ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 41–49

УДК 517.54
MSC2000 30C70, 30C75

© Д.А. Кириллова*

О максимуме мебиусова инварианта в задаче с четырьмя неналегающими областями

Пусть $r(D, a)$ — конформный радиус области D относительно точки a. Установлена точная верхняя грань произведения

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{r(D_k, a_k)}{|a_{k+1} - a_k|}, \quad a_5 := a_1$$

по всевозможным наборам попарно неналегающих односвязных областей $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $a_k \in D_k, k = 1, \ldots, 4$. Методом внутренних вариаций Шиффера получен вид квадратичного дифференциала, ассоциированного с задачей о максимуме аналогичного произведения в случае произвольного числа областей. Затем для четырех областей задача сводится к исследованию круговых областей относительно соответствующего квадратичного дифференциала.

Ключевые слова: *конформный радиус, мёбиусовы инварианты, экстремальные разбиения, квадратичный дифференциал.*

1. Введение и основной результат

В геометрической теории функций хорошо известны задачи об экстремальном разбиении комплексной сферы [1–3]. Одна из них заключается в том, чтобы найти максимум произведения

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)$$

по всевозможным попарно неналегающим односвязным областям D_k, содержащим заданные точки $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 2$, где $r(D_k, a_k)$ обозначает конформный радиус области D_k в точке a_k [1]. Будем называть указанную задачу задачей (I). Простейший случай задачи для двух неналегающих областей был рассмотрен М.А. Лаврентьевым в 1934 году [4]. Согласно результату, полученному М.А. Лаврентьевым, если a_1 и a_2 – конечные точки, то для любой пары неналегающих односвязных областей D_1 и D_2 такой, что $a_k \in D_k,\ k = 1, 2$, справедливо неравенство

$$r(D_1, a_1) r(D_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2, \tag{1}$$

где равенство достигается для полуплоскостей D_k и точек a_k, симметричных относительно их общей границы.

* Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия, 679000, Биробиджан, ул. Широкая, 70а. Электронная почта: dina_kir_03@mail.ru

Заметим, что величина

$$I_2 := \left[\begin{array}{ll} r(D_1,a_1)r(D_2,a_2)|a_1-a_2|^{-2}, & a_1+a_2\neq\infty; \\ \quad r(D_1,a_1)r(D_2,a_2), & a_1+a_2=\infty, \end{array} \right. \tag{2}$$

$a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=1,2$, является инвариантом относительно дробно-линейных отображений плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. То есть для всякой функции вида $f(z)=(az+b)/(cz+d)$, где $ad-bc\neq 0$, выполняется равенство

$$I_2(a_1,a_2,D_1,D_2)=I_2(f(a_1),f(a_2),f(D_1),f(D_2)).$$

Таким образом, неравенство (1) можно рассматривать как оценку сверху мебиусова инварианта: $I_2\leqslant 1$. В случае трех и более точек многие авторы [5–9 и др.] рассматривали оценки более общего мебиусова инварианта вида

$$I_n := \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)}{\left\{\prod\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n}{}' |a_k-a_l|\right\}^{\frac{2}{n-1}}}, \tag{3}$$

(здесь и далее штрих у произведения означает, что для бесконечно удаленной точки под соответствующим множителем понимается единица). Для получения I_n нужно для n попарно неналегающих областей D_k и точек $a_k\in D_k,\ k=1,\dots,n,\ n\geqslant 2$, перемножить всевозможные попарные произведения вида (2) и извлечь корень степени $2(n-1)$. В 1951 году Г.М. Голузин получил точную оценку для I_3 [1, с.165]

$$I_3\leqslant\frac{64}{81\sqrt{3}},$$

где равенство достигается, с точностью до дробно-линейного преобразования, только для областей, являющихся равными углами, и точек, лежащих на биссектрисах этих углов на одинаковом расстоянии от их общей вершины. Случай $n>3$ оказывается значительно сложнее и существенно отличается от ситуации $n\leqslant 3$, так как дробно-линейным отображением любые три наперед заданные точки можно перевести в три точки, удобные для доказательства. Для $n=4$ Г.В. Кузьмина в работе [6] показала, что задача об оценке I_4 сводится к проблеме наименьшей емкости в определенном семействе континуумов, и получила точное неравенство

$$I_4\leqslant 3^2\cdot 4^{-8/3}.$$

Равенство достигается только в том случае, когда, с точностью до дробно-линейного преобразования, $a_1=-a_2=1, a_3=-a_4=i(2-\sqrt{3})$, а граница множества $\bigcup\limits_{k=1}^{4} D_k$ состоит из отрезка $[\sqrt{3}-2,\ 2-\sqrt{3}]$, лучей $\{z\mid z=it, t\in[1,+\infty)\}$ и $\{z\mid z=it, t\in(-\infty,\ -1]\}$, той части круговой дуги γ, проходящей через точки $-1,\ i,\ 2-\sqrt{3}$, которая лежит в первом квадранте, а также круговых дуг, которые получаются из γ преобразованиями $w\to -w,\ w\to\overline{w},\ w\to-\overline{w}$. Это же неравенство доказано С.И. Федоровым в [7] в качестве приложения полученных им вслед за Г.П. Бахтиной необходимых условий для экстремального набора областей и точек в задаче $I_n\to\max,\ n\geqslant 2$.

Для $n\geqslant 5$ полного решения задачи (II) до настоящего времени не получено.

В недавней статье [9] введен другой инвариант

$$J_n=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}' |a_k-a_{k+1}|},\quad a_{n+1}:=a_1, \tag{4}$$

где $D_k,\ k=1,\ldots,n,\ n\geqslant 2,$ — попарно неналегающие области замкнутой комплексной плоскости, точки $a_k\in D_k,\ k=1,\ldots,n$. Этот инвариант получается, если перемножить всевозможные попарные произведения вида $I_2(a_k,a_{k+1},D_k,D_{k+1})$ $(k=1,\ldots,n;\ a_{n+1}:=a_1)$ и из полученного произведения извлечь квадратный корень. Нетрудно заметить, что при $n=2$ и $n=3$ инварианты (3) и (4) совпадают, при $n>3$ они отличаются на произведение степеней модулей ангармонических отношений точек $a_k,\ k=1,\ldots,n$. Задачу об отыскании максимума величины J_n по всевозможным наборам попарно неналегающих односвязных областей $D_k\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=1,\ldots,n$, и точек $a_k\in D_k,\ k=1,\ldots,n$, будем называть задачей (II). В статье [9], в частности, было показано, что для любых попарно неналегающих областей D_k и точек $a_k\in D_k,\ k=1,\ldots,4$, расположенных на единичной окружности, $J_4\leqslant 1/4$. В настоящей работе доказывается, что указанная оценка J_4 верна для любых различных точек плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть односвязные области $D_k\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=1,\ldots,4$, такие, что $D_k\bigcap D_l=\emptyset$ для всех $k\neq l,\ k,l=1,\ldots,4$; точки $a_k\in D_k,\ k=1,\ldots,4$. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{4} r(D_k,a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{4}{}' |a_k-a_{k+1}|}\leqslant 1/4.$$

Равенство достигается только в том случае, когда, с точностью до дробно-линейного преобразования, $a_k=\exp(i\pi k/2)$ и $D_k=\{z \mid |\arg z-\pi(k-1)/2|<\pi/4\},\ k=1,\ldots,4.$

Подробное доказательство сформулированной теоремы приведено в третьей части данной работы. Вторая часть статьи содержит вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1. В частности, доказано существование решения задачи (II) для всякого $n>3$, а также выведен вид квадратичного дифференциала, ассоциированного с задачей (II).

2. Необходимые условия экстремума

Основной качественный результат задачи (I) сформулирован в виде следующей леммы [10, гл. 6].

Лемма 1. *Максимум в задаче* (I) *реализуется единственной системой областей $\{D_k^*\}$, $k=1,\ldots,n$, определяемой следующим образом. Замыкание объединения областей $D_1^*,\ldots,D_n^*$ представляет собой всю замкнутую плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, а каждая из этих областей является круговой областью относительно квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2=-\frac{P(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}'(z-a_k)^2}dz^2, \qquad (5)$$

где $P(z)$ — полином степени не больше $2n-4$,

$$P(a_j)=\prod_{k=1}^{n}{}'(a_k-a_j)^2,\ \text{если } a_j\neq\infty,$$

и

$$P(z)=z^{2n-4}+\ldots,\ \text{если } a_j=\infty,\ j=1,..,n.$$

Дифференциал (5) *определяется указанными условиями единственным образом.*

Таким образом, в задаче (II) речь идет о нахождении экстремального набора точек $a_k^*,\ k = 1, \ldots, n$, так как соответствующая этой системе точек система областей $D_k^*,\ k = 1, \ldots, n$, полностью определяется леммой 1.

Лемма 2. *При любом* $n > 3$ *решение задачи* (II) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $f_k(w),\ k = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 3$, конформно и однолистно отображают единичный круг $U_w = \{w \mid |w| < 1\}$ на попарно неналегающие области $D_k,\ k = 1, \ldots, n$. Обозначим $f_k(0) = a_k,\ k = 1, \ldots, n$, и покажем, что среди этих функций найдется набор $\{f_k^*(w)\}_{k=1}^n$, реализующий максимум функционала

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} |f'(0)|}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}' |f_k(0) - f_{k+1}(0)|} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}' |a_k - a_{k+1}|} = J_n,$$

$f_{n+1}(0) := f_1(0)$. Пусть $\mathcal{M}$ – множество всевозможных наборов $\{f_k(w)\}_{k=1}^n$ функций, конформно и однолистно отображающих единичный круг U_w на попарно неналегающие области; $\mathcal{M}_k$ – совокупность k-тых функций наборов множества $\mathcal{M}$, $k = 1, \ldots, n$; $\mathcal{A}$ – множество всевозможных значений величины J_n. В силу отмеченной выше инвариантности J_n можно считать, что для всех функций семейств $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ значение в нуле равно соответственно 1, 0 и -1. Тогда понятно, что все функции одного семейства $\mathcal{M}_k$, $k = 1, \ldots, n$, не принимают в U_w как минимум двух значений; значит, каждое из этих семейств функций является нормальным [1, с. 68]. Из неравенства М.А. Лаврентьева (1) следует ограниченность величины J_n при любом $n \geqslant 2$, а значит, и множества $\mathcal{A}$; следовательно, существует конечная точная верхняя грань множества $\mathcal{A}$, $\alpha = \sup \mathcal{A}$, и последовательность $\{\alpha_s\}$ чисел из $\mathcal{A}$ такая, что $\alpha_s \to \alpha$ при $s \to \infty$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность наборов функций $\{\{f_k(w)\}_{k=1}^n\}$ из $\mathcal{M}$, соответствующую последовательности $\{\alpha_s\}$. В силу нормальности каждого семейства $\mathcal{M}_k$ из указанной последовательности наборов функций можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри U_w к набору $\{f_k^*(w)\}_{k=1}^n$ регулярных в U_w функций, для которых значение функционала J_n равно α. Более того, так как все функции рассматриваемой последовательности являются однолистными в U_w, то и предельные функции $f_k^*(w)$ однолистны в U_w [1, с. 19]. Таким образом, на множестве $\mathcal{M}$ достигается максимум величины J_n. Лемма доказана.

Качественную характеристику экстремальной конфигурации задачи (II) при всех $n > 3$ дает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $a_k^*,\ k = 1, \ldots, n$ *– экстремальный набор точек задачи* (II). *Тогда максимум функционала* J_n *реализуется системой областей* $D_k^*,\ k = 1, \ldots, n$, *которые являются круговыми областями относительно квадратичного дифференциала*

$$Q^*(z)dz^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}^* - a_k^*}{(z - a_k^*)^2 (z - a_{k+1}^*)}\right] dz^2, \quad a_{n+1}^* := a_1^*, \tag{6}$$

и замыкание объединения всех областей $D_1^*, D_2^*, \ldots, D_n^*$ *представляет собой всю замкнутую плоскость.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда экстремальной системой точек задачи (II) является $a_1^* = 0,\ a_2^*, \ldots, a_n^* \in \mathbb{C}$ и $D_1^*,\ D_2^*, \ldots,\ D_n^*$ – соответствующая система областей. Покажем, что тогда граница области D_1^* состоит из замыканий траекторий квадратичного дифференциала

$$\widetilde{Q}(z)dz^2 = -\left[\frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(z - a_k^*)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - a_k^*)(z - a_{k+1}^*)}\right] dz^2. \tag{7}$$

Следуя работе [7], воспользуемся методом внутренних вариаций Шиффера. Рассмотрим вариацию
$$\widetilde{z} = z + \frac{\varepsilon e^{i\alpha} z}{z - z_0},\ \varepsilon > 0,\ z_0 \in D_1^* \setminus \{0\}. \tag{8}$$
Полагая $z_0 = re^{i\beta}$, перепишем вариацию в виде
$$\widetilde{z} - \varepsilon e^{i\alpha} = z + e^{i(\alpha+\beta)} \frac{\varepsilon r}{z - z_0},$$
и введем обозначения $\rho^2 = \varepsilon r,\ 2\varphi = \alpha + \beta,\ z^* = \widetilde{z} - \varepsilon e^{i\alpha}$. Тогда на окружности $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$
$$z^* - z_0 = 2\rho e^{i\varphi} \cos(\theta - \phi),$$
то есть функция z^* осуществляет отображение внешности окружности $|z - z_0| = \rho$ на внешность отрезка $[z_0 - 2\rho e^{i\varphi}, z_0 + 2\rho e^{i\varphi}]$. Отображение функцией $\widetilde{z}$ отличается сдвигом на $\varepsilon e^{i\alpha}$. Значит, при достаточно малых ε окружность $|z - z_0| = \rho$ лежит внутри D_1^*, следовательно, функция $\widetilde{z}$ однолистна на границах ∂D_k^* областей D_k^* и отображает их на границы $\partial \widetilde{D}_k$ областей $\widetilde{D}_k$, которые сколь угодно мало отличаются от D_k^*. Пусть при этом точки a_k^* переходят в точки $\widetilde{a}_k,\ k = 1, \ldots, n$. Пусть $z = f_1(w)$ – однолистная функция, отображающая круг U_w на область D_1^* так, что $f_1(0) = 0$. Положим $z_0 = f_1(w_0)$, тогда
$$(\widetilde{z})' = 1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha} f_1(w_0)}{(z - f_1(w_0))^2}.$$
Так как вариация (8) регулярна в каждой из областей $D_k^*,\ k = 2, \ldots, n$, то
$$r(\widetilde{D}_k, \widetilde{a}_k) = r(D_k^*, a_k^*) \left| 1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha} f_1(w_0)}{(a_k^* - f_1(w_0))^2} \right|,\ k = 2, \ldots, n.$$
В случае $k = 1$ воспользуемся следующим результатом Шиффера: пусть функция $f(w) = w + a_2 w^2 + \ldots$ однолистна в круге U_w, тогда для функции
$$f^*(w) = f(w) + e^{i\alpha} \varepsilon \frac{f(w)}{f(w) - f(w_0)} + \ldots = a_1^* w + a_2^* w^2 + \ldots$$
имеем
$$a_1^* = 1 + \varepsilon e^{i\alpha} \left[\frac{f(w_0)}{w_0^2 f'(w_0)^2} - \frac{1}{f(w_0)} \right] + O(\varepsilon^2). \tag{9}$$
Полагая $f(w) = f_1(w)/f_1'(w)$ и пользуясь соотношением (9), получаем, что
$$r(\widetilde{D}_1, 0) = r(D_1^*, 0) \left| 1 + \varepsilon e^{i\alpha} \left[\frac{f_1(w_0)}{w_0^2 f_1'(w_0)^2} - \frac{1}{f_1(w_0)} \right] + O(\varepsilon^2) \right|.$$
Логарифмируя неравенство
$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k^*, a_k^*)}{\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k^* - a_{k+1}^*|} \geqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r(\widetilde{D}_k, \widetilde{a}_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} |\widetilde{a}_k - \widetilde{a}_{k+1}|}$$
и учитывая, что
$$\prod_{k=1}^{n} |\widetilde{a}_k - \widetilde{a}_{k+1}| = \prod_{k=1}^{n} |a_k^* - a_{k+1}^*| \cdot \prod_{k=1}^{n} \left| 1 - \frac{\varepsilon e^{i\alpha} z_0}{(a_k^* - z_0)(a_{k+1}^* - z_0)} \right|,$$

приходим к неравенству

$$\log\left|1+\varepsilon e^{i\alpha}\left[\frac{f_1(w_0)}{w_0^2 f_1'(w_0)^2}-\frac{1}{f_1(w_0)}\right]+O(\varepsilon^2)\right|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\log\left|1-\frac{\varepsilon e^{i\alpha}f_1(w_0)}{(a_k^*-f_1(w_0))^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\log\left|1-\frac{\varepsilon e^{i\alpha}z_0}{(a_k^*-z_0)(a_{k+1}^*-z_0)}\right|\leqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left[\frac{f_1(w_0)}{w_0^2 f_1'(w_0)^2}-\frac{1}{f_1(w_0)}-\sum_{k=2}^{n}\frac{f_1(w_0)}{(a_k^*-f_1(w_0))^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{z_0}{(a_k^*-z_0)(a_{k+1}^*-z_0)}\right]\right\}+O(\varepsilon^2)\leqslant 0. \tag{10}$$

Переходя в (10) к пределу при $\varepsilon\to 0$, в силу произвольности вещественного α, получаем, что при $|w|<1, w\neq 0$

$$\frac{f_1(w)}{w^2 f_1'(w)^2}-\frac{1}{f_1(w)}-\sum_{k=2}^{n}\frac{f_1(w)}{(a_k^*-f_1(w))^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f_1(w)}{(a_k^*-f_1(w))(a_{k+1}^*-f_1(w))}=0.$$

Значит,

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_k^*-f_1(w))^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_k^*-f_1(w))(a_{k+1}^*-f_1(w))}\right]w^2 f_1'(w)^2=1. \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует, что граница области D_1^* состоит из аналитических дуг и (11) остается верным на этих дугах. Таким образом, получаем, что граница D_1^* состоит из замыканий траекторий квадратичного дифференциала (7).

Учитывая инвариантность функционала J_n относительно дробно-линейных преобразований, применим линейные преобразования вида $z\to z-a_k,\ k=1,\dots,n$. Тогда, пользуясь результатом рассмотренного выше частного случая, заключаем, что граница каждой из областей $D_k^*,\ k=1,\dots,n$, в общем случае состоит из замыканий траекторий дифференциала (6). Квадратичный дифференциал (6) удовлетворяет условиям леммы 1 для точек $a_k^*,\ k=1,\dots,n$. Кроме того, очевидно, что замыкание объединения областей $D_k^*,\ k=1,\dots,n$, совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому дифференциал (6) определен условиями леммы единственным образом. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Следующие ниже рассуждения восходят в идейном плане к работе С.И. Федорова [7]. Любую заданную четверку различных точек a_1,a_2,a_3,a_4 можно дробно-линейно отобразить на четверку точек вида $1,b,-1,-b$ ($|b|\leqslant 1$) соответственно. Для нахождения нужного значения b необходимо решить квадратное уравнение

$$\frac{1-b}{1+1}\cdot\frac{-b+1}{-b-b}=\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\cdot\frac{a_4-a_3}{a_4-a_2}.$$

Значит, не теряя общности, можно считать, что экстремальным набором точек служит $a_1^*=-a_3^*=1, a_2^*=-a_4^*=b$, где $|b|\leqslant 1$. Тогда дифференциал (6) принимает вид

$$Q^*(z)dz^2=-2\cdot\frac{z^4(1+b^2)+z^2(b^4-6b^2+1)+b^2(1+b^2)}{(z^2-1)^2(z^2-b^2)^2}dz^2. \tag{12}$$

Так как $Q^*(z) = Q^*(-z)$, то пары его круговых областей $D_1^*,\ D_3^*$ и $D_2^*,\ D_4^*$ симметричны относительно начала координат. Рассмотрим преобразование

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b}\frac{z^2-b^2}{z^2-1} + b\frac{z^2-1}{z^2-b^2}\right], \tag{13}$$

переводящее квадратичный дифференциал (12) в квадратичный дифференциал

$$\widetilde{Q}_1(u)du^2 = -\frac{u-\frac{1+b^2}{4b}}{(u^2-1)(u-\frac{1+b^2}{2b})}du^2. \tag{14}$$

Преобразование (13) можно представить в виде композиции трех преобразований $u(z) = w(t(\zeta(z)))$, где

$$\zeta(z) = z^2, \quad t(\zeta) = \frac{1}{b}\frac{\zeta-b^2}{\zeta-1}, \quad w(t) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

Из указанной выше симметрии круговых областей следует, что $\zeta(D_1^*) = \zeta(D_3^*) = D^{(1)}$, $\zeta(D_2^*) = \zeta(D_4^*) = D^{(2)}$, причем $\overline{D^{(1)}} \bigcup \overline{D^{(2)}} = \overline{\mathbb{C}}_\zeta,\ \zeta(-1) = \zeta(1) = 1,\ \zeta(b) = \zeta(-b) = b^2$. Затем дробно-линейное преобразование $t(\zeta)$ переводит точки 1 и b^2 соответственно в бесконечность и нуль. Таким образом, в плоскости t имеем две односвязные неналегающие области, замыкание которых совпадает с $\overline{\mathbb{C}}_t$, причем одна из этих областей содержит нуль, а другая — бесконечно удаленную точку, поэтому функция $w(t)$ отображает эти области на одну и ту же область без внешних точек. Границу этой области будем обозначать E. Окончательно делаем вывод, что области $D_k^*,\ k = 1,\dots,4$, под действием преобразования $u(z)$ переходят в одну область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}_u \setminus \{1,-1,(1+b^2)/(2b)\}$, содержащую ∞ и реализующую максимум внутреннего радиуса относительно $u = \infty$ в семействе всех областей, обладающих указанным свойством. Значит, объединение замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала (12) переходит в континуум наименьшей емкости $E^*(1,-1,(1+b^2)/(2b))$, содержащий указанные точки. Анализируя структуру траекторий квадратичного дифференциала (14), пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным в [10, теорема 2.2], получаем, что либо $(1+b^2)/(4b)$ совпадает с одним из полюсов этого дифференциала, то есть

$$\frac{1+b^2}{4b} = \frac{1+b^2}{2b} \quad \text{или} \quad \frac{1+b^2}{4b} = \pm 1,$$

либо полюсы квадратичного дифференциала (14) образуют вершины правильного треугольника, причем $(1+b^2)/(4b)$ – центр симметрии этого треугольника. Очевидно, последнее не может выполняться ни при каком значении b, поэтому остается две возможности:

$$\frac{1+b^2}{2b} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1+b^2}{2b} = \pm 2.$$

Таким образом, получили, что только в указанных двух случаях точки $1,-1,b,-b$ являются такой системой точек задачи (II), для которой квадратичный дифференциал (6) совпадает с единственным квадратичным дифференциалом, определяющим экстремальную конфигурацию задачи (I).

Пользуясь тем, что емкость отрезка равна четверти его длины, находим, что при $(1+b^2)/(2b) = 0$

$$\widetilde{Q}_1(u)du^2 = -\frac{1}{(u^2-1)}du^2 \ \text{ и } \ \mathrm{cap}\, E = \frac{1}{2},$$

а при $(1+b^2)/(2b) = \pm 2$

$$\widetilde{Q}_1(u)du^2 = -\frac{1}{(u\pm 1)(u\mp 2)}du^2 \ \text{ и } \ \mathrm{cap}\, E = \frac{3}{4}.$$

Учитывая, что при $b = i$, $r(D_k^*, a_k^*) = 1/2\ r(\Omega, \infty) = 1/2\ (\mathrm{cap\ E})^{-1} = 1$, $k = 1, \ldots, 4$, получаем для этого случая

$$J_4 = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad Q^*(z)dz^2 = -\frac{16z^2}{(z^4-1)^2}dz^2,$$

откуда следует неравенство теоремы с соответствующим выводом о знаке равенства. Теорема доказана.

Автор благодарит профессора В.Н. Дубинина за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного пременного. М.: Наука, 1966. 628 с.

2. *Дубинин В.Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 3–76.

3. *Кузьмина Г.В.* Методы геометрической теории функций I, II // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 3. С. 41–103; №5. С. 1–50.

4. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Труды физ. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 159–245.

5. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. Iн-т математики НАН України. 2008. Т. 73. 308 с.

6. *Кузьмина Г.В.* К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 100. С. 131–145.

7. *Федоров С.И.* О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 112. С. 172–183.

8. *Бахтин А.К.* Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами // Доклады РАН. 2005. Т. 405. № 2. С. 151–153.

9. *Дубинин В.Н., Кириллова Д.А.* К задачам об экстремальном разбиении // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2008. Т. 357. С. 54–74.

10. *Кузьмина Г.В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1980. Т. 139. 240 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 4 декабря 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант 09-III-A-01-007).

Kirillova D.A. On the maximum of the Moebius invariant in the four disjoint domain problem. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 41–49.

ABSTRACT

Let $r(D,a)$ denote the conformal radius of the domain D with respect to the point a. In this paper we obtain the supremum of the product

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{r(D_k,a_k)}{|a_{k+1}-a_k|}, \quad a_5 := a_1$$

for all simply connected disjoint domains $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ and points $a_k \in D_k, k = 1,\ldots,4$. Using the method of interior variations due to M. Schiffer we establish the form of quadratic differential associated with extremal partition problem $\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)|a_{k+1}-a_k|^{-1} \to \sup$ for arbitrary $n \geqslant 3$. For $n=4$ we studed the circle domains and their boundaries for the corresponding quadratic differetial.

Key words: *conformal radius, Moebius invariants, extremal partitions, quadratic differential.*