*ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ.* 2010. Том 10. № 2. С. 106–116

УДК 517.928, 532.517.43, 532.527
MSC2000 37N10, 76B47

© А.И. Гудименко, А.Д. Захаренко*

# Исследование положений относительного равновесия трех вихрей

Исследуются тип, число и устойчивость положений относительного равновесия трех точечных вихрей в двумерной модели неограниченной идеальной жидкости.

Ключевые слова: *точечные вихри, относительное равновесие, устойчивость, алгебраическая редукция.*

## 1. Введение

Считается, что наиболее полный качественный анализ относительного движения трех точечных вихрей содержится в [1]. Однако результаты этой работы не очень наглядны (см. соответствующие комментарии в [2, 3]): это вызвано реальной сложностью задачи и неадекватным, по нашему мнению, способом редукции абсолютного движения вихрей к относительному. Недавняя работа [3] частично исправила ситуацию в контексте исследования устойчивости положений равновесия трех вихрей. Однако и в этой работе используется «наивная» редукция, и — как следствие — анализ ограничен линейным приближением.

В настоящей работе предлагается вариант локального качественного анализа относительного движения трех вихрей, основанный на методе алгебраической редукции [2, 4–6], уже показавшем свою эффективность при построении асимптотик абсолютного движения вихрей [7–9]. При использовании этого метода не возникает проблем с определением относительной устойчивости так же, как и со структурированием и наглядностью результатов. Кроме того, представление уравнений относительного движения в виде двумерной гамильтоновой системы упрощает вычисление асимптотических разложений движения выше линейной степени и позволяет использовать известные методы качественного анализа двумерных систем [10].

**Обозначения и соглашения.** Для удобства прочтения приведем список некоторых из используемых в работе обозначений:

$x_i$, $y_i$ — декартовы координаты $i$-го вихря;

$\gamma_i$ и $a_i = \gamma_i^{-1}$ — интенсивность и обратная интенсивность $i$-го вихря;

$m_i = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2$ — квадрат расстояния между вихрями, отличными от $i$-го;

$m_0 = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$ — удвоенная ориентированная площадь вихревого треугольника;

$\gamma = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1$, $a = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$;

$\operatorname{sgn} z$ — сигнатура $z \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} z = 1$ при $z > 0$, $\operatorname{sgn} z = -1$ при $z < 0$ и $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

[1]Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43. Электронная почта: algud@poi.dvo.ru

Набор индексов $(i,j,k)$ в формулах, если их диапазон изменения не задан, принимает все циклические перестановки тройки чисел $(1,2,3)$.

## 2. Уравнения абсолютного движения и интегралы

Движение трех точечных вихрей описывается гамильтоновой динамической системой

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi}\big(\gamma_1\gamma_2 \ln m_3 + \gamma_2\gamma_3 \ln m_1 + \gamma_3\gamma_1 \ln m_2\big) \tag{2}$$

и скобкой Пуассона

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\gamma_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big). \tag{3}$$

Помимо гамильтониана эта система обладает тремя независимыми первыми интегралами

$$P = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i x_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^{3}\gamma_i(x_i^2 + y_i^2),$$

связанными с инвариантностью уравнений движения относительно сдвигов и поворотов системы координат. Эти интегралы не находятся в инволюции, однако из них можно сконструировать пару инволютивных интегралов, например,

$$P^2 + Q^2, \quad D = \frac{(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)I - P^2 - Q^2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} = \frac{m_1}{\gamma_1} + \frac{m_2}{\gamma_2} + \frac{m_3}{\gamma_3}, \tag{4}$$

что позволяет понизить порядок системы на четыре единицы.

Про систему (1)–(3) говорят, что она описывают *абсолютное* движение вихрей. С относительным движением ассоциируют *редуцированную* динамическую систему.

## 3. Уравнения относительного движения

**Редуцированная система.** Справедливы соотношения

$$\{m_i, m_j\} = -4a_k m_0, \quad \{m_0, m_i\} = (a_k - a_j)m_i + (a_j + a_k)(m_k - m_j). \tag{5}$$

В пространстве переменных $m_i$, $i = 0,1,2,3$, эти соотношения определяют структуру многообразия Ли – Пуассона с двумя центральными функциями $D$ и $F$, где

$$F = 4m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1).$$

Последняя возникает из соотношения Герона, связывающего площадь треугольника с длинами его сторон.

*Редуцированная система* определяется как ограничение на симплектический лист $D = \mathrm{const}$, $F = 0$ гамильтоновой системы с гамильтонианом (2) и скобкой (5).

В явном виде уравнения системы задаются равенствами

$$\dot{m}_0 = \sum \frac{(a_i + a_j)(m_i - m_j)}{4\pi a_i a_j m_k}, \quad \dot{m}_i = -\frac{m_0(m_j - m_k)}{\pi a_i m_j m_k}. \tag{6}$$

Скобка (5) — линейная; соответствующая ей алгебра Ли называется *вихревой* алгеброй [2].

**Структура симплектического листа.** Симплектический лист в зависимости от знака величины $a = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ линейным преобразованием вихревой алгебры может быть трансформирован в эллипсоид ($a > 0$), параболоид ($a = 0$) или гиперболоид ($a < 0$).

Так, при $a \neq 0$, полагая

$$\begin{gathered} e_0 = \sum \frac{a_i m_i}{4a}, \quad e_1 = \frac{m_0}{2\sqrt{|a|}}, \quad e_2 = e_0 - \frac{m_3}{2(a_1+a_2)}, \\ e_3 = \frac{a_1(m_1 - m_2 + m_3) + a_2(m_1 - m_2 - m_3)}{4\sqrt{|a|}(a_1+a_2)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Находим, что

$$\{e_0, e_i\} = 0, \quad \{e_1, e_2\} = e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = \operatorname{sgn}(a) e_2, \tag{8}$$

и, коль скоро $F = 0$,

$$e_1^2 + \operatorname{sgn}(a) e_2^2 + e_3^2 - \operatorname{sgn}(a) e_0^2 = 0. \tag{9}$$

Мы видим, что в новых координатах фазовое пространство редуцированной системы расслоено на сферы при $a > 0$ и двуполостные гиперболоиды при $a < 0$. При $e_0 = 0$ получаем соответственно точку и конус. Симплектическая структура на этих поверхностях задается соотношениями (8).

То, что образующие (7) не определены при $a_1 + a_2 = 0$, не сказывается на общности рассмотрения, ибо, перенумеровывая вихри, всегда можно считать $a_1 + a_2 \neq 0$.

При $a = 0$ мы полагаем

$$\begin{gathered} e_0 = \sum a_i m_i, \quad e_1 = m_0, \quad e_2 = \frac{m_3}{2(a_1+a_2)}, \\ e_3 = -\frac{a_1(m_1 - m_2 + m_3) + a_2(m_1 - m_2 - m_3)}{2(a_1+a_2)} \end{gathered} \tag{10}$$

и находим

$$\{e_0, e_i\} = 0, \quad \{e_1, e_2\} = e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = -e_0, \tag{11}$$

$$e_1^2 + e_3^2 - 2e_0e_2 = 0. \tag{12}$$

Таким образом, в новых координатах фазовое пространство расслоено на параболоиды с симплектической структурой (11). При $e_0 = 0$ параболоид вырождается в луч.

**Преобразования вихревой алгебры.** Коснемся вопроса о линейных преобразованиях вихревой алгебры, сохраняющих расслоенную структуру пуассонова многообразия (8), (9) или (11), (12). При $a > 0$ эти преобразования суть вращения в пространстве $e_0 = \mathrm{const}$, при $a < 0$ — композиция подходящих обычных и гиперболических вращений, при $a = 0$ — это преобразования вида

$$\begin{gathered} e_{0'} = e_0, \\ e_{1'} = Ae_0\cos\theta + e_1\cos\phi + e_3\sin\phi, \\ e_{2'} = \tfrac{1}{2}A^2e_0 + Ae_1\cos(\theta+\phi) + e_2 + Ae_3\sin(\theta+\phi), \\ e_{3'} = Ae_0\sin\theta - e_1\sin\phi + e_3\cos\phi, \end{gathered}$$

где $A$, $\theta$ и $\phi$ — произвольные постоянные.

Этот вопрос нам интересен с точки зрения выбора образующих вихревой алгебры. При $e_0 \neq 0$ указанными преобразованиями любую точку симплектического листа можно переместить в его «основание» — точку с координатами $e_1 = e_3 = 0$. Так, при $a \neq 0$ можно получить, например, образующие

$$\begin{gathered} e_0 = \sum \frac{a_i}{4a} m_i, \quad e_1 = \frac{m_0}{2\sqrt{|a|}}, \quad e_2 = \frac{E_0}{E_2} e_0 + \sum \frac{M_i - M_j - M_k}{16aE_2} m_i, \\ e_3 = \sum \frac{(a_i + a_j)M_j - (a_k + a_i)M_k}{16a\sqrt{|a|}E_2} m_i, \end{gathered} \tag{13}$$

переводящие в основание $E_1 = E_3 = 0$ поверхности (9) точку, отвечающую конфигурации вихрей с нулевой площадью и квадратами длин сторон $M_1$, $M_2$ и $M_3$ (заглавные буквы мы связываем с выделенной точкой).

Обратное к (13) преобразование дается соотношениями

$$\begin{aligned} m_0 = 2\sqrt{|a|}e_1, \quad m_i = 2(a_j + a_k)\Big(e_0 - \frac{E_0}{E_2} e_2\Big) \\ + \frac{2aM_ie_2 - \sqrt{|a|}\big((a_j(M_k - M_i - M_j) - a_k(M_j - M_k - M_i)\big)e_3}{2aE_2}. \end{aligned} \tag{14}$$

**Канонические координаты.** При фиксированном $e_0$ на поверхности (9) можно ввести (многими способами [2]) канонические координаты. Мы используем следующие:

$$x = -\frac{\sqrt{2}e_1}{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}, \quad y = \frac{\sqrt{2}e_3}{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}. \tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что $\{x, y\} = 1$. Обращение (15) дается выражениями

$$\begin{gathered} e_2 = \operatorname{sgn}(a)|e_0| - \frac{x^2 + y^2}{2}, \\ e_1 = -\frac{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}{\sqrt{2}} x, \quad e_3 = \frac{\sqrt{|e_0| + \operatorname{sgn}(a)e_2}}{\sqrt{2}} y. \end{gathered}$$

При $a = 0$ в качестве канонических координат мы берем

$$x = \frac{e_1}{\sqrt{|e_0|}}, \quad y = \frac{e_3}{\sqrt{|e_0|}}. \tag{16}$$

## 4. Особые точки редуцированной системы

У редуцированной системы имеется три вида особых точек [2]. Это точки, отвечающие сингулярной ($m_i = m_j$, $m_k = 0$), равносторонней ($m_1 = m_2 = m_3$) и коллинеарной ($m_0 = 0$, $\dot{m}_0 = 0$) конфигурациям вихрей. Рассмотрим вопрос о распределении числа и типа особых точек на фазовом портрете системы при варьировании параметров $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $D$. Будем предполагать $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$.

**Особые точки, отвечающие сингулярным и равносторонним конфигурациям.** Положим

$$D_i = a_j + a_k, \quad D_e = a_1 + a_2 + a_3.$$

Эти величины суть интеграл $D$, взятый в особых точках, отвечающих сингулярной, $m_i = 0$, $m_j = m_k = 1$, и равносторонней, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, конфигурациям вихрей.

При заданных $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ и $D$ наличие или отсутствие сингулярной конфигурации типа $m_i = 0$ определяется соотношением $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} D_i$. В случае равносторонней конфигурации — $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} D_e$. Если соотношение выполняется — конфигурация реализуется, в противном случае — нет.

**Особые точки, отвечающие коллинеарным конфигурациям.** Типология коллинеарной конфигурации не столь прозрачна, как сингулярной и равносторонней конфигураций.

Коллинеарные конфигурации принято параметризовать величиной $z \in \mathbb{R}$, полагая

$$m_1 = z^2 m_3, \quad m_2 = (1-z)^2 m_3.$$

При $z > 1$ первый вихрь лежит между вторым и третьим, при $z < 0$ второй лежит между третьим и первым, и при $0 < z < 1$ третий — между первым и вторым. Эти конфигурации мы называем соответственно *конфигурациями первого, второго* и *третьего типа* и обозначаем I, II и III.

Через параметр $z$ необходимое условие реализации коллинеарной конфигурации $\dot{m}_0 = 0$ может быть записано в виде

$$\gamma_3 = \frac{z^2(z-2)\gamma_1 + (z+1)(z-1)^2\gamma_2}{2z-1}. \tag{17}$$

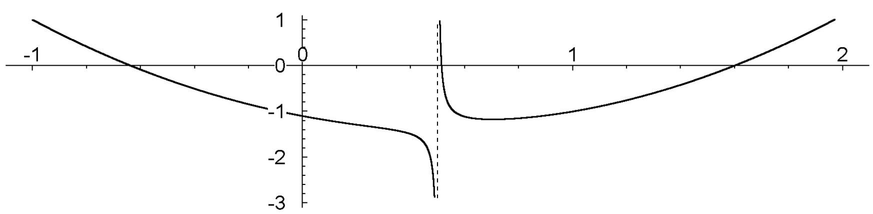


Рис. 1. График функции (17) при $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1.1$.

**Предложение 4.1.** *Функция (17) имеет единственный конечный минимум $z_c$. Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то $\frac{1}{2} < z_c < 1$, иначе $z_c = \frac{1}{2}$. На интервалах $z < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < z < z_c$ функция монотонно убывает, на интервале $z > z_c$ — монотонно возрастает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Рассмотрим производную (17) по $z$:

$$\dot{\gamma}_3 = \frac{z(4z^2 - 7z + 4)\gamma_1 + (z-1)(4z^2 - z + 1)\gamma_2}{(2z-1)^2}. \tag{18}$$

Так как $4z^2 - 7z + 4 > 0$ и $4z^2 - z + 1 > 0$ при любом $z$, то $\dot{\gamma}_3 < 0$ при $z \leq 0$. На интервале $0 < z < \frac{1}{2}$ справедлива оценка $\dot{\gamma}_3 < \dot{\gamma}_3|_{\gamma_1 = \gamma_2} < 0$. На интервале $z > \frac{1}{2}$ производная имеет в точности один нуль $z_c$, ибо числитель (18) на этом интервале возрастает и принимает в граничных точках значения разных знаков. Интервал, где числитель меняет знак, можно ограничить сверху значением $z = 1$.

Случай $\gamma_1 = \gamma_2$ рассматривается аналогично.

Положим $\gamma_c = \gamma_3(z_c)$. Вопрос о положении $\gamma_c$ на оси $\gamma_3$ решает

**Предложение 4.2.** *Величина $\gamma_c$ удовлетворяет неравенствам*

$$-\gamma_2 \leq \gamma_c < -\gamma_1, \quad \text{если } \gamma_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2; \tag{19}$$

$$-\gamma_1 - \gamma_2 < \gamma_c < -\gamma_2, \quad \text{если } \gamma_1 > \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2; \tag{20}$$

*причем равенства в* (19) *достигаются одновременно. Если* $\gamma_1 = \gamma_2$, *то* $\gamma_c = -\frac{5}{4}\gamma_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $\gamma_c < \gamma_3(1) = -\gamma_1$. То, что $\gamma_c > -\gamma_1 - \gamma_2$, следует из неравенства

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{(z^2 - z + 1)(\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_1)}{2z - 1} > 0,$$

верного при $z > \frac{1}{2}$. Наконец, из соотношений

$$\frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{z(z - z_1)(z - z_2)}{2z - 1}, \quad z_{1,2} = \frac{2\gamma_1 + \gamma_2 \pm \sqrt{4\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2}}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} \geq \frac{1}{2}, \qquad (21)$$

рассматриваемых при $z > \frac{1}{2}$, следует, что $\gamma_2 + \gamma_c = \inf(\gamma_2 + \gamma_3) > 0$, если подкоренное выражение в (21) отрицательно; $\gamma_2 + \gamma_c = 0$ — если оно равно нулю; и $\gamma_2 + \gamma_c < 0$ — если оно положительно.

То, что $\gamma_c = -\frac{5}{4}\gamma_1$ при $\gamma_1 = \gamma_2$, проверяется непосредственно.

Области интервала $(0, 1)$, где функция (17) обратима, — $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, z_c)$ и $(z_c, 1)$, мы обозначаем соответственно $\mathrm{III}_2$, $\mathrm{III}_3$ и $\mathrm{III}_1$. В этих областях, как и в областях $z < 0$ и $z > 1$, коллинеарные конфигурации однозначно параметризуются интенсивностью $\gamma_3$ при фиксированных $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Области определения конфигураций введенных типов как функций $\gamma_3$ показаны на рис. 2 Для определенности мы приняли $-\gamma_2 < \gamma_c$.

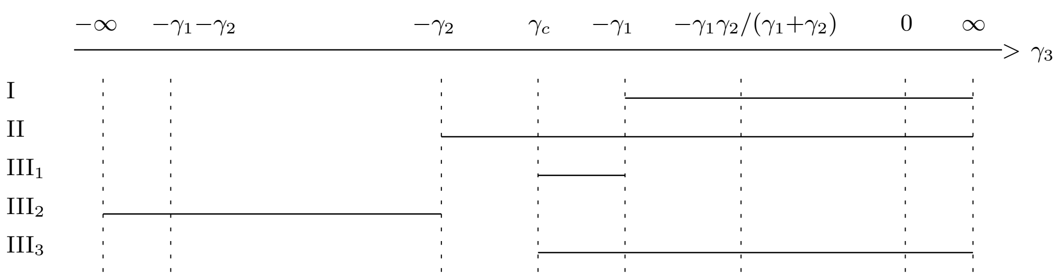


Рис. 2. Области реализации коллинеарных конфигураций (отмечены сплошной линией).

Положим

$$D_c = a_1 z^2 + a_2(1 - z)^2 + a_3$$

и определим величины $D_{\mathrm{I}}$, $D_{\mathrm{II}}$, $D_{\mathrm{III}}$ и $D_{\mathrm{III}_i}$как ограничения $D_c$ на соответствующие области изменения $z$.

Аналогично, как и для прочих особых точек, при заданных $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ и $D$ коллинеарная конфигурация $z$ реализуется тогда и только тогда, когда $\operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} D_c$.

Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 4.3.**

$$\operatorname{sgn} D_{\mathrm{I}} = \operatorname{sgn} D_{\mathrm{II}} = \operatorname{sgn} D_e, \quad \operatorname{sgn} D_{\mathrm{III}} = \operatorname{sgn} a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяется, что

$$D_c = \frac{z(z-1)(\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_1) D_e}{\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_2} = \frac{z(z-1)(\gamma_1 z^2 + \gamma_2 z^2 - 2\gamma_1 z - \gamma_2) a}{z^2 - z + 1}.$$

Коэффициент при $D_e$ в первом равенстве положителен при $z < 0$ и $z > 1$, коэффициент при $a$ во втором равенстве положителен при $0 < z < 1$.

**Распределение особых точек по числу и типу.** Удобно о наличии или отсутствии конфигурации данного типа судить по диаграммам, подобным приведенным на рис. 2 и рис. 3 для случая $-\gamma_2 < \gamma_c$. Рис. 2 мы уже комментировали. На рис. 3 при фиксированных $\gamma_1$ и $\gamma_2$ изображены области изменения $\gamma_3$, в которых знак соответствующего $D$ постоянен. Интервалы $D > 0$ отмечены сплошной линией, интервалы $D < 0$ оставлены пустыми. Подчеркнем, что эти диаграммы построены в предположении $-\gamma_2 < \gamma_c$, иначе $\gamma_c$ следует переместить в промежуток $-\gamma_1 - \gamma_2 < \gamma_3 \leq -\gamma_2$ (см. предложение 4.2).

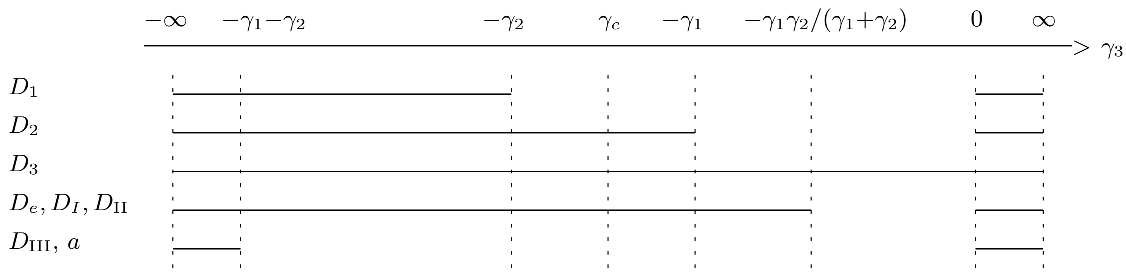


Рис. 3. Области постоянного знака интеграла $D$, вычисленного в особых точках. Интервалы $D > 0$ отмечены сплошными линиями, интервалы $D < 0$ оставлены пустыми.

Например, произвольному $\gamma_3$ из области $-\gamma_1 - \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_2$ при $D > 0$ отвечают три сингулярные и две (по числу ориентаций) равносторонние конфигурации. Коллинеарные конфигурации не реализуются. При $D < 0$ наблюдается единственная коллинеарная конфигурация типа $\mathrm{III}_2$ при отсутствующих сингулярных и равносторонней. При $D = 0$ стационарные конфигурации отсутствуют.

## 5. Устойчивость особых точек

Исследуем устойчивость особых точек редуцированной системы к *возмущениям, сохраняющим интеграл* $D$. Будем предполагать $D \neq 0$. Случай $D = 0$ рассмотрим отдельно.

**Сингулярные особые точки.** Для определенности исследуем особую точку типа $m_1 = 0$ при $a \neq 0$. Все прочие возможности анализируются аналогично.

Выберем образующие (13) так, чтобы особая точка оказалась в основании нижней ветви параболоида (9), т. е. положим в образующих $M_1 = 0$, $M_2 = M_3$ и $E_2 = -|E_0|$. В канонических координатах (15) этой точке ответят значения $x = y = 0$. В полярных (относительно $x, y$) координатах $r, \phi$ для уравнения редуцированной системы при $r \to 0$

$$\dot{r} = O(r), \quad \dot{\phi} = \frac{\gamma_2\gamma_3}{2\pi r^2} + O(r).$$

Учитывая гамильтоновость системы, делаем вывод, что рассматриваемая особая точка — центр.

**Особые точки, отвечающие равносторонним конфигурациям.** Для анализа этих точек удобно использовать редуцированную систему в форме (6). Линеаризуя систему в точке $m_1 = m_2 = m_3$, для соответствующих приращений получаем равенства

$$\dot{\mu}_0 = -\sum \frac{a_j - a_k}{4\pi a_j a_k m_i}\,\mu_i, \quad \dot{\mu}_i = -\frac{m_0}{\pi a_i m_i}(\mu_j - \mu_k).$$

Корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{m_0}{\pi m_1^2}\sqrt{-\gamma}.$$

Нулевые собственные значения связаны с интегралами $F = 0$ и $D = \mathrm{const}$ и исчезают при ограничении на симплектический лист системы. Вид оставшихся корней приводит к следующему утверждению.

**Предложение 5.1.** *Устойчивость особой точки, отвечающей равносторонней конфигурации, определяется знаком величины $\gamma$: при $\gamma > 0$ точка устойчива, при $\gamma < 0$ — неустойчива.*

При $\gamma = 0$ равносторонняя конфигурация реализуется, очевидно, лишь при $D = 0$.

**Особые точки, отвечающие коллинеарным конфигурациям.** Достаточно рассмотреть случай $a \neq 0$, ибо при $a = 0$ реализуется лишь конфигурация $z = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$, а тогда $D = 0$. Исследование проведем в координатах (13) при

$$M_1 = z^2 M_3, \quad M_2 = (1-z)^2 M_3,$$

где $z$ представляет рассматриваемую точку. В этой точке $e_1 = e_3 = 0$.

Исключая с помощью (9) из уравнений движения координату $e_2$ и линеаризуя уравнения, находим для возмущений

$$\dot{\epsilon}_1 = -\frac{AE_0}{2\pi E_2 M_1 M_2 M_3}\,\epsilon_3, \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{BE_0}{2\pi E_2 M_1 M_2 M_3}\,\epsilon_1,$$

где

$$A = \sum(\gamma_i + \gamma_j) M_i M_j, \quad B = \sum \frac{\gamma_i}{3}(M_j - M_k)^2.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

**Предложение 5.2.** *Устойчивость особой точки, отвечающей коллинеарной конфигурации вихрей, при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ определяется знаком произведения $AB$: при $AB < 0$ точка устойчива, при $AB > 0$ — неустойчива.*

В применении к коллинеарным конфигурациям типа I, II и III данное предложение конкретизируется следующим образом.

**Предложение 5.3.** *Конфигурации типа* I *и* II *устойчивы при $\gamma < 0$ и неустойчивы при $\gamma > 0$. Конфигурации типа* $\mathrm{III}_1$ *и* $\mathrm{III}_2$ *всегда устойчивы, конфигурация типа* $\mathrm{III}_3$ *всегда неустойчива.*

Доказательство. При $M_3 = 1$ справедливы представления

$$A = z(z-1)(2z-1)\dot{\gamma}_3, \tag{22}$$

$$B = z(z-1)(\gamma_1 z^2 + \gamma_2 z^2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) = \frac{z(z-1)(2z-1)}{\gamma_1 z + \gamma_2 z - \gamma_2}\,\gamma. \tag{23}$$

Из (22), в свете предложения 4.1, следует, что $A > 0$ на интервалах $z < 0$, $\frac{1}{2} < z < z_c$ и $z > 1$ и $A < 0$ на интервалах $0 < z < \frac{1}{2}$ и $z_c < z < 1$. С другой стороны, из (23) следует, что $B > 0$ на интервале $0 < z < 1$, а вне его знаки $B$ и $\gamma$ совпадают.

При $\gamma = 0$ реализуются (см. рис. 2, 3) либо конфигурация типа $\mathrm{III}_3$, либо те, у которых $D = 0$. Конфигурация $z = \frac{1}{2}$ реализуется только при $\gamma_1 = \gamma_2$, а в этом случае $z_c = \frac{1}{2}$.

При $z = z_c$ линейного анализа недостаточно для суждения об устойчивости конфигурации. Учет первых нелинейных членов приводит к уравнениям: при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ —

$$\dot{\epsilon}_1 = -\frac{\gamma_1\sqrt{-a}(z-2)(2z-1)(z+1)}{\pi z(4z^2 - z + 1)(z-1)^2}\,(\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2),$$

$$\dot{\epsilon}_3 = -\frac{3\gamma_1(z^2 - z + 1)}{\pi(4z^2 - z + 1)(z-1)}\,\epsilon_1,$$

и при $\gamma_1 = \gamma_2$ —

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{48}{5\pi\gamma_1}\,(3\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2)\epsilon_3, \quad \dot{\epsilon}_3 = \frac{3\gamma_1}{\pi}\,\epsilon_1.$$

В правых частях этих уравнений коэффициенты при множителях, содержащих возмущения, положительны. Отсюда делаем следующий вывод [10].

**Предложение 5.4.** *Критическая конфигурация $z_c$ неустойчива при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ и устойчива при $\gamma_1 = \gamma_2$.*

**Случай $D = 0$.** При $D = 0$ особые точки реализуются только в трех случаях (см. рис. 3):

1) $\gamma_1 + \gamma_3 = 0$ или $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$ (сингулярная конфигурация);

2) $\gamma = 0$ (равносторонняя и коллинеарная конфигурация);

3) $a = 0$ (коллинеарная конфигурация).

Рассмотрим случай $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$ (случай $\gamma_1 + \gamma_3 = 0$ рассматривается аналогично). В качестве образующих вихревой алгебры примем образующие (7), перейдем к каноническим координатам (15), а от них — к полярным $r, \phi$. Из интеграла энергии и уравнений движения находим

$$r^2 = \frac{h}{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 \sin\phi)^{\gamma_1/\gamma_2}(\sin\phi + 1)}, \quad \dot{\phi} = -\frac{\gamma_2}{2\pi r^2}$$

где $h > 0$ — произвольная постоянная. Мы видим, что особые точки редуцированной системы составляют сингулярный луч $\phi = -\frac{1}{2}\pi$ и все фазовые кривые системы неограничены. Движение вблизи сингулярного луча, а также при больших отрицательных $y$ и при $\gamma_1 = \gamma_2$ происходит по закону

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\gamma_2^2}{2\pi x}.$$

При $\gamma = 0$ интегральные кривые редуцированной имеют вид

$$m_i = m_{i1}t + m_{i0}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

с подходящими коэффициентами $m_{i0}$ и $m_{i1}$. В канонических координатах фазовый портрет представляется совокупностью лучей, исходящих из начала координат. Особые точки, отвечающие коллинеарным конфигурациям, образуют лучи $\phi = \pm\frac{1}{2}\pi$, а особые точки, отвечающие равносторонним конфигурациям — пару лучей в верхней полуплоскости:

$$\sin\phi = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2}}$$

При $a = 0$ фазовое пространство системы целиком состоит из особых точек, отвечающих коллинеарной конфигурации

$$z = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

**Выводы.** Соберем вместе результаты об устойчивости.

**Теорема 5.1.** *Сингулярные конфигурации неустойчивы только при $D = 0$. Равносторонние конфигурации устойчивы при $\gamma > 0$, иначе — неустойчивы. Коллинеарные конфигурации типа* I *и* II *устойчивы при $\gamma < 0$, иначе — неустойчивы. Конфигурации типа* $\mathrm{III}_1$ *и* $\mathrm{III}_2$ *всегда устойчивы, типа* $\mathrm{III}_3$ *— всегда неустойчивы. Конфигурация $z_c$ устойчива при $\gamma_1 = \gamma_2$, иначе — неустойчива.*

Используя результаты по распределению числа и типа особых точек на фазовом портрете, получаем таблицу 1.

$-\infty \quad a{=}0 \quad \gamma_c \quad -\gamma_2 \quad -\gamma_1 \quad \gamma{=}0 \quad 0 \quad \infty \longrightarrow \gamma_3$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $u^0$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^+$ |
| 2 | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $u^0$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^+$ |
| 3 | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ |
| I | – | – | – | – | – | – | – | – | $s^+$ | $u^0$ | $u^-$ | $u^+$ |
| II | – | – | – | – | – | – | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ | $u^0$ | $u^-$ | $u^+$ |
| $\mathrm{III}_1$ | – | – | – | – | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | – | – | – | – | – |
| $\mathrm{III}_2$ | $s^+$ | $s^0$ | $s^-$ | $s^-$ | $s^-$ | – | – | – | – | – | – | – |
| $\mathrm{III}_3$ | – | – | – | – | $u^-$ | $u^-$ | $u^-$ | $u^-$ | $u^-$ | $u^-$ | $u^-$ | $u^+$ |
| $E$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^0$ | $s^-$ | $s^+$ |

(a)

$-\gamma_2 \quad \gamma_c$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $u^0$ | $s^-$ | $s^-$ |
| 2 | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ |
| 3 | $s^+$ | $s^+$ | $s^+$ |
| I | – | – | – |
| II | – | $s^+$ | $s^+$ |
| $\mathrm{III}_1$ | – | – | – |
| $\mathrm{III}_2$ | – | – | – |
| $\mathrm{III}_3$ | – | – | – |
| $E$ | $u^+$ | $u^+$ | $u^+$ |

(b)

Таблица 1. Тип и устойчивость стационарных конфигураций относительного движения вихрей как функция $\gamma_3$: (a) $\gamma_c < -\gamma_2$; (b) $\gamma_c > -\gamma_2$ (показан фрагмент таблицы — целиком таблица получается из (a) заменой фрагмента $[\gamma_c, -\gamma_2]$ на данный). Обозначения: «s» — stable, «u» — unstable, верхний индекс представляет сигнатуру $D$.

Со следующими замечаниями она дает исчерпывающую информацию о локальной структуре фазового портрета редуцированной системы.

1) Из таблицы исключена конфигурация $z_c$. Она реализуется при $\gamma_3 = \gamma_c$ и относится к типу $u^-$, если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, и типу $s^-$, если $\gamma_1 = \gamma_2$.

2) Столбцы, соответствующие бифуркационным значениям $\gamma_3$ ($a = 0$, $\gamma_c$, $-\gamma_2$, $\gamma_1$, $\gamma = 0$), восстанавливаются по столбцам, непосредственно (слева и справа) к ним примыкающим, и информации об устойчивости особых точек при $D = 0$. Действительно, для каждой конфигурации сигнатура $D$ в точке бифуркации определяется знаком $D$ непосредственно слева и справа от этой точки. Если этот знак одинаков, то он тот же и в точке бифуркации, если разный, то $\operatorname{sgn} D = 0$. Тип устойчивости при прохождении бифуркационного значения в первом случае сохраняется, во втором — определяется типом устойчивости особой точки при $D = 0$. Конфигурация не реализуется в точке бифуркации, если она не реализуется непосредственно слева или справа от нее.

3) Мы не привели таблицы при $\gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma_c = -\gamma_2$. Они совпадают с таблицей 1(a), за исключением соответственно фрагментов $[-\gamma_2, -\gamma_1]$ и $[\gamma_c, -\gamma_2]$. Последние следует заменить на должным образом модифицированные столбцы $-\gamma_1$ и $\gamma_c$.

**Следствие 5.1.** *Пусть при заданных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $D$ реализуется как равносторонняя, так и коллинеарная конфигурация вихрей. Тогда, если одна из них устойчива, то другая неустойчива, и наоборот.*

## Список литературы


[1] J. Tavantzis, L. Ting, “The dynamics of three vortices revisited”, *Phys. Fluids*, **31**:6, (1988), 1392–1409.

[2] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Математические методы динамики вихревых структур*, Ин-т компьютер. исслед., Москва – Ижевск, 2005.

[3] H. Aref, “Stability of relative equilibria of three vortices”, (Article 094101), *Phys. Fluids*, **21**:9, (2009), 1–22.

[4] А. В. Борисов, А. Е. Павлов, “Динамика и статика вихрей на плоскости и сфере — I”, *Reg. & Chaot. Dyn*, **3**:1, (1998), 28–38.

[5] А. В. Борисов, В. Г. Лебедев, “Динамика трех вихрей на плоскости и на сфере — II. Общий компактный случай”, *Reg. & Chaot. Dyn*, **3**:2, (1998), 99–114.

[6] А. В. Борисов, В. Г. Лебедев, “Динамика трех вихрей на плоскости и на сфере — III. Некомпактный случай. Проблема коллапса и рассеяния”, *Reg. & Chaot. Dyn*, **3**:4, (1998), 74–86.

[7] А. И. Гудименко, “Динамика трех вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации”, *Нелинейная Динамика*, **4**:2, (2008), 429–441.

[8] A. I. Gudimenko, “Dynamics of perturbed equilateral and collinear configurations of three point vortices”, *Reg. & Chaot. Dyn*, **13**:2, (2008), 85–95.

[9] А. И. Гудименко, К. Г. Купцов, “Движение трех точечных вихрей в случае, если один из них проходит через центр завихренности”, *Вестн. Удмурд. гос. ун-та*, 2009, № 2, 38–52.

[10] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, Москва, 1966.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 11 февраля 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-05-00061-а, 10-05-00646-а) и ДВО РАН (гранты 09-I-П17-07, 09-I-П4-04, 09-II-СОП4-04)

---

*Gudimenko A.I., Zakharenko A.D.* A study of relative equilibria of three vortices. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 106–116.

ABSTRACT

The positions of relative equilibrium of three point vortices on the unbounded plain according to their type and stability are fully classified.

Key words: *point vortices, relative equilibria, stability, algebraic reduction.*