ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 60–65

УДК 519.248:62-192+519.176
MSC2000 MSC 2000 60K10+94Cxx

© А.С. Лосев, Г.Ш. Цициашвили*

Вычисление вероятности связности рекурсивно определимых случайных сетей

В работе строятся рекурсивные и асимптотические формулы вычисления вероятности связности для рекурсивно определимых случайных сетей. По сравнению с известными алгоритмами в предлагаемых алгоритмах не требуется нахождения максимальной системы остовов сети, что существенно ускоряет вычисления. Проводятся вычислительные эксперименты, подтверждающие быстродействие и точность алгоритмов, основанных на асимптотических формулах.

Ключевые слова: *вероятность связности, радиально-кольцевые сети, рекурсивные формулы.*

1. Введение

Рекурсивно определимые сети и структуры исследовались в задачах теории надежности достаточно давно. В качестве примера можно привести, во-первых, параллельно-последовательные соединения [1, 2], определяемые следующим способом. К классу $\mathcal{K}_1$ параллельно-последовательных соединений относятся все независимо работающие элементы A. Причем если двухполюсники $A, B \in \mathcal{K}_1$, а множества их элементов не пересекаются, то параллельное соединение $(A \parallel B) \in \mathcal{K}_1$ и последовательное соединение $(A \to B) \in \mathcal{K}_1$.

Во-вторых, в работе [3] в рамках логико-вероятностного подхода [4] введен класс логических выражений от независимых случайных аргументов, принимающих значения $0, 1$. Его можно рассматривать как рекурсивно определимый класс $\mathcal{K}_2$, включающий в себя все независимые случайные логические переменные. Причем если логические выражения $A, B \in \mathcal{K}_2$, а множества их переменных не пересекаются, то конъюнкция $(A \wedge B) \in \mathcal{K}_2$, дизъюнкция $(A \vee B) \in \mathcal{K}_2$ и отрицание $(\overline{A}) \in \mathcal{K}_2$. При этом полагаем формально $\left(\overline{(\overline{A})}\right) = A$. Данный класс логических выражений нашел многочисленные применения в задачах управления риском и эффективностью в экономике.

Для рекурсивно определимых сетей, состоящих из ребер с одинаковой надежностью и описывающих различные физические системы, разработаны методы вычисления надежности, основанные на нахождении всех корней многочлена высокой степени и имеющие полиномиальную сложность [5]. Аналогичная задача, но для рекурсивно определимых сетей вида «consecutive-k-out-of-n», рассматривалась в работе [6].

Нетрудно установить, что для вычисления надежности двухполюсника A из класса $\mathcal{K}_1$ (то есть вероятности существования работающего пути между начальной и конечной вершинами A), а также для нахождения надежности системы, характеризуемой логическим

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: alexax@bk.ru; guram@iam.dvo.ru

выражением A из класса $\mathcal{K}_2$ (то есть вероятности события $(A = 1)$), требуется число арифметических операций, равное числу пар скобок в представлении A. Поэтому естественно поставить вопрос, нельзя ли построить новые и интересные в содержательном плане классы рекурсивно определимых сетей, в частности, включающие в себя сети интернетовского типа [7]. При этом важно, чтобы для построенных классов сетей можно было подобрать экономные и быстрые алгоритмы вычисления надежности.

В настоящей работе строятся рекурсивные и асимптотические формулы для вычисления вероятности связности случайных сетей. Следует отметить, что существуют содержательные и математически интересные результаты ([8]–[10]) по построению верхних и нижних оценок вероятности связности для сетей общего вида. Эти оценки основаны на использовании максимальных систем попарно непересекающихся остовов. Однако сужение класса сетей общего вида до рекурсивно определимых сетей позволяет построить быстросчитаемые асимптотические, а также точные формулы нахождения вероятности связности сети, которые не требуют нахождения максимальной системы остовов.

2. Рекурсия, образованная склеиванием сетей в единственной вершине

Пусть $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_l$ — совокупность сетей с непересекающимися множествами ребер, а $\mathcal{B}'$ — семейство сетей, состоящее из последовательностей независимых копий $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_l$. Определим рекурсивно класс сетей $\mathcal{B}$ с множеством образующих $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, полагая $r(\Gamma) = 0$ для $\Gamma \in \mathcal{B}'$.

Пусть сети $\Gamma \in \mathcal{B},\ \Gamma' \in \mathcal{B}'$ имеют конечные множества вершин U, U' и непересекающиеся множества ребер W, W'. Тогда сеть $\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'$, полученная склеиванием сетей Γ, Γ' в единственной вершине u, также принадлежит классу $\mathcal{B}$, причем $r(\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma') = r(\Gamma) + 1$. Здесь $r(\Gamma)$ может рассматриваться как число склеек, образующих сеть Γ, причем величина $r(\Gamma)$ не превосходит числа ребер в Γ.

Пример 1. *Скажем, что сеть Γ является радиально-кольцевой с n вершинами $1, \ldots, n$ на кольце и центром 0, если ее множество вершин $U = \{0, 1, \ldots, n\}$ и множество ребер $W = \{(01), \ldots, (0n),\ (12), (23), \ldots, (n-1)n, (n1)\}$. Пусть сети $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_l$ являются радиально-кольцевыми. Построим по ним семейство образующих $\mathcal{B}'$ и введем рекурсивно определимый класс сетей $\mathcal{B}$, полученных процедурой склеивания $\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $\Gamma' \in \mathcal{B}'$ с той лишь оговоркой, что их общая вершина является центром радиально-кольцевой сети Γ'. Сеть $\Gamma \in \mathcal{B}$ можно, следуя [7], рассматривать как сеть интернетовского типа.*

Нас будет интересовать вероятность π_Γ связности сети $\Gamma \in \mathcal{B}$, то есть вероятность того, что существует совокупность работающих ребер сети Γ, которые соединены со всеми вершинами исходной сети и образуют связную детерминированную сеть.

Лемма 1. *Для $\Gamma \in \mathcal{B},\ \Gamma' \in \mathcal{B}'$ справедлива следующая рекурсивная формула:*

$$\pi_{\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'} = \pi_\Gamma \pi_{\Gamma'}. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если сеть $\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'$ является связной, то связными являются сети $\Gamma,\ \Gamma'$. Наоборот, если сети $\Gamma,\ \Gamma'$ являются связными, то связной является сеть $\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'$. В свою очередь, из определения класса $\mathcal{B}$ следует, что вероятность связности сетей $\Gamma,\ \Gamma'$ равна произведению $\pi_\Gamma \pi_{\Gamma'}$.

Обозначим $N(\Gamma)$ — число арифметических операций, необходимых для вычисления вероятности связности π_Γ, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $N' = \sum\limits_{1 \le j \le l} N(\Gamma'_j)$.

Теорема 1. *Для любого $\Gamma \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство*

$$N(\Gamma) \le N' + r(\Gamma). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для $\Gamma \in \mathcal{B}'$ неравенство (2) выполняется. Предположим, что (2) выполняется для сети $\Gamma \in \mathcal{B}$, проверим его для суперпозиции $\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma'$, $\Gamma' \in \mathcal{B}'$. Из определения N' и рекурсивной формулы (1) находим, что

$$N(\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma') \le N(\Gamma) + 1 \le N' + r(\Gamma) + 1 = N' + r(\Gamma \overset{u}{\otimes} \Gamma').$$

Замечание 1. *Из теоремы 1 следует линейная по числу ребер сложность вычисления вероятности связности для сетей из рекурсивно определимого класса $\mathcal{B}$.*

Замечание 2. *Вместо вероятности связности π_Γ можно ввести вероятность ψ_Γ существования замкнутого пути, проходящего через все вершины Γ. Повторяя приведенные выше рассуждения, нетрудно вместо (2) доказать неравенство*

$$K(\Gamma) \le K' + r(\Gamma), \tag{3}$$

где $K(\Gamma)$ — число арифметических операций, необходимых для вычисления ψ_Γ, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $K' = \sum\limits_{1 \le j \le l} K(\Gamma'_j)$. По своей формулировке задача вычисления ψ_Γ напоминает задачу коммивояжера.

3. Асимптотические формулы и вычислительный эксперимент

3.1. Асимптотические формулы

Остановимся на приведенном в примере 1 случае, когда множество образующих $\mathcal{B}'$ состоит из радиально-кольцевых схем Γ, удовлетворяющих следующему асимптотическому условию. Полагаем, что каждое ребро $w \in W$ независимо от других ребер работает с вероятностью p_w, $0 < p_w < 1$, $w \in W$ и при $h \to 0$ вероятности работы кольцевых ребер

$$p_{u_1,u_2} = p_{u_1,u_2}(h) \to 0,\ p_{u_2,u_3} = p_{u_2,u_3}(h) \to 0, \dots,$$
$$p_{u_{n-1},u_n} = p_{u_{n-1},u_n}(h) \to 0,\ p_{u_n,u_1} = p_{u_n,u_1}(h) \to 0. \tag{4}$$

В свою очередь, вероятности работы радиальных ребер $(u_*, u_1), \dots, (u_*, u_n)$ положительны и не зависят от параметра h

$$p_{u_*,u_1} = \text{const} > 0, \dots, p_{u_*,u_n} = \text{const} > 0. \tag{5}$$

Заметим, что условия (4), (5) взяты из наблюдений за многочисленными реальными системами, в которых вероятности работы радиальных ребер близки к единице, а вероятности работы кольцевых ребер — к нулю.

Теорема 2. *При выполнении соотношений (4), (5) справедлива асимптотическая формула*

$$\pi_\Gamma \to \prod_{i=1}^{n} p_{u_*,u_i},\ h \to 0. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим A событие, состоящее в том, что сеть Γ является связной, то есть в ней существует совокупность работающих ребер $W_* \subseteq W$, множество концов которых совпадает с U, причем для любой пары вершин из U можно указать путь R, все ребра которого принадлежат W_*. Определим событие $B \subseteq A$, заключающееся в работе всех радиальных ребер $(u_*, u_1), \ldots, (u_*, u_n)$. Введем событие C, состоящее в том, что хотя бы одно из радиальных ребер не работает, и событие D, состоящее в том, что хотя бы одно из кольцевых ребер $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, u_1)$ работает. Нетрудно убедиться в справедливости включения

$$A \setminus B \subseteq C \cap D$$

и вытекающего из него неравенства

$$P(A) - P(B) \leq P(C)P(D). \tag{7}$$

Из определения событий A, B, C, D следует, что при $h \to 0$ выполняются соотношения

$$P(A) = \pi_\Gamma,\ P(B) = \prod_{i=1}^{n} p_{u_*, u_i},\ P(C \cap D) = P(C)P(D) \leq P(D) \leq \sum_{i=1}^{n} p_{u_*, u_i} \to 0. \tag{8}$$

Подставляя соотношения (8) в неравенство (7), получаем асимптотическую формулу (6).

Замечание 3. *Почти дословно повторяя доказательство теоремы 2, легко распространить ее утверждение на сеть, состоящую из центральной и кольцевых вершин. В этой сети центральная вершина соединена с кольцевыми вершинами радиальными ребрами, надежности которых удовлетворяют условиям (5). А кольцевые вершины могут быть соединены между собой произвольными (необязательно кольцевыми) ребрами, удовлетворяющими условиям (4).*

Замечание 4. *Предположим, что граф Γ с множествами вершин U и ребер W удовлетворяет следующему свойству. Существует подмножество W_1 множества ребер W, образующее связный подграф Γ_1 графа Γ с множеством вершин $U_1 = U$. Причем удаление любого ребра из графа Γ_1 либо делает его несвязным, либо приводит к нарушению равенства $U_1 = U$. Тогда, если надежности ребер p_w, $w \in W$, удовлетворяют соотношениям*

$$p_w = const > 0,\ w \in W_1,\ p_w = p_w(h) \to 0,\ h \to 0,\ w \in W \setminus W_1,$$

то справедливо предельное соотношение

$$\pi_\gamma \to \prod_{w \in W_1} p_w,\ h \to 0.$$

3.2. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим радиально-кольцевую сеть с шестью вершинами на кольце и вероятностями работы ребер

$$p(01) = 0.993515,\ p(02) = 0.99727,\ p(03) = 0.995938,\ p(04) = 0.980191,$$

$$p(05) = 0.98099,\ p(06) = 0.990262,\ p(12) = 0.0132823,\ p(23) = 0.00489211,$$

$$p(34) = 0.010295,\ p(45) = 0.00573119,\ p(56) = 0.0180407,\ p(61) = 0.0034061.$$

Обозначим π^*, π^{**} оценки вероятности связности, полученные с помощью асимптотической формулы (6) и с помощью метода Монте-Карло с 100000 случайных реализаций радиально-кольцевой сети соответственно. Эксперимент на компьютере показал, что

$$\pi^* = 0.955411,\ \pi^{**} = 0.95552,\ \left|\frac{\pi^{**}}{\pi^*} - 1\right| = 1.14 * 10^{-4},\ \left|\frac{1 - \pi^{**}}{1 - \pi^*} - 1\right| = 0.00245,$$

а время вычисления π^* более чем в 10^4 раз меньше, чем время вычисления π^{**}. Рассмотрим радиально-кольцевую сеть с шестью вершинами на кольце и вероятностями работы ребер

$$p(01) = 0.91,\ p(02) = 0.92,\ p(03) = 0.93,\ p(04) = 0.94,\ p(05) = 0.95,\ p(06) = 0.96,$$

$$p(12) = 0.0132823,\ p(23) = 0.00489211,\ p(34) = 0.010295,$$

$$p(45) = 0.00573119,\ p(56) = 0.0180407,\ p(61) = 0.0034061.$$

Эксперимент на компьютере показал, что

$$\pi^* = 0.667475,\ \pi^{**} = 0.67149,\ \left|\frac{\pi^{**}}{\pi^*} - 1\right| = 0.00597957$$

при том же различии во временах счета вероятностей π^*, π^{**}.

Список литературы

1. *Barlow R. E., Proschan F.* Mathematical Theory of Reliability. London and New York: Wiley, 1965.
2. *Ушаков И. А. и др.* Надежность технических систем: Справочник. М.: Радио и связь, 1985.
3. *Соложенцев Е. Д.* Особенности логико-вероятностной теории риска с группами несовместных событий. Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, стр. 187–203.
4. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007.
5. *Tanguy C.* Exact solutions for the two-terminal Reliability of recursive structures: a few directions. MMR 2009 – Mathematical methods in reliability. Moscow, 2009, pp. 220-224.
6. *Cui L., Zhao X.* Recursive Equations of Reliability for Linear Consecutive-k-out-of-n: F Systems with Sparse d. MMR 2009 – Mathematical methods in reliability. Moscow, 2009, p. 45.
7. *Ball M. O., Colbourn C. J., Provan J. S.* Network Reliability. In Network Models. Handbook of Operations Research and Management Science. Elsevier. Amsterdam, 1995, vol. 7, pp. 673–762.
8. *Полесский В.П.* Оценки вероятности связности случайного графа. Проблемы передачи информации, 1990, том 26, № 1, стр. 90–98.
9. *Полесский В.П.* Нижние оценки вероятности связности для некоторых классов случайных графов. Проблемы передачи информации, 1993, том 29, № 2, стр. 85–95.
10. *Полесский В.П.* Нижние оценки вероятности связности в классах случайных графов, порожденных двусвязными графами с заданным базовым спектром. Проблемы передачи информации, 1992, том 28, № 2, стр. 86–95.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 октября 2009 г.

Losev A.S., Tsitsiashvili G.Sh. Calculation of cohesiveness probability for recursively defined random networks. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 60–65.

ABSTRACT

For recursively defined random networks in this paper recursive and asymptotic formulas of a calculation of cohesiveness probability are constructed. A comparison with known algorithms shows that in suggested algorithms it is not necessary to find maximal systems of frames. That accelerates calculations significantly. Numerical experiments which confirm an operation speed of suggested algorithms and an accuracy of assumed asymptotic formulas is made.

Key words: *a cohesiveness probability, a radial-circle network, a recursive formula.*