это было сделано в [5, 8], поэтому мы его опускаем и приводим окончательный результат:

$$\sigma_{ij} = (\delta_{ik} - 2A_{ik})\,\rho\frac{\partial U}{\partial A_{kj}} - \rho\varphi_i^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial\varphi_j^{\alpha}} + 2\rho C_{ik}^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial C_{kj}^{\alpha}}, \tag{6}$$

$$\rho\frac{\partial U}{\partial\varphi_i^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^k}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{kj}^{\alpha}} = \frac{\partial D}{\partial I_i^{\alpha}},$$

где ρ — плотность материала. Соотношение (5) соответствует предположениям неравновесной термодинамики [10] о том, что диссипативная функция представляется билинейной формой термодинамических сил и потоков:

$$D = I_i^{\alpha}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\varphi_i^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^k}\rho\frac{\partial U}{\partial C_{ki}^{\alpha}}\right). \tag{7}$$

Дальнейшая редукция формул (6) связана с выполнением ряда гипотез. Предположим, что деформации малы: $|A_{ij}| << 1$, $|\varphi_i^{\alpha}| << 1$. Это позволяет перейти к укороченной форме записи в уравнениях (6)

$$\sigma_{ij} = \rho_0\frac{\partial U}{\partial A_{kj}}, \tag{8}$$

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial\varphi_i^{\alpha}} - \rho_0\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial U}{\partial C_{kj}^{\alpha}} = \frac{\partial D}{\partial I_i^{\alpha}},$$

где мы полагаем, что плотность остается постоянной: $\rho = \rho_0$. Для обеспечения неотрицательности D можно выбрать источник I_i^{α} в виде

$$I_i^{\alpha} = \xi\left(\rho_0\frac{\partial U}{\partial\varphi_i^{\alpha}} - \rho_0\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial U}{\partial C_{ki}^{\alpha}}\right),\ \xi \geq 0. \tag{9}$$

Поскольку материал рассматривается в состоянии равновесия, то стационарное уравнение для определения неевклидова параметра C_{ij}^{α}, как следует из (4), имеет вид

$$\frac{\partial I_i^{\alpha}}{\partial x_j} - \frac{\partial I_j^{\alpha}}{\partial x_i} = 0. \tag{10}$$

2. Линейное приближение для уравнений задачи

Зададим внутреннюю энергию как функцию инвариантов $A_{kk}, A_{ij}A_{ij}, \varphi_k^k, C_{ij}^{\alpha}C_{ij}^{\alpha}$ и ограничимся лишь малыми деформациями, тогда для внутренней энергии разложение представим в виде

$$\rho_0 U = \frac{\lambda_1}{2}\left(A_{kk}\right)^2 + \mu_1 A_{ij}A_{ij} + \nu A_{kk}(1 - \frac{\varphi_k^k}{2})\varphi_k^k + \frac{\mu_2}{4}C_{ij}^{\alpha}C_{ij}^{\alpha}, \tag{11}$$

где λ_1, μ_1, ν, μ_2 — феноменологические параметры. Отсюда и из (8) в линейном приближении следует выражение для тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} A_{kk} + 2\mu_1 A_{ij} + \nu \delta_{ij}\varphi_k^k. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (1), получаем $(\lambda_1 + \mu_1)\nabla A_{kk} + \nu\nabla\varphi_k^k + \mu_1 \Delta\mathbf{u} = 0$. Если воспользоваться тождеством $\nabla div\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} = rotrot\mathbf{u}$, то имеем

$$\nabla\left[\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)A_{kk} + \nu\varphi_k^k\right] = \mu_1 rotrot\mathbf{u}. \tag{13}$$

Подстановка (11) в (9) дает представление для источника в линейном приближении по φ_i^{α}:

$$I_i^{\alpha} = \xi\left[\nu A_{kk}(\delta_i^{\alpha} - \varphi_i^{\alpha}) - \frac{\mu_2}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}C_{ki}^{\alpha}\right] \tag{14}$$

Используя (5), запишем последнее слагаемое в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^k}C_{ki}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\Delta\varphi_i^{\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi_k^{\alpha}}{\partial x^k}\right).$$

Заметим, что функция C_{ki}^{α} не изменяется при градиентном преобразовании $\varphi_i^{\alpha} \to \varphi_i^{\alpha} + \partial f^{\alpha}/\partial x^i$. Такие преобразования возникают, например, в теории поля [11], когда рассматривается задача определения тензора электромагнитного поля через потенциалы. При этом электромагнитное поле инвариантно относительно градиентных (калибровочных) преобразований, а потенциалы определяются неоднозначно. Неоднозначное определение позволяет выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному условию

$$\frac{\partial\varphi_i^{\alpha}}{\partial x^i} = 0. \tag{15}$$

Соотношение (15) принято называть условием калибровки в форме Кулона [11]. Тогда (14) редуцируется к виду

$$I_i^{\alpha} = \xi[\nu A_{kk}(\delta_i^{\alpha} - \varphi_i^{\alpha}) - \frac{\mu_2}{4}\Delta\varphi_i^{\alpha}]. \tag{16}$$

Дальнейшие вычисления можно выполнить при понижении размерности задачи. Рассмотрим плоское деформированное состояние в предположении отсутствия зависимости от полярного угла. Тогда $\mathrm{rot}\mathbf{u} = 0$, и уравнение (13) интегрируется:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)A_{kk} + \nu\varphi_k^k = a. \tag{17}$$

Подставляя (16) в соотношение (10) и опуская простые калькуляции, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\mu_2}{4}\Delta\left(\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial\varphi_j^\alpha}{\partial x^i}\right)+\frac{\nu_1^2}{(\lambda_1+2\mu_1)}\left(\delta_i^\alpha\frac{\partial\varphi_k^k}{\partial x^j}-\delta_j^\alpha\frac{\partial\varphi_k^k}{\partial x^i}\right)+\nu_1 A_{kk}\left(\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial\varphi_j^\alpha}{\partial x^i}\right)=0. \qquad (18)$$

Учтем, что рассматривается плоская задача. Введем функции Φ^1, Φ^2, полагая, что

$$\varphi_1^\alpha=\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^2},\ \varphi_2^\alpha=-\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^1}. \qquad (19)$$

Заметим, что в предположении (19) условие калибровки (15) выполняется тождественно, при этом инвариант φ_k^k может быть записан в виде

$$\varphi=\varphi_k^k=\frac{\partial\Phi^1}{\partial x^2}-\frac{\partial\Phi^2}{\partial x^1}. \qquad (20)$$

Комбинирование (18),(19) позволяет получить следующие уравнения для функций Φ^1, Φ^2:

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_2}{4}\Delta^2\Phi^1+\nu A_{kk}\Delta\Phi^1+\frac{\nu^2}{(\lambda_1+2\mu_1)}\left(\frac{\partial^2\Phi^1}{\partial x^2\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi^2}{\partial x^1\partial x^2}\right)=0,\\ &\frac{\mu_2}{4}\Delta^2\Phi^2+\nu A_{kk}\Delta\Phi^2+\frac{\nu^2}{(\lambda_1+2\mu_1)}\left(\frac{\partial^2\Phi^2}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2\Phi^1}{\partial x^1\partial x^2}\right)=0.\end{aligned} \qquad (21)$$

Отсюда и из (20) получаем

$$\Delta\left[\frac{\mu_2}{4}\Delta\varphi+\nu\left(A_{kk}+\frac{\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\right)\varphi\right]=0.$$

Полагая $A_{kk}=a/(\lambda_1+2\mu_1)$, получим

$$\frac{\mu_2}{4}\Delta\varphi+\nu\frac{a+\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\varphi=0. \qquad (22)$$

Следует заметить, что решение этого уравнения обладает свойством порогового поведения в зависимости от соотношения между параметрами a и ν. Свяжем параметр a с величиной внешнего воздействия. Для решения этой задачи следует вычислить распределение поля напряжений.

3. Вычисление компонент поля напряжений

Рассмотрим модель, для которой можно получить решение в аналитической форме. Пусть сплошная цилиндрическая труба радиуса R находится под действием наружного давления P, тогда краевые условия (2) записываются в виде

$$\sigma_{rr}|_{r=R}=-P. \qquad (23)$$

Согласно уравнению состояния (6) компоненты напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\lambda_1(A_{rr}+A_{\varphi\varphi})+2\mu_1 A_{rr}+\nu\varphi,\\ \sigma_{\varphi\varphi}&=\lambda_1(A_{rr}+A_{\varphi\varphi})+2\mu_1 A_{\varphi\varphi}+\nu\varphi.\end{aligned} \qquad (24)$$

Вектор деформации $\mathbf{u}$ направлен по радиусу и является функцией только r. Поэтому $\mathrm{rot}\mathbf{u}=0$, и справедливо соотношение (17), которое в цилиндрических координатах записывается в виде

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru + \nu\varphi = a, \tag{25}$$

поскольку

$$A_{kk} = \frac{\partial u^k}{\partial x^k} = div\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}ru.$$

Интегрируя (25), находим

$$u = \frac{ar}{2(\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{b}{r} - \frac{\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)r}\int_R^r ds\varphi(s)s.$$

Компоненты тензора деформации вычисляются по формулам:

$$A_{rr} = \frac{du}{dr} = \frac{a}{2(\lambda_1 + 2\mu_1)} - \frac{b}{r^2} - \frac{\nu\varphi(r)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{\nu}{r^2(\lambda_1 + 2\mu_1)}\int_R^r ds\varphi(s)s,$$

$$A_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = \frac{a}{2(\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{b}{r^2} - \frac{\nu}{r^2(\lambda_1 + 2\mu_1)}\int_R^r ds\varphi(s)s.$$

Отсюда и из (24) нетрудно получить выражение для поля напряжений, которое должно удовлетворять условию (23). Это позволяет найти соотношение между параметрами a и b:

$$\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}a = \frac{2\mu_1 b}{R^2} - P. \tag{26}$$

Тогда

$$\sigma_{rr} = -P + \frac{2\mu_1 b}{R^2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{2\mu_1\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\frac{I_R(r)}{r^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P + \frac{2\mu_1 b}{R^2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2\mu_1\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\frac{I_R(r)}{r^2} + \frac{2\mu_1\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\varphi(r), \tag{27}$$

$$I_R(r) = \int_R^r ds\varphi(s)s.$$

Следует напомнить, что в классической теории упругости дополнительно к (23) формулируется условие для нахождения второй постоянной в решении. Так, например, для задачи о деформации полой трубы (задача Ламе) предполагается, что на внутренней границе трубы величина σ_{rr} равна $(-P_0)$ [12]. В предельном случае нулевого внутреннего радиуса имеем сплошную цилиндрическую трубу. Тогда краевое условие для нее записывается в виде:

$$\sigma_{rr}|_{r\to 0} = -P_0. \tag{28}$$

Поскольку σ_{rr} (26) содержит сингулярные вклады по r, то неизвестные постоянные следует выбирать такими, чтобы сингулярности скомпенсировали друг друга. Для определения этих постоянных необходимо знать поведение по r интеграла $I_R(r)$. С этой целью построим решение уравнения (22).

В цилиндрических координатах оно имеет вид

$$\frac{d}{dr}r\frac{d\varphi}{dr} + r\Gamma\varphi = 0, \tag{29}$$

$$\Gamma = \frac{4\nu}{\mu_2}\,\frac{a + \nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}$$

Решение $\varphi = \varphi(r)$ уравнения (28) совпадает с цилиндрической функцией нулевого порядка. В зависимости от знака это может быть функция Бесселя J_0 или цилиндрическая функция мнимого аргумента I_0:

$$\varphi(r) = J_0(r\sqrt{\Gamma}),\ \Gamma > 0,$$
$$\varphi(r) = I_0(r\sqrt{-\Gamma}),\ \Gamma < 0. \tag{30}$$

Используя (29), находим

$$I_R(r) = \int_R^r ds\varphi(s)s = -\frac{1}{\Gamma}\ s\frac{d\varphi(s)}{ds}\bigg|_R^r.$$

Это позволяет записать систему соотношений (27) в следующем виде:

$$\sigma_{rr} = -P + \frac{2\mu_1 b}{R^2} - \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{\varphi'(r)}{\Gamma r} - \frac{2\mu_1 b}{r^2} + \frac{2\mu_1\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\frac{R}{\Gamma}\frac{\varphi'(R)}{r^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P + \frac{2\mu_1 b}{R^2} + \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{\varphi'(r)}{\Gamma r} + \frac{2\mu_1 b}{r^2} - \frac{2\mu_1\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\frac{R}{\Gamma}\frac{\varphi'(R)}{r^2} + \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\varphi(r). \tag{31}$$

Первое соотношение не имеет особенностей при $r \to 0$ из-за условия (28). Тогда последние два слагаемых должны скомпенсировать друг друга, а первые три дают $(-P_0)$:

$$-2\mu_1 b + \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{R}{\Gamma}\varphi'(R) = 0,$$
$$-P + \frac{2\mu_1 b}{R^2} - \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{\varphi'(r)}{\Gamma r}\bigg|_{r\to 0} = -P_0. \tag{32}$$

Чтобы вычислить предел в (32), воспользуемся свойством цилиндрических функций

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z),\ \frac{dI_0(z)}{dz} = I_1(z); J_1(z), I_1(z) \sim \frac{z}{2}, (z \to 0). \tag{33}$$

В результате получим

$$\frac{\varphi'(r)}{r} = -\sqrt{\Gamma}\ \frac{J_1(\sqrt{\Gamma}r)}{r}\bigg|_{r\to 0} = -\frac{\Gamma}{2}, \Gamma > 0,$$
$$\frac{\varphi'(r)}{r} = \sqrt{-\Gamma}\ \frac{I_1(\sqrt{-\Gamma}r)}{r}\bigg|_{r\to 0} = -\frac{\Gamma}{2}, \Gamma < 0.$$

Отсюда и из (32) следует

$$\frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{1}{\Gamma R}\varphi'(R) = P - P_0 - \frac{\mu_1\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1},$$
$$b = \frac{\nu}{\lambda_1 + 2\mu_1}\frac{R}{\Gamma}\varphi'(R). \tag{34}$$

Таким образом, требование регулярности поля напряжений при $r \to 0$ вместе с краевыми условиями (23),(28) приводят к системе соотношений (26), (34). Выражение для напряжений дается формулой (31), в которую явно входит функция $\varphi(r)$. Из-за свойства (30) поведение $\varphi(r)$ качественно меняется при $\Gamma = 0$: происходит переход от осцилляций к монотонному поведению. Следовательно, компоненты напряжений обладают свойством порогового поведения при изменении параметра Γ. Установим связь между Γ и параметрами P, P_0, что позволит получить выражение для постоянных a и b, а также сформулировать условия, при которых построенное решение существует.

4. Определение пороговых характеристик материала

Исключим $\varphi'(R), b$ из соотношений (26), (34), в результате получаем

$$\frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1}a = -\left(P_0 + \frac{\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\right). \tag{35}$$

Пусть $\Gamma > 0$, то есть $a+\nu > 0$; тогда, используя (35), получаем неравенство

$$-\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}P_0 - \frac{\mu_1\nu}{\lambda_1+\mu_1} + \nu > 0,$$

которое эквивалентно условию

$$P_0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\nu. \tag{36}$$

Если $\Gamma < 0$, то есть $a+\nu < 0$, то

$$-\frac{\lambda_1+2\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}P_0 + \frac{\mu_1\nu}{\lambda_1+\mu_1} + \nu < 0,$$

и справедливо условие

$$P_0 > \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\nu. \tag{37}$$

Теперь воспользуемся формулами (30), (33). В этом случае первое соотношение в (34) записывается в виде

$$J_1(R\sqrt{\Gamma}) = \frac{R\sqrt{\Gamma}}{2}\left[1 + \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\mu_1\nu}(P_0-P)\right], \Gamma > 0; \tag{38}$$

$$I_1(R\sqrt{-\Gamma}) = \frac{R\sqrt{-\Gamma}}{2}\left[1 + \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\mu_1\nu}(P_0-P)\right], \Gamma < 0. \tag{39}$$

Параметр Γ вычисляется согласно формуле (29), в которой постоянная a определяется из (35).

Соотношения (36)–(39) определяют область допустимых значений R. Решение для уравнения (38) существует, если

$$1 + \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\mu_1\nu}(P_0-P) > 0, P_0 - P < 0.$$

Это эквивалентно неравенствам

$$P_0 < P < P_0 + \frac{\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}. \tag{40}$$

Таким образом, если заданы параметры P_0, P, удовлетворяющие неравенствам (36),(40), то величина R определяется из уравнения (38). С точки зрения физики оно означает, что образец, содержащий дефекты дислокационного типа, может находиться в состоянии равновесия, если имеет вполне определенный радиус. Другими словами, чтобы образец произвольного радиуса R, содержащий дефекты дислокационного типа, находился в равновесии, необходимо создать радиальное напряжение по оси и на границе, удовлетворяющее неравенствам (36),(40). При этом поле напряжений (31) имеет вид

$$\sigma_{rr} = -P + \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\left[\frac{J_1(r\sqrt{\Gamma})}{r} - \frac{J_1(R\sqrt{\Gamma})}{R}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P - \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\left[\frac{J_1(R\sqrt{\Gamma})}{R} + \frac{J_1(r\sqrt{\Gamma})}{r}\right],$$

Отсюда видно, что из-за наличия функции $J_1(z)$ компоненты напряжений имеют осциллирующее поведение, то есть существуют области растяжения и сжатия в образце.

Вторая система неравенств (37),(39) совместна, если $P_0 - P > 0$. В этом случае радиус образца определяется из уравнения (39). Однако компоненты напряжений внутри материала монотонно изменяются вдоль радиуса:

$$\sigma_{rr} = -P + \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{1}{\sqrt{-\Gamma}}\left[\frac{I_1(r\sqrt{-\Gamma})}{r} - \frac{I_1(R\sqrt{-\Gamma})}{R}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P - \frac{2\mu_1\nu}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{1}{\sqrt{-\Gamma}}\left[\frac{I_1(R\sqrt{-\Gamma})}{R} + \frac{I_1(r\sqrt{-\Gamma})}{r}\right].$$

В механике сплошной среды предложены различные критерии прочности материала, согласно которым значения напряжений не могут превосходить некоторой величины, иначе материал разрушается. Следовательно, если указать критические значения для компонент σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, то можно найти максимально допустимые размеры образца с дефектами структуры, находящегося в состоянии равновесия.

5. Тензор плотности дислокаций

В предложенной нами модели дополнительным краевым параметром является функция φ_k^k. Однако, как указано выше, физический смысл имеет тензор плотности дислокаций (3), для которого справедливо следующее выражение:

$$B_3^\alpha = -2\varepsilon_{312}C_{12}^\alpha = \frac{\partial\varphi_1^\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi_2^\alpha}{\partial x^1} = \Delta\Phi^\alpha. \tag{41}$$

Целью дальнейших вычислений является доказательство утверждения: класс допустимых решений для B_3^α включает функции, определяемые из уравнения (29). Для этого надо воспользоваться системой (21). Заметим, что в ней при замене индекса $1 \to 2$ первые соотношения переходят во вторые; тогда достаточно получить уравнение только для Φ^1 или для Φ^2.

Исключая Φ^2 в (21), получим

$$\left(\frac{\mu_2}{4}\Delta^2 + \nu A_{kk}\Delta + \frac{\nu^2}{(\lambda_1+2\mu_1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}\right)\times\left(\frac{\mu_2}{4}\Delta^2 + \nu A_{kk}\Delta + \frac{\nu^2}{(\lambda_1+2\mu_1)}\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}\right)\Phi^1 =$$

$$= \left(\frac{\nu^2}{\lambda_1+2\mu_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}\Phi^1.$$

Отсюда получаем уравнение на Φ^1

$$\Delta^2\left[\left(\frac{\mu_2}{4}\right)^2\Delta^2 + \frac{\mu_2\nu}{4}\left(2A_{kk} + \frac{\nu}{(\lambda_1+2\mu_1)}\right)\Delta + \nu^2\left(A_{kk}^2 + \frac{A_{kk}\nu}{(\lambda_1+2\mu_1)}\right)\right]\Phi^1 = 0. \tag{42}$$

Рассмотрим выражение в скобках как квадратный трехчлен

$$A\Delta^2 + B\Delta + D = (A\Delta + \frac{B}{2A})^2 + D - \left(\frac{B}{2A}\right)^2, \tag{43}$$

коэффициенты которого A, B, D определяются в соответствии с (42):

$$A = \frac{\mu_2}{4},\ B = \frac{\mu_2}{4}\left(2A_{kk} + \frac{\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\right),\ D = \nu^2\left(A_{kk}^2 + \frac{A_{kk}\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\right).$$

Тогда последние два слагаемых в (43) равны

$$D - \left(\frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{\nu^4}{4(\lambda_1 + 2\mu_1)^2}$$

и уравнение (42) редуцируется к

$$\left[\left(\frac{\mu_2}{4}\Delta + \frac{\nu}{2}\left(2A_{kk} + \frac{\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\right)\right)^2 - \frac{\nu^4}{4\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)^2}\right]\Phi^1 = 0.$$

Оно записывается в следующем виде:

$$\left(\frac{\mu_2}{4}\Delta + \nu A_{kk}\right)\left(\frac{\mu_2}{4}\Delta + \nu\left(A_{kk} + \frac{\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\right)\right)\Phi^1 = 0. \tag{44}$$

Инвариант A_{kk} связан с φ_k^k соотношением (17), но при получении уравнения для B_3^α мы следуем линейному приближению относительно полей φ_k^α. В этом случае величина A_{kk} равна $A_{kk} = a/(\lambda_1 + 2\mu_1)$. Отсюда и из (41),(44) получаем

$$L_1 L_2 B_3^\alpha = 0, \tag{45}$$

$$L_1 = \frac{\mu_2}{4}\Delta + \frac{a\nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)},\ L_2 = \frac{\mu_2}{4}\Delta + \nu\frac{a + \nu}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}.$$

Решение B_3^α имеет следующую структуру:

$$B_3^\alpha = B_1^\alpha + B_2^\alpha,\ L_1 B_1^\alpha = 0,\ L_2 B_2^\alpha = 0.$$

Заметим, что последнее уравнение совпадает с (22). Это означает, что, полагая $B_1^\alpha = 0$, имеем решение для B_3^α, определяемое функцией φ. Таким образом, для B_3^α справедливы сформулированные в п. 3 утверждения о свойствах порогового поведения для φ при различных соотношениях между параметрами.

Заключение

Выполненный в данной работе анализ напряженно-деформированного состояния материала, содержащего дефекты, показал, что соответствующие характеристики модели обладают критическим характером поведения. При этом управляющим параметром модели является параметр неевклидовости. Хотя полученные результаты справедливы при конкретном выборе параметризации дефектности структуры, они допускают обобщение для аналогичных неевклидовых моделей, а значит, для материала с другим набором дефектов.

Список литературы

1. *Бердичевский В.Л., Седов Л.И.* Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности // ПММ. 1967.Т.31.№.6.С. 981 – 1000.

2. *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987.

3. *Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др.* Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1990.

4. *Grachev A.V., Nesterov A.I., and Ovchinikov S.G.* The Gauge Theory of Point Defects // Phys.Stat. Sol.(b).1989. V.156.P. 403 – 410.

5. *Гузев М.А., Мясников В.П.* Термомеханическая модель упруго-пластического материала с дефектами структуры // МТТ. 1998. №4.С. 156 – 172.

6. *Мясников В.П., Гузев М.А.* Аффинно-метрическая структура упруго-пластической модели сплошной среды // Труды МИАН. М: Наука. 1998. Т.223. С. 30 – 37.

7. *Мясников В.П., Гузев М.А.* Геометрическая модель дефектной структуры упруго-пластической сплошной среды //ПМТФ.1999.Т.40.№.2.С. 163 – 173.

8. Мясников В.П., Гузев М.А. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3. № 1. С. 5 – 16.

9. *Годунов С.К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.

10. *Пригожин И., Кодепуди Д.* Современная термодинамика: от тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.

11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.

12. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1973.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 8 декабря 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №08-01-00581-а, и частично в рамках проекта №09-01-12130-офи-м.

Guzev M.A., Shepelov M.A. The threshold behavior of mechanical characteristics in Non-Euclidean model of continua. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 20–30.

ABSTRACT

The behavior of the material containing dislocations is investigated. The Non-Euclidean model of continua is used for description of the stress state. It is shown that the obtained solution is characterized by the threshold behavior.

Key words: *dislocations, defects of structure, the Burgers tensor, Non-Euclidean model of continua.*