ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 2. С. 130–152

УДК 517.54
MSC2000 30C55, 30C85, 30C10

© В.Н. Дубинин, Д.А. Кириллова*

Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций

Рассматриваются приложения задач об экстремальном разбиении областей и конденсаторов в некоторых специальных вопросах геометрической теории функций комплексного переменного. Доказываются новые теоремы для семейств мероморфных функций, не принимающих общих значений, многоточечные теоремы искажения и оценки коэффициентов для однолистных функций, а также неравенства для алгебраических полиномов. Все результаты получаются единым образом из свойств подходящих экстремальных разбиений, установленных в основном с помощью емкостного подхода и симметризации.

Ключевые слова: *мероморфные функции, производная Шварца, теоремы искажения, оценки коэффициентов, полиномы, экстремальные разбиения, емкости конденсаторов.*

Введение

Задачи об экстремальном разбиении возникают естественным образом при изучении экстремальных длин семейств кривых (см. [1], [2]). Хорошо известна связь между модулями семейств кривых и емкостями подходящих конденсаторов [3]. В данной работе, следуя емкостному подходу [4]–[7], даются приложения экстремальных разбиений в традиционных разделах геометрической теории функций комплексного переменного [8]. В первом параграфе доказываются новые теоремы для семейств $\{f_k\}_{k=1}^n$, мероморфных в круге $|z| < 1$ функций f_k, попарно не принимающих в этом круге общих значений. Эта тематика хорошо известна специалистам, применяющим различные методы теории функций (см., например, [1], [8]–[13]). Практически каждая задача об экстремальном разбиении дает некоторый результат в этой области. В частности, многочисленные теоремы Г.В. Кузьминой [1] и А.К. Бахтина [13], [14] приводят к оценкам модулей производных $|f_k'|$ семейств $\{f_k\}_{k=1}^n$. Мы получаем новые утверждения, содержащие наряду с производными f_k' шварцианы $S_{f_k},\ k = 1, \dots, n$. Наиболее полные результаты для производной Шварца в случае одной однолистной функции ($n = 1$) получены Э. Шипперсом [15]. Теоремы 1 и 2 настоящей работы дают неравенства для шварцианов и их производных, причем с произвольными комплексными параметрами $\gamma_k,\ k = 1, \dots, n$. Ранее, используя только емкостной подход, удавалось получить лишь близкие результаты и для вещественных γ_k (ср. [4], [5], [7]). Кроме того, в теореме 3 дается оценка со свободными на окружности $|w| = 1$ значениями $f_k(0),\ k = 1, \dots, n$. Новизна теоремы 4 заключается в том, что, в отличие от работ Г.М. Голузина, Н.А. Лебедева и Ю.Е. Аленицына, мы рассматриваем многолистные функции со свободными значениями $f_k(0)$ на заданном отрезке (ср.: [1], [8], [12]). Во втором параграфе

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru, dina_kir_03@mail.ru`

устанавливаются новые многоточечные теоремы искажения для однолистных функций в круге и кольце, а также для функций известного класса $\sum$. В отличие от последних работ в этой области, доказываются оценки модулей производных более чем в двух точках (ср., например, [16]). В третьем параграфе показывается, как с помощью теорем об экстремальном разбиении можно получить оценки комбинаций коэффициентов в известных классах однолистных функций. Мы даем альтернативное доказательство оценки Г.М. Голузина в классе $\sum$ (теорема 9), а также доказательства новых оценок (теоремы 10 и 11). Наконец, в четвертом параграфе теорема об экстремальном разбиении конденсаторов применяется к неравенствам для алгебраических полиномов. Основная идея таких приложений, помимо предыдущих наработок, состоит в построении по заданному полиному однолистной функции [17]. Новизна полученных результатов состоит в том, что, в отличие от традиционных оценок, мы имеем дело с двух- и трехточечными теоремами искажения для полиномов.

1. Мероморфные функции без общих значений

Всюду в этом параграфе приняты обозначения из статьи [4], которые неоднократно применялись в работах [5], [6]. Кроме того, положим $U = \{z : \ |z| < 1\}$, $E(a,r) = \{z : \ |z-a| \leqslant r\}$ и $S_f(z) = (f''(z)/f'(z))' - (f''(z)/f'(z))^2/2$ – производная Шварца функции f (шварциан). Частный случай следующей теоремы рассматривался в работе [5, с. 71].

Теорема 1. *Если функции $f_k,\ k = 1,\dots,n,\ n \geqslant 1$, мероморфны и однолистны в единичном круге U, попарно не принимают в этом круге общих значений и точка $z = 0$ является точкой регулярности этих функций, то для любых комплексных постоянных $\gamma_k,\ k = 1,\dots,n$, справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^2}{6}\frac{S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{\gamma_k\gamma_l}{(f_k(0)-f_l(0))^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|\gamma_k|^2}{|f_k'(0)|^2},$$

где в случае $n = 1$ вторая сумма под знаком модуля обращается в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma_k = \alpha_k e^{i\theta_k},\ k = 1,\dots,n$. Можно считать, что $\alpha_k \neq 0,\ k = 1,\dots,n$. На плоскости $\overline{\mathbb{C}}_w$ рассмотрим n конденсаторов

$$C_k(r) = (D_k, \{\partial D_k, E_1^k, E_2^k\}, \{0,-1,1\}),\ k = 1,\dots,n,$$

где $D_k = f_k(U)$ – попарно неналегающие области, $E_1^k = E(w_k - \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}, r)$, $E_2^k = E(w_k + \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}, r)$, $w_k = f_k(0)$, $\varphi_k = \theta_k + \theta$; θ – произвольное вещественное число, а $\rho > 0$ настолько мало, что точки $w_{k1} = w_k - \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}$, $w_{k2} = w_k + \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}$ принадлежат области $D_k,\ k = 1,\dots,n$. Конденсаторы $C_k(r)$ образуют разбиение конденсатора

$$C(r) = \left(\overline{\mathbb{C}}_w, \{E_1^k, E_2^k\}_{k=1}^n, \{\delta_1^k, \delta_2^k\}_{k=1}^n\right),\ \delta_1^k = -1,\ \delta_2^k = 1,\ k = 1,\dots,n.$$

Применяя теоремы 1 и 5 работы [4], получаем, что при любом достаточно малом $r > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(r) \geqslant \operatorname{cap} C(r). \tag{1}$$

Асимптотические формулы из работ [4], [7] для емкостей рассматриваемых конденсаторов дают

$$\operatorname{cap} C_k(r) = -\frac{4\pi}{\log r} - 2\pi\left(\log r(D_k, w_{k1}) + \log r(D_k, w_{k2}) - 2g_{D_k}(w_{k1}, w_{k2})\right)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 +$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\ r\to 0,\ k=1,\dots,n,$$

$$\text{cap}\ C(r)=-\frac{4\pi n}{\log r}-2\pi\left(\sum_{k=1}^{n}2\log(2\alpha_k\rho)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}+\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}-\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}\right|\right)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\ r\to 0,$$

где $r(D,a)$ и $g_D(w,a)$ означают соответственно внутренний радиус и функцию Грина (в случае $n=1$ вторая сумма в этом разложении отсутствует). Подставляя полученные выражения для cap $C_k(r)$ и cap $C(r)$ в неравенство (1), после элементарных преобразований получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(\log r(D_k,w_{k1})+\log r(D_k,w_{k2})-2g_{D_k}(w_{k1},w_{k2}))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}2\log(2\alpha_k\rho)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}+\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}-\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}\right|.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}(h_{D_k}(w_{k1},w_{k1})+h_{D_k}(w_{k2},w_{k2})-2h_{D_k}(w_{k1},w_{k2}))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}+\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}{(w_k-w_l)^2-(\alpha_k\rho e^{i\varphi_k}-\alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2}\right|,\tag{2}$$

где $h_{D_k}(w,\omega)=g_{D_k}(w,\omega)+\log|w-\omega|$ – регулярная часть функции Грина, $h_{D_k}(w,w)=\log r(D_k,w)$, $k=1,\dots,n$. Правая часть неравенства (2) может быть записана в виде

$$-4\rho^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\text{Re}\left[\frac{\alpha_k\alpha_l e^{i(\varphi_k+\varphi_l)}}{(w_k-w_l)^2}\right]+o(\rho^2),\ \rho\to 0.$$

Функции $q_k(w)$, обратные к $f_k(z)$, имеют вид

$$q_k(w)=q_k'(w_k)(w-w_k)+\frac{1}{2}q_k''(w_k)(w-w_k)^2+\frac{1}{6}q_k'''(w_k)(w-w_k)^3+\dots.$$

Следовательно,

$$q_k(w_{k1})=-e^{i\varphi_k}\alpha_k q_k'(w_k)\rho+\frac{1}{2}e^{2i\varphi_k}\alpha_k^2 q_k''(w_k)\rho^2+o(\rho^2),$$

$$q_k(w_{k2})=e^{i\varphi_k}\alpha_k q_k'(w_k)\rho+\frac{1}{2}e^{2i\varphi_k}\alpha_k^2 q_k''(w_k)\rho^2+o(\rho^2),$$

$$h_{D_k}(w_{k1},w_{k1})=\log\left|\frac{1-|q_k(w_{k1})|^2}{q_k'(w_{k1})}\right|=-\log|q_k'(w_k)|+$$

$$+\rho\text{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k}q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right]+\rho^2\text{Re}\left[-\alpha_k^2|q_k'(w_k|^2+\frac{\alpha_k^2e^{2i\varphi_k}}{2}\left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2-\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)\right]+o(\rho^2),$$

$$h_{D_k}(w_{k2},w_{k2})=\log\left|\frac{1-|q_k(w_{k2})|^2}{q_k'(w_{k2})}\right|=-\log|q_k'(w_k)|-$$

$$-\rho\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k}q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right]+\rho^2\mathrm{Re}\left[-\alpha_k^2|q_k'(w_k|^2+\frac{\alpha_k^2e^{2i\varphi_k}}{2}\left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2-\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)\right]+o(\rho^2),$$

$$h_{D_k}(w_{k1},w_{k2})=\log\left|\frac{1-q_k(w_{k1})\overline{q_k(w_{k2})}}{q_k(w_{k1})-q_k(w_{k2})}(w_{k1}-w_{k2})\right|=-\log|q_k'(w_k)|+$$

$$+\rho^2\mathrm{Re}\left[\alpha_k^2|q_k'(w_k)|^2-\frac{\alpha_k^2e^{2i\varphi_k}}{6}\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right]+o(\rho^2),\ \ \rho\to 0.$$

Поэтому каждое слагаемое в левой части (2) может быть записано как

$$\rho^2\mathrm{Re}\left[-4\alpha_k^2|q_k'(w_k|^2-\frac{2\alpha_k^2e^{2i\varphi_k}}{3}\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}-\frac{3}{2}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2\right)\right]+o(\rho^2)=$$

$$=-\alpha_k^2\left\{4|q_k'(w_k|^2+\frac{2}{3}\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi_k}S_{q_k}(w_k)\right]\right\}\rho^2+o(\rho^2),\ \ \rho\to 0.$$

Подставляя найденные разложения в (2), получаем неравенство

$$-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\left\{|q_k'(w_k)|^2+\frac{1}{6}\mathrm{Re}\left[e^{2i\varphi_k}S_{q_k}(w_k)\right]\right\}\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k\alpha_l e^{i(\varphi_k+\varphi_l)}}{(w_k-w_l)^2}\right].$$

Или, что то же самое,

$$\mathrm{Re}\ e^{2i\theta}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^2e^{2i\theta_k}S_{f_k}(0)}{6(f_k'(0))^2}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{\alpha_k\alpha_l e^{i(\theta_k+\theta_l)}}{(f_k(0)-f_l(0))^2}\right]\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^2}{|f_k'(0)|^2}.$$

Осталось воспользоваться произвольностью θ. Теорема доказана.

При $n=1$ из теоремы 1 следует классическая оценка Крауса – Нехари:

$$|S_f(0)|\leqslant 6.$$

Полученные ниже результаты удобнее записывать в терминах обратных функций.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k^2}{30}\left(S_{q_k}^2(w_k)-S_{q_k}''(w_k)\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{6\gamma_k\gamma_l}{(w_k-w_l)^4}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^2\left(2|q_k'(w_k)|^4+|q_k''(w_k)|^2\right),$$

где $q_k=f_k^{-1},\ w_k=f_k(0),\ k=1,\ldots,n,$ *и в случае* $n=1$ *вторая сумма под знаком модуля равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $\gamma_k\neq 0,\ k=1,\ldots,n$. Определим числа $\alpha_k>0$ и θ_k соотношениями $\gamma_k=\alpha_k^2e^{2i\theta_k},\ k=1,\ldots,n$. Следуя доказательству предыдущей теоремы, рассмотрим конденсаторы

$$C_k(r)=(D_k,\{\partial D_k,E_1^k,E_2^k,E_3^k\},\{0,-1,2,-1\}),\ k=1,\ldots,n,$$

где $D_k = f_k(U)$, $E_1^k = E(w_k - \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}, r)$, $E_2^k = E(w_k, r)$, $E_3^k = E(w_k + \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}, r)$, $\varphi_k = \theta_k + \theta$, θ – произвольное вещественное число, а $\rho > 0$ настолько мало, что точки $w_{k1} = w_k - \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}$, $w_{k2} = w_k + \alpha_k\rho e^{i\varphi_k}$ принадлежат области D_k при любом $\theta \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Конденсаторы $C_k(r)$ образуют разбиение конденсатора

$$C(r) = \left(\overline{\mathbb{C}}_w, \{E_1^k, E_2^k, E_3^k\}_{k=1}^n, \{\delta_1^k, \delta_2^k, \delta_3^k\}_{k=1}^n\right), \ \delta_1^k = -1, \ \delta_2^k = 2, \ \delta_3^k = -1, \ k = 1, \ldots, n.$$

Вновь из принципов композиции [4], получаем неравенство (1). Асимптотические формулы из работ [4], [7] для емкостей рассматриваемых конденсаторов дают

$$\mathrm{cap}\ C_k(r) = -\frac{12\pi}{\log r} - 2\pi\left(\log r(D_k, w_{k1}) + \log r(D_k, w_{k2}) + 4\log r(D_k, w_k) - \right.$$

$$\left. -4g_{D_k}(w_k, w_{k1}) - 4g_{D_k}(w_k, w_{k2}) + 2g_{D_k}(w_{k1}, w_{k2})\right)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \ r \to 0, \ k = 1, \ldots, n,$$

$$\mathrm{cap}\ C(r) = -\frac{12\pi n}{\log r} + 2\pi\left(2n\log 2 - 6\sum_{k=1}^{n}\log \alpha_k\rho + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{(w_k - w_l)^4((w_k - w_l)^2 - (\alpha_k\rho e^{i\varphi_k} - \alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2)((w_k - w_l)^2 - (\alpha_k\rho e^{i\varphi_k} + \alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2)}{((w_k - w_l)^2 - \alpha_k^2\rho^2 e^{2i\varphi_k})^2((w_k - w_l)^2 - \alpha_l^2\rho^2 e^{2i\varphi_l})^2}\right|\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \ r \to 0.$$

Подставляя полученные выражения для $\mathrm{cap}\ C_k(r)$ и $\mathrm{cap}\ C(r)$ в неравенство (1) и переходя к регулярным частям функций Грина $h_{D_k}(w, \omega)$, приходим к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}\left(h_{D_k}(w_{k1}, w_{k1}) + h_{D_k}(w_{k2}, w_{k2}) + 4h_{D_k}(w_k, w_k) - \right.$$

$$\left. -4h_{D_k}(w_k, w_{k1}) - 4h_{D_k}(w_k, w_{k2}) + 2h_{D_k}(w_{k1}, w_{k2})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\log\left|\frac{((w_k - w_l)^2 - \alpha_k^2\rho^2 e^{2i\varphi_k})^2((w_k - w_l)^2 - \alpha_l^2\rho^2 e^{2i\varphi_l})^2}{(w_k - w_l)^4((w_k - w_l)^2 - (\alpha_k\rho e^{i\varphi_k} - \alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2)((w_k - w_l)^2 - (\alpha_k\rho e^{i\varphi_k} + \alpha_l\rho e^{i\varphi_l})^2)}\right|. \tag{3}$$

Правая часть неравенства (3) может быть записана в виде

$$\rho^4\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\mathrm{Re}\left[\frac{6\alpha_k^2\alpha_l^2 e^{2i(\varphi_k+\varphi_l)}}{(w_k - w_l)^4}\right] + o(\rho^4), \ \rho \to 0.$$

Учитывая разложение функций $q_k(w)$, находим

$$h_{D_k}(w_{k1}, w_{k1}) = \log\left|\frac{1 - |q_k(w_{k1})|^2}{q_k'(w_{k1})}\right| = -\log|q_k'(w_k)| +$$

$$+\rho\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k}q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right] + \rho^2\mathrm{Re}\left[-\alpha_k^2|q_k'(w_k)|^2 + \frac{\alpha_k^2 e^{2i\varphi_k}}{2}\left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)\right] +$$

$$+\rho^3 \mathrm{Re}\ \alpha_k^3 \left[e^{-i\varphi_k} q_k'(w_k)\overline{q_k''(w_k)} + \frac{1}{6} e^{3i\varphi_k} \left(2\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^3 - 3\frac{q_k''(w_k)q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + \frac{q_k^{IV}(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] +$$

$$+\rho^4 \mathrm{Re}\ \alpha_k^4 \left[-\frac{1}{2}|q_k'(w_k)|^4 - \frac{1}{4}|q_k''(w_k)|^2 - \frac{1}{3} e^{-2i\varphi_k} q_k'(w_k)\overline{q_k'''(w_k)} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{4i\varphi_k}}{24} \left(6\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^4 - 12\frac{(q_k''(w_k))^2 q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^3} + 4\frac{q_k''(w_k)q_k^{IV}(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + 3\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k^V(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] + o(\rho^4),$$

$$h_{D_k}(w_{k2}, w_{k2}) = \log\left|\frac{1-|q_k(w_{k2})|^2}{q_k'(w_{k2})}\right| = -\log|q_k'(w_k)| -$$

$$-\rho \mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k} q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right] + \rho^2 \mathrm{Re}\left[-\alpha_k^2 |q_k'(w_k)|^2 + \frac{\alpha_k^2 e^{2i\varphi_k}}{2} \left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] -$$

$$-\rho^3 \mathrm{Re}\ \alpha_k^3 \left[e^{-i\varphi_k} q_k'(w_k)\overline{q_k''(w_k)} + \frac{1}{6} e^{3i\varphi_k} \left(2\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^3 - 3\frac{q_k''(w_k)q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + \frac{q_k^{IV}(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] +$$

$$+\rho^4 \mathrm{Re}\ \alpha_k^4 \left[-\frac{1}{2}|q_k'(w_k)|^4 - \frac{1}{4}|q_k''(w_k)|^2 - \frac{1}{3} e^{-2i\varphi_k} q_k'(w_k)\overline{q_k'''(w_k)} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{4i\varphi_k}}{24} \left(6\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^4 - 12\frac{(q_k''(w_k))^2 q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^3} + 4\frac{q_k''(w_k)q_k^{IV}(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + 3\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k^V(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] + o(\rho^4),$$

$$h_{D_k}(w_k, w_k) = -\log|q_k'(w_k)|,$$

$$h_{D_k}(w_k, w_{k1}) = \log\left|\frac{w_k - w_{k1}}{q_k(w_{k1})}\right| = -\log|q_k'(w_k)| +$$

$$+\rho \mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k} q_k''(w_k)}{2q_k'(w_k)}\right] + \rho^2 \mathrm{Re}\ \alpha_k^2 \left[e^{2i\varphi_k} \left(\frac{1}{8}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k'''(w_k)}{6q_k'(w_k)} \right) \right] +$$

$$+\rho^3 \mathrm{Re}\ \alpha_k^3 \left[e^{3i\varphi_k} \left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^3 - \frac{1}{12}\frac{q_k''(w_k)q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + \frac{1}{24}\frac{q_k^{IV}(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] +$$

$$+\rho^4 \mathrm{Re}\ \alpha_k^4 \left[e^{4i\varphi_k} \left(\frac{1}{64}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^4 - \frac{(q_k''(w_k))^2 q_k'''(w_k)}{24(q_k'(w_k))^3} + \frac{q_k''(w_k)q_k^{IV}(w_k)}{48(q_k'(w_k))^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{72}\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k^V(w_k)}{120q_k'(w_k)} \right) \right] + o(\rho^4),$$

$$h_{D_k}(w_k, w_{k2}) = \log\left|\frac{w_k - w_{k2}}{q_k(w_{k2})}\right| = -\log|q_k'(w_k)| -$$

$$-\rho \mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_k e^{i\varphi_k} q_k''(w_k)}{2q_k'(w_k)}\right] + \rho^2 \mathrm{Re}\ \alpha_k^2 \left[e^{2i\varphi_k} \left(\frac{1}{8}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2 - \frac{q_k'''(w_k)}{6q_k'(w_k)} \right) \right] -$$

$$-\rho^3 \mathrm{Re}\ \alpha_k^3 \left[e^{3i\varphi_k} \left(\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^3 - \frac{1}{12}\frac{q_k''(w_k)q_k'''(w_k)}{(q_k'(w_k))^2} + \frac{1}{24}\frac{q_k^{IV}(w_k)}{q_k'(w_k)} \right) \right] +$$

$$+\rho^4 \mathrm{Re}\ \alpha_k^4 \left[e^{4i\varphi_k} \left(\frac{1}{64}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^4 - \frac{(q_k''(w_k))^2 q_k'''(w_k)}{24(q_k'(w_k))^3} + \frac{q_k''(w_k)q_k^{IV}(w_k)}{48(q_k'(w_k))^2} + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{72}\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2-\frac{q_k^V(w_k)}{120q_k'(w_k)}\Bigg)\Bigg]+o(\rho^4),$$

$$h_{D_k}(w_{k1},w_{k2})=\log\left|\frac{1-q_k(w_{k1})\overline{q_k(w_{k2})}}{q_k(w_{k1})-q_k(w_{k2})}(w_{k1}-w_{k2})\right|=-\log|q_k'(w_k)|+$$

$$+\rho^2\mathrm{Re}\ \alpha_k^2\left[|q_k'(w_k)|^2-\frac{e^{2i\varphi_k}}{6}\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right]+$$

$$+\rho^4\mathrm{Re}\ \alpha_k^4\Bigg[-\frac{1}{2}|q_k'(w_k)|^4-\frac{1}{4}|q_k''(w_k)|^2+\frac{1}{3}e^{-2i\varphi_k}q_k'(w_k)\overline{q_k'''(w_k)}+$$

$$+e^{4i\varphi_k}\left(\frac{1}{72}\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2-\frac{1}{120}\frac{q_k^V(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)\Bigg]+o(\rho^4),\quad \rho\to 0.$$

Поэтому каждое слагаемое в левой части неравенства (3) равно

$$\rho^4\mathrm{Re}\ \alpha_k^4\Bigg[-2|q_k'(w_k|^4-|q_k''(w_k)|^2+e^{4i\varphi_k}\Bigg(\frac{3}{8}\left(\frac{q_k''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^4-\frac{2(q_k''(w_k))^2q_k'''(w_k)}{3(q_k'(w_k))^3}+$$

$$+\frac{q_k''(w_k)q_k^{IV}(w_k)}{6(q_k'(w_k))^2}+\frac{1}{6}\left(\frac{q_k'''(w_k)}{q_k'(w_k)}\right)^2-\frac{q_k^V(w_k)}{30q_k'(w_k)}\Bigg)\Bigg]+o(\rho^4)=$$

$$=\rho^4\left(-\alpha_k^4(2|q_k'(w_k)|^4+|q_k''(w_k)|^2)-\mathrm{Re}\ \left[\frac{\alpha_k^4e^{4i\varphi_k}}{30}\left(S''_{q_k}(w_k)-S^2_{q_k}(w_k)\right)\right]\right)+o(\rho^4),\ \ \rho\to 0.$$

Подставляя найденные разложения в (3), получаем неравенство

$$-\sum_{k=1}^n\alpha_k^4\left(2|q_k'(w_k)|^4+|q_k''(w_k)|^2+\mathrm{Re}\ \left[\frac{e^{i(4\theta_k+4\theta)}}{30}\left(S''_{q_k}(w_k)-S^2_{q_k}(w_k)\right)\right]\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^n\mathrm{Re}\left[\frac{6\alpha_k^2\alpha_l^2e^{i(2\theta_k+2\theta_l+4\theta)}}{(w_k-w_l)^4}\right].$$

Осталось воспользоваться произвольностью числа θ. Теорема доказана.

Экстремальные разбиения “со свободными полюсами на окружности” приводят к следующему результату (ср.: [5, теорема 8]).

Теорема 3. *Для любых мероморфных и однолистных в круге U функций f_k, отображающих этот круг на попарно неналегающие области таким образом, что $|f_k(0)|=1,\ k=1,\dots,n$, справедливо неравенство*

$$\frac{1}{30}\sum_{k=1}^n\mathrm{Re}\ w_k^4\left(S^2_{q_k}(w_k)-S''_{q_k}(w_k)\right)\geqslant-\sum_{k=1}^n\left(2|q_k'(w_k)|^4+|q_k''(w_k)|^2\right)+\frac{n(n^2-1)(n^2+11)}{120},\quad (4)$$

где $q_k=f_k^{-1},\ w_k=f_k(0),\ k=1,\dots,n$. Равенство в (4) достигается для функций $f_k^*(z)=\exp(2\pi i(k-1)/n)[(1+z)/(1-z)]^{2/n},\ k=1,\dots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в теореме 2 $\gamma_k=w_k^2,\ k=1,\dots,n$, и заменяя модуль в левой части неравенства на действительную часть со знаком минус, приходим к соотношению

$$\frac{1}{30}\sum_{k=1}^n\mathrm{Re}\ w_k^4\left(S^2_{q_k}(w_k)-S''_{q_k}(w_k)\right)\geqslant-\sum_{k=1}^n\left(2|q_k'(w_k)|^4+|q_k''(w_k)|^2\right)+\mathrm{Re}\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^n\frac{6w_k^2w_l^2}{(w_k-w_l)^4}.$$

Для оценки второго слагаемого в правой части воспользуемся асимптотической формулой для емкости конденсатора $C(r)$ из доказательства предыдущей теоремы, где полагаем $\alpha_k = 1,\ \varphi_k = \arg w_k,\ k = 1, \ldots, n$. Пусть $C^*(r)$ – такой же конденсатор, но построенный по точкам $w_k^* = e^{i\theta_k^*},\ \theta_k^* = 2\pi(k-1)/n,\ k = 1, \ldots, n$. Из свойств диссимметризации [9] следует, что

$$\mathrm{cap}\ C(r) \leqslant \mathrm{cap}\ C^*(r).$$

Используя асимптотические формулы для емкостей этих конденсаторов, заключаем

$$\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{6 w_k^2 w_l^2}{(w_k - w_l)^4} \geqslant \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{6 (w_k^*)^2 (w_l^*)^2}{(w_k^* - w_l^*)^4}$$

(см. доказательство теоремы 2).

В обозначениях статьи [7] при $\rho \in (0,1)$ рассмотрим приведенные модули комплексной сферы $M_1 := M(Z_R, \Delta_R, \Psi_R)$ и $M_2 := M(W, \Delta, \Psi)$, для совокупностей: $Z_R = \big\{ e^{i\theta_k^*}(1-\rho),$ $e^{i\theta_k^*},\ \ e^{i\theta_k^*}(1+\rho) \big\}_{k=1}^{n}$, $\Delta_R = \{\delta_1^k,\ \delta_2^k,\ \delta_3^k\}_{k=1}^{n}$, $(\delta_1^k = -1,\ \delta_2^k = 2,\ \delta_3^k = -1,\ k = 1, \ldots, n)$, $\Psi_R = \{r/n, \ldots, r/n\}$, $W = \{(1-\rho)^n,\ 1,\ (1+\rho)^n\}$, $\Delta = \{-1,\ 2,\ -1\}$, $\Psi = \{(1-\rho)^{n-1} r,\ r,\ (1+\rho)^{n-1} r\}$. По формуле (2) работы [7] получаем

$$M_1 = \frac{-1}{2\pi (6n)^2} \left(-6n \log n + 2n \log 2 - 6n \log \rho + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \Big[\log(1-\rho^2) + \right.$$

$$\left. + \log \frac{|e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}|^6 |e^{i\theta_k^*}(1+\rho) - e^{i\theta_l^*}(1-\rho)| |e^{i\theta_k^*}(1-\rho) - e^{i\theta_l^*}(1+\rho)|}{|e^{i\theta_k^*}(1-\rho) - e^{i\theta_l^*}|^2 |e^{i\theta_k^*}(1+\rho) - e^{i\theta_l^*}|^2 |e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}(1-\rho)|^2 |e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}(1+\rho)|^2} \Big] \right),$$

$$M_2 = \frac{-1}{2\pi \cdot 36} \big((n-1) \log(1-\rho^2) - 4 \log(1 - (1-\rho)^n) -$$

$$-4 \log((1+\rho)^n - 1) + 2 \log((1+\rho)^n - (1-\rho)^n) \big).$$

Согласно теореме 4 из [7] для $R(z) = z^n$

$$n M_1 = M_2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \Big[\log(1-\rho^2) +$$

$$+ \log \frac{|e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}|^6 |e^{i\theta_k^*}(1+\rho) - e^{i\theta_l^*}(1-\rho)| |e^{i\theta_k^*}(1-\rho) - e^{i\theta_l^*}(1+\rho)|}{|e^{i\theta_k^*}(1-\rho) - e^{i\theta_l^*}|^2 |e^{i\theta_k^*}(1+\rho) - e^{i\theta_l^*}|^2 |e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}(1-\rho)|^2 |e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*}(1+\rho)|^2} \Big] =$$

$$= n(n-1) \log(1-\rho^2) - 4n \log(1 - (1-\rho)^n) - 4n \log((1+\rho)^n - 1) +$$

$$+2n \log((1+\rho)^n - (1-\rho)^n) + 6n \log n - 2n \log 2 + 6n \log \rho.$$

Следовательно,

$$-\rho^4 \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{6 e^{2i(\theta_k^* + \theta_l^*)}}{(e^{i\theta_k^*} - e^{i\theta_l^*})^4} + o(\rho^4) = -\frac{1}{120} n (n^4 + 10n^2 - 11) \rho^4 + o(\rho^4).$$

После деления обеих частей этого равенства на ρ^4, переходя к пределу при $\rho \to 0$, получаем

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{6e^{2i(\theta_k^*+\theta_l^*)}}{(e^{i\theta_k^*}-e^{i\theta_l^*})^4}=\frac{n(n^2-1)(n^2+11)}{120}.$$

Суммируя выписанные соотношения, приходим к неравенству (4). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Следующий результат распространяет теорему 2 работы [10] на случай произвольных мероморфных функций (не обязательно регулярных и однолистных).

Теорема 4. *Пусть функции $f_k,\ k=1,\dots,n,\ (n\geqslant 3)$ мероморфны в круге U и попарно не принимают в нем одинаковых значений, причем $f_1(0)=-f_n(0)=1,\ -1<f_k(0)<1,\ k=2,\dots,n-1$. Тогда справедливо неравенство*

$$|f_1'(0)|^{1/4}|f_n'(0)|^{1/4}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{|f_k'(0)|}{\sqrt{1-(f_k(0))^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Равенство достигается в случае, когда функции $f_k,\ k=1,\dots,n$, отображают круг U на области, ограниченые кривыми $\{w=(\zeta+1/\zeta)/2:\ \zeta^{2n-2}\in[-1,0]\}$, при этом $f_k(0)=\cos\frac{\pi(k-1)}{n-1},\ k=1,\dots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам понадобится следующая модификация разделяющего преобразования областей, предложенного в [9]. В области $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus[-1,\ 1]=B$ выделим ветвь функции, обратной функции Жуковского $\zeta=p(w)=w+\sqrt{w^2-1}$, отображающую область B на внешность круга $|\zeta|<1$ и доопределенную на границе B в смысле граничного соответствия. Пусть некоторая область D содержит точку $a\in(-1,1)$ и не содержит точек -1 и 1. Обозначим через a^+ и a^- пару различных достижимых граничных точек области B с носителем a, лежащих на верхнем и нижнем берегах разреза $[-1,\ 1]$, соответственно. Пусть D^+ – та связная компонента множества $D\setminus[-1,1]$, из которой достижима точка a^+, D^- – та связная компонента множества $D\setminus[-1,1]$, из которой достижима точка a^-. Обозначим через $\widetilde{D}^+$ ($\widetilde{D}^-$) объединение области D^+ (D^-) с достижимыми граничными точками этой области, принадлежащими $D\bigcap[-1,1]$. Объединение множества $p\left(\widetilde{D}^+\right)$ с его отражением относительно единичной окружности обозначим D^1, а объединение множества $p\left(\widetilde{D}^-\right)$ с его отражением относительно единичной окружности – D^2 (области D^1 и D^2 могут совпадать). Отметим, что

$$|p(w)-p(a)|\sim\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}|w-a|,\quad\text{при}\quad w\to a,\quad w\in\overline{B}.$$

Повторяя доказательство теоремы 1.9 работы [9], приходим к неравенству

$$r(D,a)\leqslant\left(\frac{r(D^1,a^{(1)})r(D^2,a^{(2)})}{1/(1-a^2)}\exp 2g_{D^1}(a^{(1)},a^{(2)})\right)^{1/2},$$

где $a^{(1)}=p(a^+),a^{(2)}=p(a^-)$. В случае, когда $a^{(2)}\notin D^1$ ($D^1\neq D^2$), полагаем $g_{D^1}(a^{(1)},a^{(2)})=0$.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 4. Обозначим $f_k(U)=D_k,\ \ f_k(0)=a_k,\ \ k=1,\dots,n$. Тогда $a_1=1,\ a_n=-1$ и точки a_k для $k=2,\dots,n-1$, принадлежат интервалу $(-1,1)$. Области D_k попарно не налегают, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_w$, и, согласно неравенству Хеймана,

$$|f_k'(0)|\leqslant r(D_k,a_k),\ k=1,\dots,n, \tag{5}$$

(см., например, [9, с. 14]). Пусть $\{D_1^1\}$ – результат разделяющего преобразования области D_1 относительно семейства, состоящего из одной функции $\{p\}$. Так как

$$|p(w)-p(1)| = |\sqrt{w-1}+\sqrt{w+1}||w-1|^{1/2} \sim \sqrt{2}|w-1|^{1/2} \quad \text{при} \quad w \to 1,$$

то

$$r(D_1, 1) \leqslant \left(\frac{r(D_1^1, 1)}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{6}$$

Точно так же, если $\{D_n^1\}$ – результат разделяющего преобразования области D_n относительно $\{p\}$, то

$$r(D_n, -1) \leqslant \left(\frac{r(D_n^1, -1)}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{7}$$

В использованных выше обозначениях для аналога разделяющего преобразования областей для каждой области D_k и соответствующей ей пары симметричных областей $\{D_k^1, D_k^2\}$, $k = 2, \ldots, n-1$, имеем неравенство

$$r(D_k, a_k) \leqslant \left(\frac{r(D_k^1, a_k^{(1)}) r(D_k^2, a_k^{(2)})}{1/(1-a_k^2)} \exp 2g_{D_k^1}(a_k^{(1)}, a_k^{(2)})\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $a_k^{(1)} = p(a_k^+), a_k^{(2)} = p(a_k^-)$, $k = 2, \ldots, n-1$. Множество $D_1^1 \bigcup D_n^1 \bigcup \left(\bigcup\limits_{k=2}^{n-1} D_1^1 \bigcap D_k^2\right)$ и точки $1, -1, a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$, $k = 2, \ldots, n-1$, удовлетворяют условиям следствия 3 работы [11], согласно которому

$$r(D_1^1, 1) r(D_n^1, -1) \prod_{k=2}^{n-1} \left[r(D_k^1, a_k^{(1)}) r(D_k^2, a_k^{(2)}) \exp 2g_{D_k^1}(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}) \right] \leqslant \left(\frac{2}{n-1}\right)^{2(n-1)}. \tag{9}$$

Суммируя неравенства (5)–(9), приходим к требуемому результату. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

2. Многоточечные теоремы искажения

В классических теоремах искажения устанавливаются оценки модулей производных в одной точке в различных классах аналитических функций. Ниже оцениваются произведения степеней модулей производных в нескольких специально подобранных точках.

Теорема 5. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в круге U. Предположим, что в точках $z_k = \operatorname{tg}(\pi/4 - \pi(2k-1)/(4n))$, $k = 1, \ldots, n$ $(n \geqslant 1)$, функция принимает значения, лежащие на интервале $(-1,\ 1)$, и $f \neq \pm 1$ в круге U. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{|f'(z_k)|}{\sqrt{1-f^2(z_k)}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right).$$

Равенство достигается для функции $f^*(z) = 2z/(1+z^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 7 работы [18] для любых точек w_k, $k = 1, \ldots, n$, принадлежащих интервалу $(-1,\ 1)$, и любых попарно непересекающихся областей G_k, $w_k \in G_k \subset \overline{\mathbb{C}}_w$, дополнение к объединению которых содержит некоторый континуум, соединяющий точки -1 и 1, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{r(G_k, w_k)}{\sqrt{1-w_k^2}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{r(G_k^*, w_k^*)}{\sqrt{1-(w_k^*)^2}}. \tag{10}$$

Здесь $w_k^* = \cos[\pi(2k-1)/(2n)]$, $k=1,\ldots,n$, а области G_k^* ограничены кривыми $\{w = (\zeta+1/\zeta)/2:\ \zeta^{2n}\in[0,\ 1]\}$. Введем следующие обозначения:

$$D_k = f^{*^{-1}}(G_k^*),\quad G_k = f(D_k),\quad w_k = f(z_k),\ k=1,\ldots,n.$$

Заметим, что $f^*(z_k)=w_k^*$, $r(G_k,w_k)=|f'(z_k)|r(D_k,z_k)$, $r(G_k^*,w_k^*)=|f^{*'}(z_k)|r(D_k,z_k)$, $k=1,\ldots,n$. Неравенство (10) дает

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{|f'(z_k)|}{\sqrt{1-(f(z_k))^2}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\frac{|f^{*'}(z_k)|}{\sqrt{1-(f^*(z_k))^2}}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\sqrt{1-(f^*(z_k))^2}=\sin\alpha_k \quad (\alpha_k=\pi(2k-1)/(2n)),\quad f^{*'}(z_k)=\frac{\cos^2\alpha_k\sin\alpha_k}{1-\sin\alpha_k},\ k=1,\ldots,n.$$

Таким образом, правая часть последнего неравенства равна

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\sin\alpha_k).$$

Теорема доказана.

В случае $n=1$ из неравенства (10) вытекает классический результат: если функция f мероморфна и однолистна в круге U, $f(0)=0$ и $|f'(0)|>1$, то образ круга $f(U)$ содержит по крайней мере одну из точек $w=\pm 1/2$.

Теорема 6. *Пусть функция f мероморфна и однолистна в круге U и пусть r – произвольное фиксированное число из промежутка $(0,\ 1)$, а n – произвольное четное число, не меньшее 4. Предположим, что в точках z_k, $k=1,\ldots,n$,*

$$z_k = -\frac{1-r^2}{2r\cos\beta_k}+\sqrt{\left(\frac{1-r^2}{2r\cos\beta_k}\right)^2+1}\quad \left(\beta_k=\frac{\pi(k-1)}{n-1}\right),\quad k=1,\ldots,n/2,$$

$$z_k=-z_{n-k+1},\quad k=n/2+1,\ldots,n,$$

функция f принимает значения на отрезке $[-1,\ 1]$, причем $f(z_1)=f(r)=1$ и $f(z_n)=f(-r)=-1$. Тогда

$$\big(f'(r)f'(-r)\big)^{\frac14}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{|f'(z_k)|}{\sqrt{1-f^2(z_k)}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1+r^2}{r(1-r^2)}}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{1+2r^2\cos2\beta_k+r^4+(1-r^2)\sqrt{1+2r^2\cos2\beta_k+r^4}}{2r(1-r^2)\sin\beta_k}.$$

Равенство достигается для функции $f^*(z)=(1-r^2)z/[r(1-z^2)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 4 (см. также теорему 2 работы [10]) следует, что для любых точек w_k, $k=1,\ldots,n$, принадлежащих отрезку $[-1,\ 1]$, $w_1=1$, $w_n=-1$, и любых односвязных попарно непересекающихся областей G_k, $w_k\in G_k\subset\overline{\mathbb{C}}_w$, справедливо неравенство

$$(r(G_1,w_1)r(G_n,w_n))^{\frac14}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{r(G_k,w_k)}{\sqrt{1-w_k^2}}\leqslant(r(G_1^*,w_1^*)r(G_n^*,w_n^*))^{\frac14}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{r(G_k^*,w_k^*)}{\sqrt{1-(w_k^*)^2}}.\qquad(11)$$

Здесь $w_k^* = \cos\beta_k,\ k = 1, \ldots, n$, а области G_k^* ограничены кривыми $\{w = (\zeta + 1/\zeta)/2 :\ \zeta^{2n-2} \in [-1, 0]\}$. Далее доказательство повторяет доказательство предыдущей теоремы. Утверждение о знаке равенства вытекает из (11), где для областей $G_k = G_k^*,\ k = 1, \ldots, n$, равенство очевидно. Теорема доказана.

Обозначим через $\sum$ класс функций

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},$$

мероморфных (с полюсом в ∞) и однолистных в $|z| > 1$.

Теорема 7. *Если функция f принадлежит классу $\sum$, тогда для любых комплексных чисел $\gamma_k,\ k = 1, \ldots, n,\ n \geqslant 1$, любого $R > 1$ и любого вещественного числа θ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^2}{6}\left(\frac{S_f(z_k)}{(f'(z_k))^2} + \frac{n^2(1 - 10R^n + R^{2n}) - 4(R^n+1)^2}{8z_k^2(R^n+1)^2(f'(z_k))^2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{\gamma_k\gamma_l}{(f(z_k) - f(z_l))^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{4R}\right)^2 \left(\frac{R^n+1}{R^n-1}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{|\gamma_k|^2}{|f'(z_k)|^2}, \qquad (12)$$

где $z_k = R\exp(i(\theta + 2\pi(k-1)/n)),\ k = 1, \ldots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h_k,\ k = 1, \ldots, n$, – некоторые функции, конформно и однолистно отображающие круг $|\zeta| < 1$ на соответствующую область

$$D_k = \{z :\ |z| > 1, |\arg z - 2\pi(k-1)/n| < \pi/n\}$$

так, что $h_k(0) = z_k,\ k = 1, \ldots, n$. Тогда функции $F_k = f \circ h_k,\ k = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям теоремы 1. Значит, для любых комплексных постоянных $\gamma_k,\ k = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^2}{6} \frac{S_{F_k}(0)}{(F_k'(0))^2} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{\gamma_k\gamma_l}{(F_k(0) - F_l(0))^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\gamma_k|^2}{|F_k'(0)|^2}.$$

Заметив, что

$$F_k(0) = f(z_k), \quad F_k'(0) = f'(z_k)h_k'(0),$$

$$S_{F_k}(0) = S_{h_k}(0) + \left(h_k'(0)\right)^2 S_f(z_k),\ k = 1, \ldots, n,$$

получаем неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^2}{6}\left(\frac{S_{h_k}(0)}{(f'(z_k)h_k'(0))^2} + \frac{S_{f_k}(z_k)}{(f'(z_k))^2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{\gamma_k\gamma_l}{(f(z_k) - f(z_l))^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\gamma_k|^2}{|f'(z_k)h_k'(0)|^2}. \qquad (13)$$

Положим

$$h_k(\zeta) = e^{\left(i\frac{\pi(2k-3)}{n} + \theta\right)} \left(\frac{(1+R^n)\sqrt{\zeta - 1} + \sqrt{\zeta(1 + iR^{n/2})^4 - (1 - iR^{n/2})^4}}{(1+R^n)\sqrt{\zeta - 1} - \sqrt{\zeta(1 + iR^{n/2})^4 - (1 - iR^{n/2})^4}}\right)^{\frac{2}{n}}$$

(под корнем понимается ветвь, сохраняющая единицу). Прямые вычисления дают

$$h_k'(0) = -\frac{4z_k(R^{n/2}-i)(R^n-1)}{n(R^{n/2}+i)^3},$$

$$|h_k'(0)|^2 = \left(\frac{4R}{n}\right)^2 \left(\frac{R^n-1}{R^n+1}\right)^2,$$

$$S_{h_k} = \frac{2(R^n-1)^2(n^2(1-10R^n+R^{2n}))-4(R^n+1)^2}{n^2(i+R^{n/2})^8}.$$

Подставляя выписанные выражения в (13), получаем требуемое неравенство (12). Теорема доказана.

В теории функций хорошо известен класс $\mathfrak{M}(R)$ – совокупность функций $w = f(z)$, мероморфных и однолистных в кольце $K = K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$, $R < \infty$, для которых множество $f(K)$ значений $f(z)$ в K лежит в области $|w| > 1$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ в окружность $|w| = 1$. Каждая функция f класса $\mathfrak{M}(R)$ допускает аналитическое продолжение в кольцо $1/R < |z| < R$ по принципу симметрии Римана – Шварца. Будем обозначать это продолжение той же буквой f. Классу $\mathfrak{M}(R)$ принадлежит функция Гретша $w = G(z) \equiv G(z;\ R)$, которая конформно и однолистно отображает кольцо K на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до ∞ так, что $G(R;R) = P(R)$. Нетрудно убедиться, что

$$G(z;R) = \tau \operatorname{sn}^2\left(\left(\frac{i}{\pi}\log(zR)+1\right)\mathbf{K}(\tau);\tau\right),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ – решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2}\mathbf{K}\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)/\mathbf{K}(\tau),$$

$\mathbf{K}(\tau)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\operatorname{sn}(\cdot;\tau)$ – эллиптическая функция Якоби. Введем экстремальную n-кратно симметричную функцию Гретша равенством

$$G(z;n,R) = \sqrt[n]{G(z^n;R^n)} \quad \left(\sqrt[n]{1}=1\right).$$

Нетрудно увидеть, что функция $G(z;n,R)$ также принадлежит классу $\mathfrak{M}(R)$ и отображает кольцо K на область $|w| > 1$ с разрезами по лучам $\arg w^n = 0, |w^n| \geqslant P(R)$.

Следующее утверждение в различных направлениях дополняет результат, полученный А.Ю. Солыниным [19, неравенство (4.12)].

Теорема 8. *Для любой функции f класса $\mathfrak{M}(R)$ и любого вещественного числа θ справедливы неравенства*

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{4} f'(z_k)\right|}{\prod\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} |f(z_k)-f(z_l)|^{2/3}} \leqslant 4^{-\frac{4}{3}}\left(G'(-1;R^4)\right)^4, \tag{14}$$

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{4} f'(z_k)\right|}{\prod\limits_{k=1}^{4} |f(z_k)-f(z_{k+1})|} \leqslant 4^{-1}\left(G'(-1;R^4)\right)^4, \tag{15}$$

$z_k = \exp(i(\theta + \pi(k-1)/2)),\ \ k = 1, 2, 3, 4,$

$$\frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{6} f'(\widetilde{z}_k)\right|}{\prod\limits_{k=1}^{6} |f(\widetilde{z}_k) - f(\widetilde{z}_{k+1})|} \leqslant \left(G'(-1; R^6)\right)^6, \tag{16}$$

$\widetilde{z}_k = \exp(i(\theta + \pi(k-1)/3)),\ \ k = 1, \ldots, 6$. *Равенство в* (14) *и* (15) *достигается для функции* $G(z; 4, R)$ *при* $\theta = \pi/4$, *а в* (16) *для* $G(z; 6, R)$ *при* $\theta = \pi/6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все три неравенства получаются одинаково. Рассмотрим подробнее случай (14). Можно считать, что $\theta = \pi/4$. Определим области

$$D_k = \{z:\ 1/R < |z| < R, |\arg z - \pi/4 - \pi(k-1)/2| < \pi/8\}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Из следствия 2 работы [6] вытекает неравенство

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{4} r(f(D_k), f(z_k))}{\prod\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |f(z_k) - f(z_l)|^{2/3}} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{4} r(G(D_k; 4, R), z_k)}{\prod\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |z_k - z_l|^{2/3}}.$$

Заметим, что
$$r(f(D_k), f(z_k)) = |f'(z_k)| r(D_k, z_k), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

для любой функции f класса $\mathfrak{M}(R)$. Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству (14), причем справедливо соответствующее утверждение о знаке равенства. Доказательство неравенства (15) также сводится к применению следствия 2 [6], а для доказательства (16) необходимо использовать теорему 10 той же работы. Теорема доказана.

3. Оценки коэффициентов

В ряде случаев задачи об экстремальном разбиении приводят к оценкам некоторых комбинаций коэффициентов однолистных функций. Например, классическая оценка шварциана (теорема 1, $n = 1$)
$$|S_f(0)| \leqslant 6$$
означает, в частности, что для функций $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ известного класса S [8] справедливо неравенство
$$|c_3 - c_2^2| \leqslant 1.$$
Равенство достигается для функции Кёбе $f(z) = z/(1-z)^2$. С помощью экстремальных разбиений [1] дадим новое доказательство оценки в классе $\sum$, полученной ранее Г.М. Голузиным [20]. Заметим, что, по сравнению с классом S, n-е тело коэффициентов в классе $\sum$ имеет более сложную структуру. Точные оценки четвертого и следующих за ним коэффициентов в этом классе до сих пор неизвестны.

Теорема 9 [20]. *Для функций*

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

класса $\sum$ *справедлива точная оценка*

$$|a_2| \leqslant \frac{2}{3},$$

причем равенство достигается в случае $f(z) = z(1+z^{-3})^{2/3}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что экстремальной системой областей в задаче о максимуме мебиусова инварианта I_4 является система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\zeta(\zeta^3+8)}{(\zeta^3-1)^2}d\zeta^2. \tag{17}$$

(см., например, [1, с. 25], а также [6]). Учитывая инвариантность величины I_4 относительно всех дробно-линейных преобразований, заметим, что экстремальной системой областей задачи $I_4 \to \max$ является также система круговых областей любого квадратичного дифференциала вида

$$Q^*(w)dw^2 = -\frac{k^3w(w^3k^3+8)}{(w^3k^3-1)^2}dw^2, \tag{18}$$

полученного из квадратичного дифференциала (17) преобразованием $\zeta = kw$ $(k \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$. Квадратичный дифференциал (18) имеет четыре полюса второго порядка:

$$w_1 = \infty, \quad w_2 = \frac{1}{k}, \quad w_3 = \frac{1}{k}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad w_4 = \frac{1}{k}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}},$$

четыре простых нуля:

$$w_5 = 0, \quad w_6 = -\frac{2}{k}, \quad w_7 = -\frac{2}{k}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad w_8 = -\frac{2}{k}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Его круговые области ограничены тремя отрезками, исходящими из нуля и заканчивающимися в точках $w_6,\ w_7,\ w_8$, а также круговыми дугами, соединяющими пары точек w_6 и w_7, w_7 и w_8, w_8 и w_6.

Для произвольных $r \in (0,1),\ \varphi \in \mathbb{R}$ рассмотрим теперь $k = re^{i\varphi}\sqrt[3]{(1-r^3)^{-2}}$ и функцию

$$w = F(z) = z\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{\left(e^{i\varphi}z\right)^3}\right)^2},$$

отображающую внешность единичного круга $U_z^* = \{z : |z| > 1\}$ однолистно на плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$ с разрезами по трем отрезкам, исходящим из нуля под равными углами и заканчивающимся в точках $\sqrt[3]{2}e^{-i(\varphi+\pi)}$, $\sqrt[3]{2}e^{-i(\varphi-\frac{\pi}{3})}$, $\sqrt[3]{2}e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{3})}$. При отображении функцией $F(z)$ в U_z^* полюсам второго порядка квадратичного дифференциала (18) соответствуют точки

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \quad z_3 = \frac{1}{r}e^{-i(\varphi-\frac{2\pi}{3})}, \quad z_4 = \frac{1}{r}e^{-i(\varphi+\frac{2\pi}{3})};$$

а круговым областям этого дифференциала соответствует некоторый набор попарно неналегающих односвязных областей $D_k,\ k = 1,\dots,4$, удовлетворяющих условиям: $z_k \in D_k \subset U_z^*,\ k = 1,\dots,4,\ \bigcup\limits_{k=1}^{4}\overline{D}_k = \overline{U}_z^*$. Следовательно, для любой функции f класса $\sum$ справедливо неравенство

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{4} r(f(D_k), f(z_k))}{\left\{\prod\limits_{2\leqslant k<l\leqslant 4}|f(z_k)-f(z_l)|\right\}^{2/3}} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{4} r(F(D_k), F(z_k))}{\left\{\prod\limits_{2\leqslant k<l\leqslant 4}|F(z_k)-F(z_l)|\right\}^{2/3}}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{f'(z_2)f'(z_3)f'(z_4)}{\{(f(z_2)-f(z_3))(f(z_2)-f(z_4))(f(z_3)-f(z_4))\}^{2/3}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{F'(z_2)F'(z_3)F'(z_4)}{\{(F(z_2)-F(z_3))(F(z_2)-F(z_4))(F(z_3)-F(z_4))\}^{2/3}}\right|. \tag{19}$$

Подставляя в обе части полученного неравенства

$$z_2 = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \quad z_3 = \frac{1}{r}e^{-i(\varphi-\frac{2\pi}{3})}, \quad z_4 = \frac{1}{r}e^{-i(\varphi+\frac{2\pi}{3})},$$

при $r \to 0$ постепенно вычисляем:

$$f(z_2) = f\left(\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{e^{-i\varphi}}{r} + a_0 + e^{i\varphi}ra_1 + e^{2i\varphi}r^2a_2 + o(r^2),$$

$$f(z_3) = f\left(\frac{1}{r}e^{-i(\varphi-\frac{2\pi}{3})}\right) = \frac{e^{-i\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{r} + a_0 + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}ra_1 + e^{2i\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^2a_2 + o(r^2),$$

$$f(z_4) = f\left(\frac{1}{r}e^{-i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}\right) = \frac{e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}}{r} + a_0 + e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}ra_1 + e^{2i\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^2a_2 + o(r^2),$$

$$\left\{\prod_{3\leqslant k<l\leqslant 4}(f(z_k)-f(z_l))\right\}^{2/3} = \frac{3\left(ie^{-3i\varphi}\right)^{2/3}}{r^2} + \frac{6ia_2r}{\left(ie^{-3i\varphi}\right)^{1/3}} + o(r),$$

$$f'(z_2) = f'\left(\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = 1 - e^{2i\varphi}r^2a_1 - 2e^{3i\varphi}r^3a_2 + o(r^3),$$

$$f'(z_3) = f'\left(\frac{1}{r}e^{-i(\varphi-\frac{2\pi}{3})}\right) = 1 - e^{2i\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^2a_1 - 2e^{3i\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^3a_2 + o(r^3),$$

$$f'(z_4) = f'\left(\frac{1}{r}e^{-i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}\right) = 1 - e^{2i\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^2a_1 - 2e^{3i\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)}r^3a_2 + o(r^3),$$

$$\prod_{k=2}^{4}|f'(z_k)| = 1 - 6\left(e^{3i\varphi}a_2\right)r^3 + o(r^3),$$

$$\left|\frac{\prod\limits_{k=2}^{4} f'(z_k)}{\left\{\prod\limits_{2\leqslant k<l\leqslant 4}(f(z_k)-f(z_l))\right\}^{2/3}}\right| = \left|\frac{r^2}{3\left(ie^{-3i\varphi}\right)^{2/3}} - \frac{8ia_2r^5}{3\left(ie^{-3i\varphi}\right)^{5/3}} + o(r^5)\right| =$$

$$= \left|\frac{r^2}{3} - \frac{8a_2r^5}{3e^{-3i\varphi}} + o(r^5)\right|, \quad r \to 0.$$

Точно так же

$$\left|\frac{\prod\limits_{k=2}^{4} F'(z_k)}{\left\{\prod\limits_{2\leqslant k<l\leqslant 4}(F(z_k)-F(z_l))\right\}^{2/3}}\right| = \left|\frac{r^2}{3} + \frac{16r^5}{9} + o(r^5)\right|, \quad r \to 0.$$

Окончательно неравенство (19) при $r \to 0$ дает

$$\left|1 - 8a_2 e^{3i\varphi} r^3 + o(r^3)\right| \leqslant \left|1 + \frac{16}{3} r^3 + o(r^3)\right|.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получаем

$$\operatorname{Re}\left[a_2 e^{3i\varphi}\right] \geqslant -\frac{2}{3}.$$

В силу произвольности $\varphi \in \mathbb{R}$ это неравенство означает, что

$$|a_2| \leqslant \frac{2}{3}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно.

Следующий результат является, по-видимому, новым.

Теорема 10. *Если функция* $f(z) = z + \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ *принадлежит классу* $\sum$, *то справедливо неравенство*

$$|a_1^2 + 2a_3| \leqslant 1.$$

Равенство достигается в случае $f(z) = z + z^{-1}$.

Доказательство. Полагая в неравенстве (12) $n = 2,\ z_1 = Re^{i\theta},\ z_2 = -Re^{i\theta},\ \gamma_1 = z_1,\ \gamma_2 = z_2$, приходим к оценке

$$\left|\frac{1}{6(f'(z_1))^2}\left(z_1^2 S_f(z_1) - \frac{6R^2}{(R^2+1)^2}\right) + \frac{1}{6(f'(z_2))^2}\left(z_2^2 S_f(z_2) - \frac{6R^2}{(R^2+1)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2z_1 z_2}{(f(z_1) - f(z_2))^2}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{R^2+1}{R^2-1}\right)^2 \left(\frac{1}{|f'(z_1)|^2} + \frac{1}{|f'(z_2)|^2}\right). \tag{20}$$

Подстановка асимптотических разложений

$$f(z_1) = e^{i\theta} R + a_0 + \frac{a_1}{e^{i\theta} R} + \frac{a_2}{e^{2i\theta} R^2} + \frac{a_3}{e^{3i\theta} R^3} + o\left(\frac{1}{R^3}\right),$$

$$f(z_2) = -e^{i\theta} R + a_0 - \frac{a_1}{e^{i\theta} R} + \frac{a_2}{e^{2i\theta} R^2} - \frac{a_3}{e^{3i\theta} R^3} + o\left(\frac{1}{R^3}\right),$$

$$f'(z_1) = 1 - \frac{a_1}{e^{2i\theta} R^2} - \frac{2a_2}{e^{3i\theta} R^3} - \frac{3a_3}{e^{4i\theta} R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right),$$

$$f'(z_2) = 1 - \frac{a_1}{e^{2i\theta} R^2} + \frac{2a_2}{e^{3i\theta} R^3} - \frac{3a_3}{e^{4i\theta} R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right),$$

$$S_f(z_1) = -\frac{a_1}{e^{4i\theta} R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right),$$

$$S_f(z_2) = -\frac{a_1}{e^{4i\theta} R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad R \to \infty,$$

приводит неравенство (20) к виду

$$\frac{1}{2} + \frac{2 + \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta} a_1\right)}{R^2} + \frac{-8 + |a_1|^2 + 8\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta} a_1\right) + \operatorname{Re} e^{-4i\theta}\left(18a_1^2 + 38a_3\right)}{R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{2 + \operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta} a_1\right)}{R^2} + \frac{8 + |a_1|^2 + 8\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta} a_1\right) + \operatorname{Re} e^{-4i\theta}\left(2a_1^2 + 6a_3\right)}{R^4} + o\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad R \to \infty.$$

После простых преобразований и перехода к пределу при $R\to\infty$, получаем

$$\mathrm{Re}\ e^{-4i\theta}\left(a_1^2+2a_3\right)\leqslant 1.$$

Используя произвольность $\theta\in\mathbb{R}$, приходим к требуемому неравенству. Случай равенства очевиден. Теорема доказана.

Ранее Г.М. Голузиным было установлено более сильное, чем в теореме 10, неравенство, справедливое только для функций $\widetilde{f}$ класса $\sum$ таких, что множество $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus f(\{z:|z|>1\})$ звездообразно относительно начала координат.

Теорема 11. *В классе* $\sum$ *функций* $f(z)=z+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^{-k}$ *справедлива точная оценка*

$$|a_1^3+3a_1a_3+3a_2^2+3a_5|\leqslant 1$$

с равенством в случае $f(z)=z+z^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_k,\ k=1,\dots,n,$ – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k=0$, и пусть $F_k=f\circ h_k,\ k=1,\dots,n,$ – функции из доказательства теоремы 7. Применяя неравенство Нехари (см. [8, с. 551]), находим

$$\prod_{k=1}^{n}\left|F_k'(0)\right|^{\delta_k^2}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|F_k(0)-F_l(0)|^{-\delta_k\delta_l}.$$

Замечая, что

$$F_k(0)=f(z_k),\quad F_k'(0)=f'(z_k)h_k'(0),\quad |h_k'(0)|=\frac{4R}{n}\frac{R^n-1}{R^n+1},\ k=1,\dots,n,$$

получаем неравенство

$$\left(\frac{4R}{n}\frac{R^n-1}{R^n+1}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^2}\prod_{k=1}^{n}\left|f'(z_k)\right|^{\delta_k^2}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|f(z_k)-f(z_l)|^{-\delta_k\delta_l}. \tag{21}$$

Полагая в (21) $n=6,\delta_k=(-1)^{k+1},z_k=Re^{i(\theta+\frac{2\pi(k-1)}{6})},\ k=1,\dots,6,\ R>1$, приходим к неравенству

$$\left|\frac{\prod\limits_{k=1}^{6}f'(z_k)}{\prod\limits_{k=1}^{6}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{6}(f(z_k)-f(z_l))^2}\right|\leqslant\left(\frac{3}{2R}\frac{R^3+1}{R^3-1}\right)^6.$$

Сравнение асимптотических разложений обеих частей этого неравенства при $R\to\infty$ завершает доказательство теоремы 11.

4. Неравенства для полиномов

Следующая ниже лемма является модификацией теоремы 1.3 работы [17], установленной с помощью разделяющего преобразования конденсаторов (разбиения конденсаторов) и симметризации.

Лемма 1. *Пусть функция f регулярна в круге U и удовлетворяет в этом круге условию $|f| < 1$. Предположим, что эта функция и ее производная определены также в различных граничных точках z_k таких, что точки $w_k = f(z_k)$ расположены на единичной окружности, $k = 1, 2, 3$. Тогда*

$$\left|\prod_{k=1}^{3} f'(z_k)\right| \geqslant \left|\frac{(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)}\right|.$$

Равенство достигается для дробно-линейных автоморфизмов f круга U и любых различных точек z_k на окружности $|z| = 1$, $k = 1, 2, 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что точки w_k, $k = 1, 2, 3$, расположены на единичной окружности по часовой стрелке. Обозначим через Ψ дробно-линейное отображение круга $|w| < 1$ на себя, переводящее точки w_k, $k = 1, 2, 3$, соответственно в точки z_k, $k = 1, 2, 3$. Пользуясь инвариантностью известного функционала в задаче о трех неналегающих областях либо непосредственно вычисляя производные функции Ψ, получаем

$$\frac{1}{|(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)|} = \frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{3} \Psi'(w_k)\right|}{|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|}.$$

С другой стороны, по теореме 1.3 [17], примененной к функции $\Psi \circ f$,

$$\left|\prod_{k=1}^{3} \Psi'(w_k) f'(z_k)\right| \geqslant 1.$$

Лемма доказана.

Хорошо известно, что для полиномов P с нулями в круге $|z| \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \geqslant \frac{n}{2}, \quad |z| = 1,$$

(см., например, [21]). В дополнение к этому неравенству справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть P – полином степени n с нулями, расположенными в круге $|z| \leqslant 1$. Тогда для любых точек z_k, $k = 1, 2, 3$, единичной окружности $|z| = 1$, отличных от нулей полинома P, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{3}\left(\mathrm{Re}\ \frac{z_k P'(z_k)}{P(z_k)} - \frac{n}{2}\right) \geqslant \frac{1}{6\sqrt{3}} \prod_{k=1}^{3}\left|\frac{z_k^n \overline{P(z_k)}}{P(z_k)} - \frac{z_{k+1}^n \overline{P(z_{k+1})}}{P(z_{k+1})}\right|,$$

где полагаем $z_4 = z_1$. Равенство достигается для полиномов $P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$, все ненулевые корни которых расположены на единичной окружности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим регулярную в круге $|z| \leqslant 1$ функцию $f(z) = P(z)/\left(z^n \overline{P(1/\overline{z})}\right)$, где $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ – указанный в формулировке теоремы полином. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – корни полинома P, то $P(z) = a_n \prod\limits_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$ и, следовательно,

$$f(z) = \frac{a_n}{\overline{a_n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{(z - \alpha_k)}{(1 - \overline{\alpha}_k z)}.$$

Отсюда видно, функция f удовлетворяет условиям леммы 1 при любых различных точках z_k, $k = 1, 2, 3$, расположенных на окружности $|z| = 1$. Прямые вычисления дают

$$f'(z) = \frac{P'(z) z^n \overline{P(1/\overline{z})} - P(z)(z^n \overline{P(1/\overline{z})})'}{(z^n \overline{P(1/\overline{z})})^2} =$$

$$= \frac{P'(z)z^n\overline{P(1/\overline{z})} - P(z)(nz^{n-1}\overline{P(1/\overline{z})} - z^{n-2}\overline{P'(1/\overline{z})})}{(z^n\overline{P(1/\overline{z})})^2}.$$

Поэтому

$$|f'(z_k)| = \left|\frac{P'(z_k)z_k^2\overline{P(z_k)} - P(z_k)nz_k\overline{P(z_k)} + P(z_k)\overline{P'(z_k)}}{(\overline{P(z_k)})^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{|(\overline{P(z_k)})^2|}\,|P(z_k)|^2\left|\frac{P'(z_k)z_k^2}{P(z_k)} - nz_k + \frac{\overline{P'(z_k)}}{\overline{P(z_k)}}\right| =$$

$$= \left|\frac{P'(z_k)z_k}{P(z_k)} - n + \frac{\overline{z_k}\overline{P'(z_k)}}{\overline{P(z_k)}}\right| = \left|2\mathrm{Re}\frac{P'(z_k)z_k}{P(z_k)} - n\right|.$$

Далее

$$|f(z_k) - f(z_{k+1})| = \left|\frac{P(z_k)}{z_k^n\overline{P(z_k)}} - \frac{P(z_{k+1})}{z_{k+1}^n\overline{P(z_{k+1})}}\right| = \left|\frac{z_k^n\overline{P(z_k)}}{P(z_k)} - \frac{z_{k+1}^n\overline{P(z_{k+1})}}{P(z_{k+1})}\right|,\ k = 1, 2, 3.$$

Применение леммы 1 и неравенства Шура

$$|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)| \leqslant 3\sqrt{3}$$

завершает доказательство теоремы 12.

Пусть теперь P – произвольный полином степени n. Введем следующие обозначения:

$L(P) = \min\{\mathrm{Re}\, P(z) : |z| = 1\}$;

$H(P) = \max\{\mathrm{Re}\, P(z) : |z| = 1\}$;

$\zeta = \Phi(\omega)$ – конформное и однолистное отображение внешности отрезка $\gamma := [2L(P), 2H(P)]$ на круг $|\zeta| < 1$ такое, что $\Phi(\infty) = 0,\ \Phi(2L(P)) = -1$.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = z^{1-n}\Phi\left(P(1/z) + \overline{P(\overline{z})}\right),\quad |z| < 1,\quad P(1/z) + \overline{P(\overline{z})} \notin \gamma.$$

По лемме 2.2 работы [17] множество $\{z :\ |z| < 1,\ P(1/z) + \overline{P(\overline{z})} \notin \gamma,\ |F(z)| \neq 1\}$ состоит из конечного числа областей $\{G\}$ с кусочно-гладкими границами, причем если область G не содержит начало координат, то $F(G)$ лежит вне единичного круга, а если $0 \in G$, то $F(z)$ конформно и однолитстно отображает область G на круг U_w. Если теперь z – регулярная для $F(z)$ точка окружности $|z| = 1$ и одновременно $F(G)$ лежит вне круга U, то в этой точке должно выполняться неравенство

$$DF(z) := \frac{\partial |F|}{\partial |z|} \leqslant 0.$$

В дополнение к теоремам 4.2 и 4.3 работы [17] приведем следующее утверждение, полагая, как обычно, $[x]^+ := \max\{x, 0\}$.

Теорема 13. *Пусть P – полином степени n и пусть функция F определена выше. Тогда для любых трех различных точек $z_k,\ k = 1, 2, 3$, на окружности $|z| = 1$, в которых определены производные $DF(z_k)$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{3}[DF(z_k)]^+ \leqslant \left|\frac{(F(z_1) - F(z_2))(F(z_2) - F(z_3))(F(z_3) - F(z_1))}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)}\right|. \qquad (22)$$

Равенство в (22) достигается в случае $P(z) = cz^n$, где c – произвольная вещественная постоянная, отличная от нуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы одна точка z_k, $1 \leqslant k \leqslant 3$, принадлежит границе области G из определения функции F и $0 \notin G$, то $DF(z_k) \leqslant 0$ и неравенство (22) очевидно. Пусть теперь все три точки z_k, $k = 1, 2, 3$, лежат на границе области G, содержащей начало координат. Применяя лемму 1 к суперпозиции $F^{-1} \circ \Psi^{-1}$, приходим к требуемому неравенству. В случае $P(z) = cz^n$ имеем $F(z) = z$, что дает равенство в (22). Теорема доказана.

Для вычисления производных в левой части неравенства (22) представим функцию $\zeta = \Phi(\omega)$ в виде суперпозиции

$$\zeta = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}, \quad \eta = \frac{\omega - H(P) - L(P)}{H(P) - L(P)},$$

где ветвь корня выбрана подходящим образом. Заметим, что при $|z| = 1$ точка $\omega = P(1/z) + \overline{P(\overline{z})} \in \gamma$ и $\eta := u + iv \in [-1, 1]$. Поэтому

$$|\zeta'(\eta)| = \left|1 \pm \frac{ui}{\sqrt{1 - u^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1+u)}}, \quad -1 < u < 1.$$

Учитывая последнее замечание,

$$DF(z) = 1 - n + \frac{2|\mathrm{Im}\ (P'(1/z)/z)|}{\sqrt{(1-u)(1+u)}(H(P) - L(P))} =$$

$$= 1 - n + \frac{|\mathrm{Im}\ (P'(1/z)/z)|}{\sqrt{(\mathrm{Re}\ P(1/z) - L(P))(H(P) - \mathrm{Re}\ P(1/z))}} \geqslant 1 - n + \frac{2|\mathrm{Im}\ (P'(1/z)/z)|}{H(P) - L(P)}.$$

Отсюда видно, что неравенство (22) представляет собой некоторое дополнение к неравенствам бернштейновского типа, причем справедливое для любых различных точек z_k (не обязательно точек регулярности функции F). Мы выбрали запись (22) через функцию F исключительно ввиду ее лаконичности. Сходным образом устанавливается аналог теоремы 13 с заменой функции F на функцию

$$\widetilde{F}(z) = z\Phi\left(z^n P(1/n) + z^{-n}\overline{P(\overline{z})}\right),$$

где в определении функции Φ полином $P(z)$ заменяется на $z^{-n}P(z)$.

Теорема 14. *Предположим, что полином P степени n с вещественными коэффициентами удовлетворяет условиям:* $\max\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = P(1) = 1$ *и* $\min\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = -1$. *Тогда для любой точки x на интервале $(-1, 1)$ выполняется неравенство*

$$\left[\sqrt{P'(1)} + 1 - n\right]^+ \left\{\left[\frac{|P'(x)|\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1 - P^2(x)}} + 1 - n\right]^+\right\}^2 \leqslant \frac{\sin\varphi \sin^2(\varphi/2)}{\sin\theta \sin^2(\theta/2)},$$

где $\varphi = \arccos P(x) + (1-n)\arccos x$, $\theta = \arccos x$. *Равенство достигается для полиномов Чебышева $T_n(z)$ первого рода при любых $x \in (-1, 1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Φ ту ветвь функции, обратной функции Жуковского, для которой $\Phi(\infty) = 0$. К функции

$$F(z) = z^{1-n}\Phi\left(P\left((z + 1/z)/2\right)\right)$$

применимы рассуждения, аналогичные лемме 2.2 работы [17] (см. также лемму 2.3). Повторяя доказательство предыдущей теоремы, приходим к неравенству, совпадающему по форме с неравенством (22), где $z_1 = e^{i\theta}, z_2 = 1, z_3 = e^{-i\theta}$. Прямые вычисления дают

$$DF(z) = 1 - n + \frac{|P'(x)|\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-P^2(x)}}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \theta = \arccos x, \quad -1 < x < 1;$$

$$DF(1) = 1 - n + \sqrt{P'(1)};$$
$$|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)| = 8 \sin\theta \sin^2(\theta/2);$$
$$|(F(z_1) - F(z_2))(F(z_2) - F(z_3))(F(z_3) - F(z_1))| = 8 \sin\varphi \sin^2(\varphi/2).$$

Отсюда вытекает неравенство теоремы 14. Что касается случая, когда достигается равенство, то достаточно заметить, что если $P(z) \equiv T_n(z)$, то $F(z) \equiv z$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Г. В. Кузьмина, "Методы геометрической теории функций II", *Алгебра и анализ*, **9**:5, (1997), 1–50.

[2] А. Ю. Солынин, "Модули и экстремально-метрические проблемы", *Алгебра и анализ*, **11**:1, (1999), 3–86.

[3] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Book Co, New York, 1973.

[4] В. Н. Дубинин, "Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 302, 2003, 38–51.

[5] В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, "Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 314, 2004, 52–75.

[6] В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, "К задачам об экстремальном разбиении", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 357, 2008, 54–74.

[7] В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, "Приведенный модуль комплексной сферы", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 254, 1998, 76–94.

[8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного пременного*, Наука, М., 1966.

[9] В. Н. Дубинин, "Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного", *Успехи мат. наук*, **49**:1, (1994), 3–76.

[10] Д. А. Кириллова, "Об однолистных функциях без общих значений", *Известия высших учебных заведений. Математика*, **9**, (2010), 86–89.

[11] В. Н. Дубинин, "О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена", *Математический сборник*, **200**:10, (2009), 25–38.

[12] Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, М., 1975.

[13] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, **73**, Ін-т математики НАН України, Київ, 2008.

[14] А. К. Бахтин, "Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств", *Украинский метематический журнал*, **61**:5, (2009), 596–610.

[15] E. Schippers, "Distortion theorems for higher-order Schwarzian derivatives of univalent functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:11, (2000), 3241–3249.

[16] D. Kraus, O. Roth, "O Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hiperbolic and elliptic geometry", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**, (2006), 111–130.

[17] В. Н. Дубинин, "Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов", *Алгебра и анализ*, **13**:5, (2001), 16–43.

[18] В. Н. Дубинин, "Емкости конденсаторов, обобщения лемм Гретша и симметризация", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 337, 2006, 73–100.

[19] А. Ю. Солынин, "Граничное искажение и экстремальные задачи в некотрых классах однолистных функций", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 204, 1993, 115–142.

[20] Г. М. Голузин, "Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций", *Математический сборник*, **3**, (1938), 321–330.

[21] P. Borwein, T. Erdelyi, *Polinomials and polynomial inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 апреля 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00028) и ДВО РАН (проект 09-III-A-01-007).

Dubinin V.N., Kirillova D.A. Some applications of extremal decompositions in the geometric function theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 130–152.

ABSTRACT

The applications of the extremal decompositions of the domains and condensers in the geometric function theory are considered. We prove new theorems for the families of meromorphic functions without common values, the multipoint distortion theorems and the estimates of the coefficients for univalent functions. Also, we get some new inequalities for polynomials. All results are obtained by the unified method using the suitable properties of the extremal decompositions. Previously, these properties were established by capacity approach and symmetrization.
Key words: *meromorphic functions, Schwarzian derivative, distortion theorems, estimates of the coefficients, polynomials, extremal decompositions, condenser capacity.*