ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 1. С. 80–85
УДК 519.246.24+519.246.5
MSC2000 60G30+60G40

© Ю.Н. Харченко, Г.Ш. Цициашвили*

Непрерывность вероятности достижения критического уровня авторегрессионной случайной последовательностью

В работе доказывается непрерывная зависимость распределения времени достижения авторегрессионной случайной последовательностью некоторого критического уровня от распределения случайной добавки, приращение которой измеряется в равномерной метрике.

Ключевые слова: *равномерная метрика, авторегрессионная случайная последовательность, непрерывность.*

1. Введение

Рассмотрим авторегрессионную случайную последовательность

$$S_0 = 0,\ S_n = RS_{n-1} + A_n,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $R < 1,\ A_n,\ n > 0,$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин, $P(A_n < x) = F(x),\ n \geq 0$. Полагаем, что функция распределения $F(x)$ имеет плотность f, ограниченную положительным числом $c = c(F)$. Обозначим

$$\tau(x) = \min(n:\ S_n \geq x) \tag{2}$$

момент достижения последовательностью $S_n,\ n \geq 0$, уровня $x > 0$. Наряду с последовательностью $S_n,\ n \geq 0$, определим возмущенную последовательность $S^*_n,\ n \geq 0:$

$$S^*_0 = 0,\ S^*_n = RS^*_{n-1} + A^*_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

где A^*_n — последовательность независимых случайных величин $P(A^*_n < x) = F^*(x),\ n \geq 0$, положим $\tau^* = \min(n:\ S^*_n \geq x)$.

А.А. Новиковым была поставлена задача выбора метрики ρ, измеряющей близость распределений $F(x), F^*(x)$ такой, чтобы при $\rho(F, F^*) \to 0$ для любых фиксированных $x > 0,\ n > 0$ выполнялась сходимость $|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \to 0$. Выбор метрики ρ основан на возможности аппроксимировать субэкспоненциальное распределение F смесью экспонент F^*. В этом случае удобно воспользоваться полученными в [1] рекуррентными по n соотношениями, позволяющими вычислить распределение момента достижения (2) в виде суммы экспонент. Поэтому теорема непрерывности позволяет строить приближенные методы вычисления распределения момента достижения (2) для случайной последовательности (1).

* Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио 7. Электронная почта: `har@iam.dvo.ru, guram@iam.dvo.ru`

Среди возможных метрик наиболее предпочтительной является равномерная метрика $\rho(F, F^*) = \sup_x |F(x) - F^*(x)|$. Действительно, скажем, что плотность распределения $f(t)$, сосредоточенного на $[0, \infty]$, является полностью монотонной, если у нее существуют производные всех порядков и $(-1)^k f^{(k)}(t) \geq 0$ для всех $t > 0$ и $k \geq 1$. Примерами таких распределений являются распределения Парето и Вейбулла. Из теоремы Бернштейна [2, теоремы 3.1, 3.2] следует, что для функции распределения F с полностью монотонной плотностью существует последовательность функций распределения, представимых в виде конечных сумм экспонент

$$F_s(x) = \sum_{i=1}^{l_s} p_{si}(1 - \exp(-\lambda_{si} x)),\ x \geq 0,\ s > 0,$$

где $0 < \lambda_{si}, p_{si} < \infty,\ p_{s1} + \ldots + p_{sl_s} = 1$, причем $\rho(F, F_s) \to 0,\ s \to \infty$. Поэтому в равномерной метрике субэкспоненциальные распределения вида Парето и Вейбулла можно аппроксимировать с любой заданной точностью смесью экспоненциальных распределений. Заметим, что для вычисления распределения момента достижения (2) в модели (1) не удается воспользоваться метрикой $l(F, F^*) = \int_0^\infty |F(t) - F_*(t)|dt$, которая применялась [3] при анализе непрерывности одноканальной системы массового обслуживания $G|G|1|\infty$ на конечном отрезке времени.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Для любых $x > 0,\ n > 0$ справедлива сходимость*

$$|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \to 0,\ \rho(F, F^*) \to 0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $x, n > 0$, пусть E^n — n-мерное эвклидово пространство. Обозначим $\mathcal{S}_n = (S_1, ..., S_n),\ \mathcal{S}_n^* = (S_1^*, ..., S_n^*),\ \mathcal{A}_n = (A_1, ..., A_n),\ \mathcal{A}_n^* = (A_1^*, ..., A_n^*)$ и выберем в пространстве E^n куб $\Delta = \{\mathcal{S}_n :\ 0 \leq S_1 < x, ..., 0 \leq S_n < x\}$. При таком выборе справедливы равенства

$$P(\tau(x) > n) = P(\mathcal{S}_n \in \Delta),\ P(\tau(x)^* > n) = P(\mathcal{S}_n^* \in \Delta). \tag{4}$$

С помощью рекуррентных соотношений (1) нетрудно определить невырожденную матрицу $\mathcal{C}$, удовлетворяющую соотношениям

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \mathcal{C},\ \mathcal{S}_n^* = \mathcal{A}_n^* \mathcal{C}. \tag{5}$$

Обозначим $\Gamma = \Delta \mathcal{C}^{-1}$, тогда в силу (4) получим

$$P(\tau(x) > n) = P(\mathcal{A}_n \in \Gamma),\ P(\tau(x)^* > n) = P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma). \tag{6}$$

Разобьем E^n на n-мерные кубики γ_h^k со стороной $h > 0$, определяемые векторами $k = (k_1, ..., k_n)$ с целочисленными компонентами:

$$\gamma_h^k = \{(e_1, ..., e_n) :\ k_i h \leq e_i < (k_i + 1)h,\ i = 1, ..., n\}.$$

Введем множества Γ_h^-, Γ_h^+, состоящие из кубиков γ_h^k :

$$\Gamma_h^- = \bigcup_{k:\ \gamma_h^k \subset \Gamma} \gamma_k,\ \Gamma_h^+ = \bigcup_{k:\ \gamma_h^k \Gamma \neq \oslash} \gamma_h^k.$$

Пусть $V(\Gamma_h^-)$, (Γ_h^+) объемы множеств $\Gamma_h^- \subseteq \Gamma_h^+$, $N(\Gamma_h^-)$, $N(\Gamma_h^+)$ количество входящих в них кубиков, $V(\Gamma_h^-) \leq V(\Gamma_h^+)$, $N(\Gamma_h^-) \leq N(\Gamma_h^+)$. Несложными геометрическими построениями можно доказать, что существует $h_0 > 0$ такое, что при $h < h_0$ выполняются неравенства

$$V(\Gamma)\left(1 - 2\frac{nh\overline{c}}{x}\right)^n \leq V(\Gamma_h^-),\ V(\Gamma_h^+) \leq V(\Gamma)\left(1 + 2\frac{nh\overline{c}}{x}\right)^n, \tag{7}$$

где $\overline{c} = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |c'_{ij}|$, $||c'_{ij}||_{i,j=1}^n = \mathcal{C}^{-1}$.

Методом математической индукции нетрудно доказать, что $S_n = \sum_{j=1}^i R^{i-j}A_j$, поэтому матрица $\mathcal{C} = ||c_{ij}||_{i,j=1}^n$, где $c_{ij} = R^{j-i}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $c_{ij} = 0$, $1 \leq j < i \leq n$. Следовательно матрица $||c'_{ij}||_{i,j=1}^n$ удовлетворяет равенствам $c'_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$, $c_{ii+1} = -R$, $1 \leq i < n$, $c'_{ij} = 0$ для всех остальных элементов матрицы $||c'_{ij}||_{i,j=1}^n$ и значит $\overline{c} = 1$.

Отсюда следует, что существует константа $C = C(\Gamma) > 0$, удовлетворяющая при любом h, $0 < h < h_0$ неравенству

$$V(\Gamma_h^+) - Ch \leq V(\Gamma) \leq V(\Gamma_h^-) + Ch. \tag{8}$$

Действительно, в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при заданном $z_0 > 0$

$$(1+z)^n \leq zn(1+z)^{n-1},\ 0 < z < z_0,$$

поэтому

$$\left(1 + 2\frac{nh}{x}\right)^n \leq 1 + \frac{2n^2h}{x}\left(1 + 2\frac{nh_0}{x}\right)^{n-1},\ 0 < h < \frac{z_0x}{n} = h_0,$$

и значит при $0 < h < h_0$

$$V(\Gamma_h^+) \leq V(\Gamma) + C(\Gamma)h,\ C(\Gamma) = V(\Gamma)\frac{2n^2}{x}\left(1 + 2\frac{nh_0}{x}\right)^{n-1}, \tag{9}$$

причем так определенное $C = C(\Gamma)$ удовлетворяет также и правому неравенству в (8).

Из формулы (8) следует, что

$$P(\mathcal{A}_n \in \Gamma_h^+) - Cch \leq P(\mathcal{A}_n \in \Gamma) \leq P(\mathcal{A}_n \in \Gamma_h^-) + Cch, \tag{10}$$

причем

$$N(\Gamma_h^+) \leq \frac{V(\Gamma) + C(\Gamma)h}{h^n},\ 0 < h < h_0. \tag{11}$$

Зафиксируем $i \in \{1, ..., n\}$, например, положим $i = n$ и спроецируем n-мерный параллелепипед Γ на одну из гиперплоскость $A_n = 0$. В результате получим параллелепипед Γ_n, который разобьем на кубики γ_h^l, где $l = (l_1, ..., l_{n-1})$.

Если $0 \leq a_1, b_1, ..., a_n, b_n \leq 1$, то индукцией по n нетрудно получить неравенство

$$\left|\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n a_i^*\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - a_i^*|.$$

По определению γ_k^h имеем:

$$P(\mathcal{A}_n \in \gamma_h^k) = \prod_{i=1}^n (F(h(k_i+1)) - F(hk_i)),$$

$$P(\mathcal{A}_n^* \in \gamma_h^k) = \prod_{i=1}^n (F^*(h(k_i+1)) - F^*(hk_i))$$

Полагая $a_i = F(h(k_i+1)) - F(hk_i)$, $a_i^* = F^*(h(k_i+1)) - F^*(hk_i)$, и убеждаясь в неравенствах $0 \le a_1, a_1^*, ..., a_n, a_n^* \le 1$, получаем, что для любого k и для любого $h > 0$ справедливо неравенство

$$|P(\mathcal{A}_n \in \gamma_h^k) - P(\mathcal{A}_n^* \in \gamma_h^k)| \le 2n\rho(F, F^*), \tag{12}$$

поэтому

$$\left|P(\mathcal{A}_n \in \Gamma_h^{\pm}) - P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma_h^{\pm})\right| \le 2N(\Gamma_h^{\pm})n\rho(F, F^*). \tag{13}$$

Из неравенств (10), (13) имеем при любом $h < h_0$:

$$P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma) - Cch - 2N(\Gamma_h^+)n\rho(F, F^*) \le$$

$$\le P(\mathcal{A}_n \in \Gamma) \le P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma) + Cch + 2N(\Gamma_h^+)n\rho(F, F^*),$$

т.е.

$$|P(\mathcal{A}_n \in \Gamma) - P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma)| \le C(\Gamma)c(F)h + 2N(\Gamma_h^+)n\rho(F, F^*). \tag{14}$$

В силу (4)–(6), (14) при любом $h < h_0$ имеем:

$$|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \le C(\Gamma)c(F)h + 2N(\Gamma_h^+)n\rho(F, F^*). \tag{15}$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и определим $h < h_0$ из условия $C(\Gamma)c(F)h < \varepsilon$. По так выбранному h определим δ, удовлетворяющее неравенству

$$2N(\Gamma_h^+)n\rho(F, F^*) < \varepsilon \text{ при } \rho(F, F^*) < \delta.$$

Таким образом, в силу (15) по заданному ε находим $\delta > 0$ такое, что

$$|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \le 2\varepsilon \text{ при } \rho(F, F^*) < \delta.$$

Формула (3) доказана.

Следствие 1. *Утверждение теоремы 1 справедливо в предположении, что случайные величины A_n, $n \ge 1$, имеют собственное распределение на всей вещественной оси.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства следствия 1 переопределим Δ равенством

$$\Delta = \{\mathcal{S}_n : \ S_1 < x, ..., S_n < x\}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь множество $\Delta\mathcal{C}^{-1}$, уже не являющееся при выполнении условия (16) параллелепипедом. Введем куб

$$\Delta_b = \{\mathcal{S}_n : \ -b \le S_1 < x, ..., -b \le S_n < x\}$$

и определим параллелепипед $\Gamma_b = \Delta_b\mathcal{C}^{-1}$ и соответствующую ему совокупность кубиков $\Gamma_{b,h}^+$. Причем, меняя в формулах (7), (11) x на $x+b$, приходим к справедливости неравенства (14), в котором Γ заменено на Γ_b. Перейдем теперь к аналогу неравенства (15). Для этого запишем:

$$P(\tau(x) > n) = P(\mathcal{A}_n \in \Delta\mathcal{C}^{-1}) = P(\mathcal{A}_n \in \Gamma_b) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(S_i < b)\right),$$

$$P(\tau^*(x) > n) = P(\mathcal{A}_n^* \in \Delta\mathcal{C}^{-1}) = P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(S_i^* < b)\right),$$

причем

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(S_i < b)\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(S_i < b) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\sum_{j=1}^{i} R^{i-j}A_j < b\right) =$$

$$= \pi_n(b) \to 0,\ b \to -\infty,$$

$$|P(S_i < b) - P(S_i^* < b)| = \left| P\left(\sum_{j=1}^{i} R^{i-j} A_j < b\right) - P\left(\sum_{j=1}^{i} R^{i-j} A_j^* < b\right) \right| \leq$$

$$\leq i\rho(F, F^*),$$

следовательно,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_i < b)\right) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_i^* < b)\right) \leq 2\pi_n(b) + \frac{n(n+1)\rho(F, F^*)}{2}.$$

Таким образом, получаем, что

$$|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \leq |P(\mathcal{A}_n \in \Gamma_b) - P(\mathcal{A}_n^* \in \Gamma)| +$$

$$+2\pi_n(b) + \frac{n(n+1)\rho(F, F^*)}{2} \leq C(\Gamma_b)c(F)h + 2N(\Gamma_{b,h}^+)n\rho(F, F^*) +$$

$$+2\pi_n(b) + \frac{n(n+1)\rho(F, F^*)}{2},\ 0 < h < h_0,$$

где по аналогии с (9), (11)

$$C(\Gamma_b) = V(\Gamma_b)\frac{2n^2}{x}\left(1 + 2\frac{nh_0}{x}\right)^{n-1},\ N(\Gamma_{b,h}^+) \leq \frac{V(\Gamma_b) + C(\Gamma_b)h}{h^n},\ 0 < h < h_0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем b из условия $2\pi_n(b) < \varepsilon$. Определим затем h из неравенства $C(\Gamma_b)c(F)h < \varepsilon$, по выбранным b, h найдем δ такое, что

$$\frac{n(n+1)\delta}{2} + 2n\delta N(\Gamma_{b,h}^+) < \varepsilon.$$

Тогда при $\rho(F, F^*) < \delta$ имеем

$$|P(\tau(x) > n) - P(\tau^*(x) > n)| \leq 3\varepsilon.$$

Утверждение следствия 1 доказано.

Замечание. *Для решения задачи непрерывности вероятностной модели (1), (2) потребовалось воспользоваться приемами более характерными не для устойчивости вероятностных моделей, а для теории чисел.*

Список литературы

1. *Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А.* Точное решение задачи А.А. Новикова о моментах достижения для авторегрессионной последовательности. Дальневосточный математический журнал. 2009. Том 9, № 1-2. С. 182-189.

2. *Feldmann A., Whitt W.* Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network perfomance models. Perfomance Evaluation. 1998. Vol. 31. P. 245-279.

3. *Золотарев В.М.* Стохастическая непрерывность систем массового обслуживания Теория вероятностей и ее применения. 1976. Том 21. № 2. С. 260-279.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 ноября 2009 г.

Kharchenko Yu.N., Tsitsiashvili G.Sh. Continuity of reaching moment distribution for autoregressive random sequence. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 1. P. 80–85.

ABSTRACT

In this paper a continuity of a reaching moment distribution for an autoregressive random sequence if an increment of a random addition is measured in the uniform metric is proved.

Key words: *a uniform metric, an autoregressive random sequence, a continuity.*