ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 50–59

УДК 517.958
MSC2000 35Q60, 35R30

© А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров*

Краевая задача для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде

В работе рассмотрена краевая задача для уравнения переноса поляризованного излучения с френелевскими условиями сопряжения на границе раздела сред. Доказаны теоремы о разрешимости краевой задачи и исследованы непрерывные свойства ее решения.

Ключевые слова: *векторное уравнение переноса, поляризованное излучение, френелевские условия сопряжения.*

1. Введение

В работе исследуется краевая задача для векторного уравнения переноса излучения в среде, имеющей плоско-параллельное строение. Теоретические и численные аспекты решения векторного уравнения переноса рассматривались в работах [1–6]. В этих работах, в частности, изучены общие функциональные свойства решения задачи, предложены численные и аналитические методы его определения.

При моделировании процесса прохождения излучения через вещество важным является описание эффектов, возникающих на контактных границах между различными материалами. В теории переноса это учитывается с помощью различных условий сопряжения на границе раздела сред. Наиболее изученными являются краевые задачи для скалярного уравнения переноса с условиями непрерывной склейки решения на границе раздела сред [7–9].

Краевые задачи с более общими условиями сопряжения, учитывающими отражение и преломление на границе раздела сред, теоретически исследованы в меньшей степени, хотя начиная с 50-х годов прошлого столетия на это неоднократно обращалось внимание специалистов [10–12] и предлагались различные подходы к нахождению решения задачи [1, 4, 11, 13].

В [14, 15] получены качественные свойства решения краевых задач для скалярного уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения в трехмерной ограниченной области и для случая плоско-параллельной геометрии. В данной работе обобщаются результаты статьи [15] на случай двухкомпонентного векторного уравнения переноса. Исследованы непрерывные свойства решения краевой задачи для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде. Получены теоремы о разрешимости краевой задачи и оценки типа принципа максимума.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: ankov@imcs.dvgu.ru, prh@iam.dvo.ru

2. Постановка задачи. Основные ограничения

Пусть плоскости $z = z_i$ являются границами раздела слоев $G_i = (z_{i-1}, z_i)$ многослойной системы $G_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{p} G_i$. Множество G_0 представляет собой разбиение среды $G = (z_0, z_p)$, ($\overline{G_0} = \overline{G}$), в которой изучается процесс распространения излучения. В азимутально-симметричном случае перенос излучения в плоском слое может быть описан следующим интегродифференциальным уравнением:

$$\nu f_z(z,\nu) + \mu(z) f(z,\nu) = \mu_s(z) \int\limits_{-1}^{1} P(z,\nu,\nu') f(z,\nu') d\nu' + J(z,\nu). \tag{1}$$

Здесь $f = (f_1, f_2)$ – двухкомпонентная вектор-функция распределения поляризованного излучения в среде, связанная с вектором параметров Стокса $(I_\parallel, I_\perp)$ следующими соотношениями:

$$f_1(z,\nu) = \frac{I_\parallel(z,\nu)}{n^2(z)}, \quad f_2(z,\nu) = \frac{I_\perp(z,\nu)}{n^2(z)},$$

где $n(z)$ – кусочно-постоянный показатель преломления среды ($n(z) = n_i$ для $z \in G_i$). Сумма компонент $f_1 + f_2$ описывает плотность потока излучения, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$. Независимая переменная $z \in G$ определяет координату точки слоя, а направление распространения излучения ω описывается только переменной $\nu \in [-1, 1]$, где ν есть косинус угла между ω и осью z. Функции μ, μ_s характеризуют среду и называются соответственно коэффициентом ослабления и коэффициентом рассеяния. Двухкомпонентная вектор-функция J описывает внутренние источники излучения, а P представляет собой фазовую матрицу размерности 2×2 с усредненными по азимуту элементами, описывающую акт рассеяния поляризованного излучения с учетом преобразования параметров Стокса при повороте системы координат.

Относительно функций $\mu, \mu_s, J,\ P$ будем считать, что μ, μ_s, J_i неотрицательны, $\mu \geq \mu_{min} > 0$, и μ,$\mu_s \in C_b(G_0)$, где $C_b(G_0)$ есть банахово пространство функций, непрерывных и ограниченных на G_0 с нормой

$$\|\varphi\|_{C_b(G_0)} = \sup_{x \in G_0} |\varphi(x)|.$$

Обозначим $X = G \times \{[-1,0) \cup (0,1]\}, X_0 = G_0 \times \{[-1,0) \cup (0,1]\}$. Относительно матрицы рассеяния P предполагается, что ее компоненты $p_{ij} \in C_b(X_0 \times [-1,1]\backslash\{0\})$, $(Pf)_{1,2} \geq 0$ для $f_{1,2} \geq 0$ и

$$\int\limits_{-1}^{1} (p_{i1}(z,\nu,\nu') + p_{i2}(z,\nu,\nu')) d\nu' = 1, \quad i = 1, 2.$$

Введем пространство $V(X_0)$ двухкомпонентных вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_i \in C_b(X_0)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{V(X_0)} = \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|_{C_b(X_0)},$$

и пусть $J \in V(X_0)$. Рассмотрим следующие граничные множества:

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{i=1}^{p-1} \{z_i \times \{[-1,0) \cup (0,1]\}\}, \quad \Gamma_{ext}^{\pm} = \{\{z_0 \times [\mp 1, 0)\} \cup \{z_n \times [\pm 1, 0)\}\},$$

$$\Gamma^{\pm} = \Gamma_{int} \cup \Gamma_{ext}^{\pm}, \quad \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-.$$

Присоединим к уравнению (1) краевые условия вида

$$f^-(z,\nu) = (Bf^+)(z,\nu) + h(z,\nu), \quad (z,\nu) \in \Gamma^-, \tag{2}$$

где

$$f^\pm(z,\nu) = \begin{cases} f(z \pm 0, \nu), & \nu < 0, \\ f(z \mp 0, \nu), & \nu > 0, \end{cases}$$

$$f(z \pm 0, \nu) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(z \pm \varepsilon, \nu).$$

Функция h в условии (2), описывающая внешние источники излучения, принадлежит $V(\Gamma^-)$ и равна нулю на множестве Γ_{int}. Оператор B задает условия сопряжения на границах раздела сред Γ_{int}, а на множестве Γ_{ext} он полагается равным нулю. Таким образом, с помощью соотношения (2) единообразно записываются условия как на внешней границе множества G_0, так и на внутренней его части.

Для френелевского случая оператор сопряжения имеет вид

$$(Bf^+)(z_i,\nu) = R_i(\nu) f^+(z_i, -\nu) + T_i(\nu) f^+(z_i, \psi_i), \quad i = \overline{1, p-1},$$

где

$$\psi_i(\nu) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\nu)\sqrt{1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1-\nu^2)}, & \text{при } 1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1-\nu^2) \geq 0, \\ 0, & \text{при } 1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1-\nu^2) < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{n}_i(\nu) = \begin{cases} n_i/n_{i-1}, & \text{при} \quad 0 < \nu \leq 1, \\ n_{i-1}/n_i, & \text{при} \ -1 \leq \nu < 0. \end{cases}$$

Функция $\psi_i(\nu)$ описывает закон преломления Снеллиуса [16], согласно которому направление распространения излучения на поверхности $z = z_i$ изменяется с направления $\psi_i(\nu)$ на направление ν. Матричные коэффициенты отражения и прохождения R_i и T_i определяются следующим образом [10, 12]:

$$R_i(\nu) = \begin{pmatrix} R_{i,\parallel}^2 & 0 \\ 0 & R_{i,\perp}^2 \end{pmatrix}, \quad T_i(\nu) = \begin{pmatrix} T_{i,\parallel}^2 & 0 \\ 0 & T_{i,\perp}^2 \end{pmatrix} \frac{\widetilde{n}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu)},$$

где

$$R_{i,\parallel}(\nu) = \frac{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) - \nu}{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad R_{i,\perp}(\nu) = \frac{\psi_i(\nu) - \widetilde{n}_i(\nu)\nu}{\psi_i(\nu) + \widetilde{n}_i(\nu)\nu},$$

$$T_{i,\parallel}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\widetilde{n}_i(\nu)\psi_i(\nu) + \nu}, \quad T_{i,\perp}(\nu) = \frac{2\psi_i(\nu)}{\psi_i(\nu) + \widetilde{n}_i(\nu)\nu}.$$

Из определения R и T вытекает:
a) для всех ν, удовлетворяющих неравенству $1 - \widetilde{n}_i^2(\nu)(1-\nu^2) \leq 0$, выполняется $T_i(\nu) = 0$, $R_i(\nu) = E$, а при $\nu = \operatorname{sgn}(\nu)\widetilde{n}_i(\nu)/\sqrt{1 + \widetilde{n}_i^2(\nu)}$ коэффициент $R_{i,\parallel}(\nu) = 0$. В оптике эти случаи называются полным внутренним отражением и отражением под углом Брюстера [16];
b) коэффициенты матриц R_i и T_i непрерывны по $\nu \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, вследствие чего оператор B действует из $V(\Gamma^+)$ в $V(\Gamma^-)$;
c) для матриц T_i и R_i справедливо соотношение $T_i + R_i = E$.
Таким образом, оператор $B : V(\Gamma^+) \to V(\Gamma^-)$ — линейный, ограниченный, неотрицательный и $\|B\| \leq 1$.

Определим класс $D(X_0)$, в котором будем искать решение f краевой задачи (1),(2).

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит $D(X_0)$, если она обладает следующими свойствами:*

1) $f_j(z,\nu)$ *абсолютно непрерывна по* $z \in (z_i, z_{i+1}]$ *при всех* $\nu > 0$ *и абсолютно непрерывна по* $z \in [z_i, z_{i+1})$ *при всех* $\nu < 0$, $\quad i = \overline{0, p-1}$, $j = 1,2$;
2) $\nu f'_z(z,\nu) + \mu(z) f(z,\nu) \in V(X_0)$;
3) $f^-(z,\nu) \in V(\Gamma^-)$.

3. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться величиной $\xi(z,\nu)$:

$$\xi(z,\nu) = \begin{cases} z_i, & (z,\nu) \in (z_{i-1}, z_i] \times [-1, 0), \\ z_{i-1}, & (z,\nu) \in [z_{i-1}, z_i) \times (0, 1]. \end{cases} \tag{3}$$

Функция $\xi(z,\nu)$ непрерывна и ограничена на множестве X_0, поэтому для любой $\varphi \in V(\Gamma^-)$ функция $\widetilde{\varphi}(z,\nu) = \varphi(\xi(z,\nu),\nu) \in V(X_0)$, и, кроме того, $\|\varphi\|_{V(\Gamma^-)} = \|\varphi(\xi(z,\nu),\nu)\|_{V(X_0)}$.

Для краткости будем использовать следующие сокращения: $\xi(z,\nu) = \xi$, $D(X_0) = D$, $V(X_0) = V$, $\|\varphi\|_{C_b(G_0)} = \|\varphi\|$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tau(z, z') = \int\limits_{z'}^{z} \mu(t)dt,$$

называемую оптическим расстоянием между точками z и z' и обозначим

$$K(z, z', \nu) = \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\tau(z, z')\right\},$$

$$\overline{\lambda} = \left\|\frac{\mu_s(z)}{\mu(z)}\right\|.$$

Предполагается, что величина $\overline{\lambda}$, называемая альбедо однократного рассеяния, меньше единицы. В этом случае найдется такая функция $\widetilde{\mu}(z) < \mu(z)$, $\widetilde{\mu} \geq \mathrm{const} > 0$, что

$$\lambda_1 = \left\|\frac{\widetilde{\mu}(z)}{\mu(z)}\right\| < 1, \quad \lambda_2 = \left\|\frac{\mu_s(z)}{\widetilde{\mu}(z)}\right\| < 1. \tag{4}$$

В качестве функции $\widetilde{\mu}$ можно взять, например, $\widetilde{\mu}(z) = (\mu(z) + \mu_s(z))/2$.

Пусть дифференциальное выражение

$$Lf(z,\nu) = \nu f'_z(z,\nu) + \mu(z) f(z,\nu)$$

определяет линейный оператор $L : D(X_0) \to V(X_0)$. Введем норму в пространстве $D(X_0)$ по формуле

$$\|\varphi\|_D = \max\left\{\|\varphi^-\|_{V(\Gamma^-)}, \left\|\frac{L\varphi}{\widetilde{\mu}}\right\|_{V(X_0)}\right\} \tag{5}$$

и покажем вложение пространства $D(X_0)$ в $V(X_0)$.

Для начала заметим, что, следуя типичной схеме [15], можно показать, что для любой $F(z,\nu) \in V(X_0)$ функция $f \in D$ является решением уравнения

$$Lf(z,\nu) = F(z,\nu) \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда $f(z,\nu)$ удовлетворяет равенству

$$f(z,\nu)=f^-(\xi,\nu)K(z,\xi,\nu)+\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z}K(z,z',\nu)F(z',\nu)dz'. \tag{7}$$

Из (7) вытекает следующее представление для произвольной функции $f\in D$:

$$f(z,\nu)=f^-(\xi,\nu)K(z,\xi,\nu)+\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z}K(z,z',\nu)(Lf)(z',\nu)dz'. \tag{8}$$

Лемма 1. *Справедливо вложение $D(X_0)\subset V(X_0)$, причем выполняется неравенство*

$$\|f\|_V\leq\|f\|_D. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $f\in D(X_0)$, тогда $f^-\in V(\Gamma^-), Lf\in V(X_0)$ и справедливо представление (8). Так как функции $\xi\in C_b(X_0)$ и $\tau\in C_b(G_0\times G_0)$, то $\widetilde{K}(z,\nu)=K(z,\xi(z,\nu),\nu)\in C_b(X_0)$ и, следовательно, первое слагаемое в представлении (8) принадлежит $V(X_0)$. Делая замену переменных во втором слагаемом, получаем

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(z,\nu)}^{z}K(z,z',\nu)(Lf)(z',\nu)dz'=$$

$$=\frac{z-\xi(z,\nu)}{\nu}\int\limits_{0}^{1}K(z,(1-t)\xi(z,\nu)+tz,\nu)(Lf)((1-t)\xi(z,\nu)+tz,\nu)dt.$$

В силу того, что функции $\xi(z,\nu)\in C_b(X_0), Lf\in V(X_0)$, суперпозиция $(Lf)((1-t)\xi(z,\nu)+tz,\nu)$ как функция переменных (z,ν,t) принадлежит пространству $V(X_0\times(0,1))$. Поскольку $\frac{1}{\nu}K(z,z',\nu)\in C_b(G_0\times G_0\times[-1,0)\cup(0,1])$, то $\frac{1}{\nu}K(z,(1-t)\xi(z,\nu)+tz,\nu)$ как функция переменных (z,ν,t) лежит в $C_b(X_0\times(0,1))$. Таким образом, по теореме о непрерывности интеграла Лебега по параметру заключаем, что второе слагаемое в представлении (8) принадлежит $V(X_0)$, а следовательно, $f\in V(X_0)$. Покажем неравенство (9). Из представления (8) для любых $(z,\nu)\in X_0$ и $i=1,2$ получаем

$$|f_i(z,\nu)|\leq\|f_i^-\|_{C_b(\Gamma^-)}K(z,\xi,\nu)+\left|\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z}K(z,z',\nu)\frac{\mu(z')\widetilde{\mu}(z')}{\mu(z')\widetilde{\mu}(z')}(Lf_i)(z',\nu)dz'\right|\leq$$

$$\leq\|f_i^-\|_{C_b(\Gamma^-)}K(z,\xi,\nu)+\frac{\lambda_1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z}K(z,z',\nu)\mu(z')dz'\left\|\frac{Lf_i}{\widetilde{\mu}}\right\|_{C_b(X_0)}\leq$$

$$\leq(K(z,\xi,\nu)+\lambda_1(1-K(z,\xi,\nu)))\max\left\{\|f_i^-\|_{C_b(\Gamma^-)},\left\|\frac{Lf_i}{\widetilde{\mu}}\right\|_{C_b(X_0)}\right\}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z}K(z,z',\nu)\mu(z')dz'=\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z}\exp\left(-\frac{1}{\nu}\int\limits_{z'}^{z}\mu(t)dt\right)\mu(z')dz'=$$

$$=1-\exp\left(-\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z}\mu(t)dt\right)=1-K(z,\xi,\nu).$$

Далее, воспользовавшись условием $\lambda_1 < 1$, в итоге получим $\|f\|_V \le \|f\|_D$.

Заметим, что из неравенства (9) вытекает следующее: из сходимости в пространстве $D(X_0)$ следует сходимость в $V(X_0)$; если любые два решения $f, g \in D(X_0)$ уравнения (6) совпадают на Γ^-, то они совпадают и на всем множестве X_0.

Лемма 2. *Пространство $D(X_0)$ с нормой (5) банахово.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $\{f_{(n)}\}$ — некоторая фундаментальная в $D(X_0)$ последовательность, то есть $\|f_{(n)} - f_{(m)}\|_D \to 0$ при $m, n \to \infty$. Так как

$$\|f_{(n)} - f_{(m)}\|_D = \max\left\{\|f^-_{(n)} - f^-_{(m)}\|_{V(\Gamma^-)}, \left\|\frac{L(f_{(n)} - f_{(m)})}{\widetilde{\mu}}\right\|_{V(X_0)}\right\}$$

и пространства $V(X_0), V(\Gamma^-)$ полные, то существуют такие элементы $F \in V(X_0), \varphi \in V(\Gamma^-)$, что $\|Lf_{(n)} - F\|_V \to 0$, $\|f^-_{(n)} - \varphi\|_{V(\Gamma^-)} \to 0$, при $n \to \infty$. В силу леммы 1 существует единственный элемент $f \in D(X_0)$ такой, что $Lf = F$ и $f^-|_{\Gamma^-} = \varphi$, отсюда заключаем $\|f_{(n)} - f\|_D \to 0$, то есть пространство $D(X_0)$ с нормой (5) полное.

Лемма 3. *Пусть $\overline{\lambda} < 1$, тогда для любой функции $f \in D(X_0)$ справедлива оценка*

$$\|f^+\|_{V(\Gamma^+)} \le w\|f\|_D, \tag{10}$$

где $0 \le w < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f \in D(X_0)$, тогда для нее справедливо представление (8). Учитывая абсолютную непрерывность функции f по переменной z на множестве $\{z \in (\xi(\eta,\nu), \eta],\ (\eta,\nu) \in \Gamma^+\}$, получаем

$$f^+(\eta,\nu) = f^-(\xi(\eta,\nu),\nu)K(\eta,\xi,\nu) + \frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{\eta} K(\eta,z',\nu)(Lf)(z',\nu)dz'.$$

Отсюда для всех $(\eta,\nu) \in \Gamma^+$ вытекает

$$\|f^+\|_{V(\Gamma^+)} \le \|f^-\|_{V(\Gamma^-)}K(\eta,\xi,\nu) + \lambda_1(1 - K(\eta,\xi,\nu))\left\|\frac{Lf}{\widetilde{\mu}}\right\|_V \le$$

$$\le [q + \lambda_1(1-q)]\|f\|_D,$$

где

$$q = \left\|\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi(\eta,\nu)}^{\eta} \mu(t)dt\right\}\right\|_{C_b(\Gamma^+)} = \max_{1\le i\le p} \exp\left\{-\int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} \mu(t)dt\right\}.$$

Из определения величины q и из условия $\mu \ge \mathrm{const} > 0$ следует, что $q \in [0,1)$. Обозначим $w = q + \lambda_1(1-q) < 1$. Так как функция $w(q) = q + \lambda_1(1-q)$ линейная по q, возрастает с ростом q, и $w(1) = 1$, то при $q < 1$ выполняется неравенство $w(q) < 1$.

Лемма 4. *Выражения*

$$(A\varphi)(z,\nu) = \frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z} K(z,z',\nu)\varphi(z',\nu)dz', \tag{11}$$

$$(S\varphi)(z,\nu) = \mu_s(z)\int\limits_{-1}^{1} P(z,\nu,\nu')\varphi(z,\nu')d\nu' \tag{12}$$

определяют линейные операторы $A : V(X_0) \to D(X_0),\ S : V(X_0) \to V(X_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность указанных выше операторов очевидна. Покажем, что $A : V(X_0) \to D(X_0)$.

Пусть $\varphi(z,\nu) \in V(X_0)$. Рассмотрим функцию $\phi(z,\nu) = (A\varphi)(z,\nu)$. Очевидно, что функция $\phi(z,\nu)$ будет абсолютно непрерывна по z как интеграл с переменным верхним пределом от интегрируемой функции. Согласно определению функции ϕ, $\phi^-|_{\Gamma^-} = 0$. Соответственно $\phi^- \in V(\Gamma^-)$. Покажем, что $L\phi(z,\nu) \in V(X_0)$. Применяя к функции ϕ оператор L, приходим к равенству

$$L\phi(z,\nu) = \nu\phi'_z(z,\nu) + \mu(z)\phi(z,\nu) = -\mu(z)\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z} K(z,z',\nu)\varphi(z',\nu)dz' + \varphi(z,\nu)+$$

$$+\mu(z)\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi}^{z} K(z,z',\nu)\varphi(z',\nu)dz' = \varphi(z,\nu) \in V(X_0).$$

Таким образом, $A : V(X_0) \to D(X_0)$. Покажем, что $S : V(X_0) \to V(X_0)$. Пусть $\varphi(z,\nu) \in V(X_0)$, тогда из непрерывности и ограниченности элементов матрицы $P(z,\nu,\nu')$ на $X_0 \times [-1,0)\cup(0,1]$ и $\mu_s(z)$ на G_0 следует, что $S\varphi \in V(X_0)$. Это вытекает из теоремы о непрерывности интеграла Лебега по параметру.

Так как оператор $B : V(\Gamma^+) \to V(\Gamma^-)$ и функции $\xi(z,\nu)$, $K(z,\xi(z,\nu),\nu)$ непрерывны на X_0, причем

$$L\left((Bf^+)(\xi,\nu)K(z,\xi,\nu)\right) = 0, \tag{13}$$

то учитывая (13) и вложение $D(X_0) \subset V(X_0)$, из леммы 4 получаем: оператор T, действующий по правилу

$$(Tf)(z,\nu) = (Bf^+)(\xi(z,\nu),\nu)K(z,\xi(z,\nu),\nu) + (ASf)(z,\nu), \tag{14}$$

переводит пространство $D(X_0)$ в $D(X_0)$.

Определение 2. *Функцию* $f \in D(X_0)$ *назовем решением задачи (1),(2), если при всех* $(z,\nu) \in X_0$ *она удовлетворяет уравнению* $(Lf)(z,\nu) = (Sf)(z,\nu) + J(z,\nu)$ *и для любых* $(z,\nu) \in \Gamma^-$ *выполняются условия* $f^-(z,\nu) = (Bf^+)(z,\nu) + h(z,\nu)$.

Если в (6) и (7) положить $F(z,\nu) = (Sf)(z,\nu) + J(z,\nu)$ и $f^-(z,\nu) = (Bf^+)(z,\nu) + h(z,\nu)$, то с учетом леммы 4 получаем следующее: для того чтобы функция f была решением задачи (1),(2), необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяла уравнению

$$f(z,\nu) = f_0(z,\nu) + (Tf)(z,\nu), \tag{15}$$

$$f_0(z,\nu) = K(z,\xi(z,\nu),\nu)h(\xi(z,\nu),\nu) + (AJ)(z,\nu),$$

в пространстве $D(X_0)$.

Таким образом, решение краевой задачи (1),(2) эквивалентно решению операторного уравнения (15), которое перепишем в виде

$$(I - T)f = f_0, \tag{16}$$

где I – единичный оператор в пространстве $D(X_0)$, а T определяется выражением (14).

4. Основные утверждения

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\|B\| \leq 1$, $\overline{\lambda} < 1$, *тогда существует единственное решение задачи (1),(2), которое может быть найдено в виде ряда Неймана*

$$f(z,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k f_0)(z,\nu). \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того, чтобы показать существование и единственность решения задачи (1)–(2) достаточно показать, что $\|T\| < 1$. Из определения оператора T и нормы в пространстве D, а также в силу (13),

$$\|Tf\|_D = \max\left\{\|Tf\|_{V(\Gamma^-)}, \left\|\frac{LTf}{\widetilde{\mu}}\right\|_V\right\} = \max\left\{\|Bf^+\|_{V(\Gamma^-)}, \left\|\frac{Sf}{\widetilde{\mu}}\right\|_V\right\}.$$

Учитывая неравенства (4) и ограничения в формулировке данной теоремы, из лемм 1 и 3 получаем

$$\|Tf\|_D \leq \max\{\|B\|\|f^+\|_{V(\Gamma^+)}, \lambda_2\|f\|_V\} \leq \max\{w, \lambda_2\}\|f\|_D,$$

где величина w введена в лемме 3. Далее, учитывая неравенство $\max\{w, \lambda_2\} < 1$, делаем вывод, что $\|T\| < 1$.

Теорема 2. *Пусть* $J_i = 0, i = 1,2$, *тогда всюду в* X_0 *справедлива оценка*

$$|f_i(z,\nu)| \leq \|h\|_{V(\Gamma^-)}, \quad i = 1,2. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно докажем утверждение типа теоремы сравнения [8] для векторного случая. Возьмем два решения задачи (1), (2) $f = (f_1, f_2)$ и $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$, соответствующие наборам $C = \{\mu, \mu_s, n, P, h, J\}$ и $\widetilde{C} = \{\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}_s, n, P, \widetilde{h}, \widetilde{J}\}$. Пусть выполняются условия

$$\widetilde{\mu}_s \geq \mu_s, \quad \widetilde{\mu} \leq \mu, \quad h_i \leq \widetilde{h}_i, \quad J_i \leq \widetilde{J}_i, \quad i = 1,2. \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $\overline{f} = \widetilde{f} - f$. Пусть $\widetilde{T}$ — есть оператор T, соответствующий набору $\widetilde{C}$. В силу теоремы 1 и условий (19)

$$\overline{f}_i = \widetilde{f}_i - f_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\widetilde{T}^k \widetilde{f}_0)_i(z,\nu) - \sum_{k=0}^{\infty} (T^k f_0)_i(z,\nu) \geq \sum_{k=0}^{\infty} (\widetilde{T}^k \overline{f}_0)_i(z,\nu) \geq 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор $\widetilde{T} - T$ неотрицателен. Таким образом, получена оценка $f_i(z,\nu) \leq \widetilde{f}_i(z,\nu), i = 1,2$ в X_0.

Положим теперь $\widetilde{h}_i = \|h\|_{V(\Gamma^-)}$, $\widetilde{J}_i = (\widetilde{\mu} - \widetilde{\mu}_s)\widetilde{h}_i, i = 1,2$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\widetilde{f}_i(z,\nu) = \|h\|_{V(\Gamma^-)}, i = 1,2$. Отсюда и следует справедливость оценки (18).

Список литературы

1. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назарлиев М.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука. 1976.

2. *Гермогенова Т.А., Коновалов Н.В., Кузьмина М.Г.* Основы математической теории переноса поляризованного излучения (строгие результаты). //Принцип инвариантности и его приложения. Труды Всесоюзного симпозиума, Бюракан, 1981. - Ереван: Изд-во Ан АрмССР. 1989. С. 271–284.

3. *Михайлов Г.А., Ухинов С.А., Чимаева А.С.* Дисперсия стандартной векторной оценки метода Монте-Карло в теории переноса поляризованного излучения. // Журнал вычислительной математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 2099-2113.

4. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006.

5. *Латышев А.В.* Векторная краевая задача Римана-Гильберта в граничных задачах рассеяния поляризованного излучения. // Журнал вычислительной математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 7. С. 1108-1127.

6. *Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V.* Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation// J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. Vol. 14. №6. P. 1-12.

7. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.// Тр.МИАН СССР. 1961. Т. 61. С. 3-158.

8. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. – М.: Наука. 1986.

9. *Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., and Prokhorov I.V.* Transport Equation and Tomography. – Utrecht-Boston. VSP. 2002. pp. viii+208.

10. *Розенберг Г.В.* Вектор-параметр Стокса. // Успехи физ. наук. 1955. Т. 56. №1. С. 77-109.

11. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно - неоднородных средах. М.: Мир. Т.1,2. 1981.

12. *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения. М.: Наука. 1983.

13. *Потапов В.С.* Метод решения уравнения теории переноса для оптически толстого слоя с отражающими границами. //Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 100. №2. С. 287–302.

14. *Прохоров И.В.* О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред. //Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. №6. С. 169-192.

15. *Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., and Krasnikova T.V.* An extremum problem for the radiation transfer equation. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. V. 13. №4. P. 365-382.

16. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. Oxford: Pergamon. 1968.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 02 ноября 2009 г.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №09-01-98521), грантом конкурса Ведущих научных школ РФ (проект НШ-2810.2008.1) и грантами конкурса интеграционных проектов ДВО, СО и УрО РАН (№№09-II-СУ-001, 09-II-СО-004)

Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V. Boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation in layered medium. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 50–59.

ABSTRACT

The boundary-value problem for polarized-radiation transfer equation in layered medium with Fresnel matching conditions at the boundaries of the medium partition is examined. The theorems of solvability of the boundary-value problem are proved, the continuity properties for its solution are examined.
Key words: *vector transfer equation, polarized radiation, Fresnel interface conditions*