ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 2. С. 153–161

УДК 519.872
MSC2000 60K25

© Т.А. Калмыкова, Ю.Н. Харченко, Г.Ш. Цициашвили*

Теоремы непрерывности и алгоритмические задачи в классической модели риска

В работе доказывается аналог теоремы Бернштейна об аппроксимации вероятностного распределения смесью экспонент в метрике L_1. Строятся различные обобщения классической модели риска на случай случайных финансовых рисков, зависящих от страховых рисков, и исследуется возможность распараллеливания процедуры вычисления вероятности разорения.

Ключевые слова: *классическая модель риска, вероятность разорения, смеси показательных распределений.*

1. Введение

В работе [1] для вычисления вероятности разорения на конечном отрезке времени в классической модели риска построена следующая аппроксимация. Распределение страховых ущербов приближено смесью экспоненциальных распределений, а вероятность разорения представлена конечной суммой экспонент с неизвестными коэффициентами. Для нахождения коэффициентов этого представления построены рекуррентные соотношения, позволяющие рассчитать вероятности разорения в модели риска с экспоненциальным и паретовским распределениями ущербов.

Однако точность предложенной аппроксимации оценивается в равномерной метрике, в которой оценка погрешности растет линейно с ростом числа шагов n. Аналогичная оценка в метрике L_1 свободна от n, однако отсутствует теорема аппроксимации распределения страхового ущерба смесью показательных распределений. В настоящей работе такая теорема аппроксимации доказывается.

Существенным ограничением в классической модели риска является предположение о детерминированности инфляционного фактора. В настоящей статье аппроксимация работы [1] распространяется на такие модели риска, в которых финансовый и страховой риски являются зависимыми случайными величинами. Исследуются возможности распараллеливания при вычислении вероятности разорения.

2. Дискретная модель риска и ее свойства

Рассмотрим дискретную модель страховой компании (с шагом в 1 год) с начальным капиталом $x,\ x \geq 0$, и неотрицательными ущербами

$$Z_n,\ n = 1, 2...,\ P(Z_n < t) = F(t).$$

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: natim@imcs.dvgu.ru, har@iam.dvo.ru, guram@iam.dvo.ru

Предположим, что поступление средств в компанию $A_n,\ n = 1, 2, \dots$, определяется к концу n-го года как разность между единичной суммой премии и ущербом $A_n = 1 - Z_n$, а $R_n > 1$ – инфляционный фактор при переходе с момента $n-1$ к моменту n, $n = 1, 2, \dots$ В терминологии [2] величина $X_n = -A_n$ называется страховым риском, а величина R_n^{-1} – финансовым риском, причем выполняется условие

(A) $(X_n, Y_n),\ n \geq 1,$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных (п.н.о.р.с.) векторов с независимыми компонентами.

Сумма средств S_n, накопленных страховой компанией к концу n-го года, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_0 = x, \quad S_n = R_n S_{n-1} + A_n, \qquad n = 1, 2, \dots\ . \tag{1}$$

Время разорения в рассматриваемой модели с начальным капиталом x определяется по формуле

$$\tau(x) = \inf\left\{n = 1, 2, \dots : S_n \leq 0 |\, S_0 = x\right\},$$

а вероятность разорения за конечное время $\psi(x, n)$ – по формуле

$$\psi(x, n) = P\left(\tau(x) \leq n\right).$$

Определим марковскую цепочку

$$V_0 = 0, \quad V_n = R_n^{-1} \max\left\{0,\ X_n + V_{n-1}\right\}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Случайные величины U_n и V_n совпадают по распределению*

$$U_n \stackrel{d}{=} V_n,\ n = 0, 1, ... \tag{3}$$

Выполняется равенство

$$\psi(x, n) = P(V_n \geq x). \tag{4}$$

Определим функцию $E(t)$ равенствами $E(t) = 1,\ t < 0,\ E(t) = 0,\ t \geq 0$, и положим формально, что функция $\exp(-t)$, определяемая при $t \geq 0$ обычным способом, удовлетворяет равенству $\exp(-t) = 1$ при $t < 0$. На основе теоремы 1 получены рекуррентные соотношения для вычисления вероятности разорения в случае, когда функция распределения (ф.р.) $F(t)$ является вероятностной смесью показательных распределений.

Теорема 2. *Предположим, что при* $0 < p_r, \lambda_r < \infty,\ r = \overline{1, l},\ p_1 + ... + p_l = 1,$

$$\overline{F}(t) = \sum_{r=1}^{l} p_r \exp(-\lambda_r t) \tag{5}$$

и случайные величины $R_n,\ n \geq 1$, тождественно совпадают с числом $R > 1$, причем при любых $i,\ j,\ k,\ 1 \leq i \neq j \leq l,\ 0 \leq k$, положительные числа $\lambda_i,\ R^k \lambda_j$ различны. Тогда для $n \geq 1$ существуют вещественные числа $A_n^{(0)},\ A_n^{(k,r)},\ 0 \leq k \leq n,\ 1 \leq r \leq l$, удовлетворяющие равенствам

$$\psi(t, n) = A_n^{(0)} E(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} A_n^{(k,r)} \exp(-R^k \lambda_r t) \tag{6}$$

и рекуррентным соотношениям

$$A_1^{(0)} = 1 - \sum_{r=1}^{l} p_r \exp(-\lambda_r),\ A_1^{(1,r)} = p_r \exp(-\lambda_r),\ 1 \leq r \leq l,$$

$$A_{n+1}^{(0)} = 1 - A_n^{(0)} \sum_{r=1}^{l} p_r \exp(-\lambda_r) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} A_n^{(k,r)} p_j \frac{R^k \lambda_r \exp(-\lambda_j) - \lambda_j \exp(-R^k \lambda_r)}{R^k \lambda_r - \lambda_j}, \tag{7}$$

$$A_{n+1}^{(1,r)} = A_n^{(0)} p_r \exp(-\lambda_r) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} A_n^{(k,j)} p_r \frac{R^k \lambda_j \exp(-\lambda_r)}{R^k \lambda_j - \lambda_r}, \tag{8}$$

$$A_{n+1}^{(k+1,r)} = -A_n^{(k,r)} \sum_{j=1}^{l} p_j \lambda_j \frac{\exp(-R^k \lambda_r)}{R^k \lambda_r - \lambda_j},\ 1 \le k \le n,\ 1 \le r \le l. \tag{9}$$

Пусть $\psi(x,n),\ \psi^*(x,n)$ – вероятности разорения в модели (2) с ф.р. страховых ущербов $F(x),\ F^*(x)$, где символом "*" характеризуется возмущенная цепь Маркова V_n^* :

$$V_0^* = 0, \quad V_n^* = R^{-1} \max\left\{0,\ X_n^* + V_{n-1}^*\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

в которой $X_n^* = Z_n^* - 1,\ P(Z_n^* < x) = F^*(x)$. Тогда, пользуясь равномерной метрикой $\rho(F^*, F) = \sup\limits_{0 \le x} |F^*(x) - F(x)|$, результатами, характеризующими непрерывность систем массового обслуживания [4, теорема 1] и теоремой 1, нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *При фиксированном $n \ge 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{0 \le x} |\psi(x,n) - \psi^*(x,n)| \le n\rho(F, F^*),\ n > 0. \tag{11}$$

Скажем, что плотность распределения $f(t)$, сосредоточенного на $[0, \infty]$, является полностью монотонной, если у нее существуют производные всех порядков и $(-1)^k f^{(k)}(t) \ge 0$ для всех $t > 0$ и $k \ge 1$. Примером такого распределения является распределение Парето, удовлетворяющее равенству $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = (1 + bx)^{-\alpha},\ x > 0$. Из теоремы Бернштейна [5, теоремы 3.1, 3.2] следует, что для ф.р. F с полностью монотонной плотностью существует последовательность функций распределения, представимых в виде сумм экспонент

$$F_s(x) = \sum_{i=1}^{l_s} p_{si}(1 - \exp(-\lambda_{si} x)),\ x \ge 0,\ s > 0,$$

где $0 < \lambda_{si},\ p_{si} < \infty$ и $p_{s1} + \ldots + p_{sl_s} = 1$, причем $\rho(F, F_s) \to 0,\ s \to \infty$.

3. Теоремы непрерывности в метрике L_1

Методом математической индукции из соотношений (2), (10) нетрудно получить неравенство

$$E|V_n - V_n^*| \le \frac{\delta}{R - 1},\ n > 0. \tag{12}$$

Определим расстояние $L_1(\Phi, \Psi)$ между функциями распределения Φ, Ψ равенством

$$L_1(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t) - G(t)| dt. \tag{13}$$

Тогда метрика L_1 является минимальной среди метрик вида $E|U-U^*|$ в предположении, что случайные величины U, U^* имеют распределения Φ, Ψ, соответственно [4]. Поэтому из неравенств (2) следует соотношение

$$L_1(\psi(x,n), \psi^*(x,n)) \le \frac{L_1(F,F^*)}{R-1},\ n>0. \tag{14}$$

Сравнение неравенств (11), (14) показывает, что в метрике L_1 оценка погрешности при замене случайной величины V_n на V_n^* не зависит от n, что делает ее более привлекательной по сравнению с равномерной метрикой. Однако известна теорема Бернштейна об аппроксимации функции распределения с абсолютно монотонной плотностью смесью показательных распределений в равномерной метрике, а в метрике L_1 аналогичного утверждения нет. Поэтому закономерно поставить вопрос о формулировке и доказательстве подобной теоремы. Положительный ответ на этот вопрос дается следующим утверждением.

Предположим, что ф.р. $F(t)$ распределена на $[0,\infty)$, имеет среднее

$$M=\int_0^\infty \overline{F}(t)dt<\infty, \qquad \overline{F}(t)=1-F(t) \tag{15}$$

и положительную непрерывную плотность $f(t)$, следовательно для любого $T>0$

$$\inf_{0\le t\le T} f(t)=\frac{1}{A(T)}>0. \tag{16}$$

Теорема 4. *Если ф.р. F удовлетворяет условиям (15), (16), то для любого $\varepsilon>0$ существует ф.р. $L_n(t)$, сосредоточенная на полуоси $[0,\infty)$ и удовлетворяющая условию*

$$\overline{F}(t)=\sum_{i=1}^{r} a_i\exp(-b_i t),\ t>0;\ -\infty<a_i<\infty,\ b_i>0, \tag{17}$$

причем $L_1(F,L_n)<4\varepsilon$.

Доказательство данного утверждения основано на результатах работ [6, 7].

Лемма 1. *Если ф.р. F удовлетворяет условиям (15), (16), то для любого $\varepsilon>0$ существует дискретная ф.р. G_n с конечным числом n положительных атомов, причем $L_1(F,G_n)<2\varepsilon$.*

Доказательство. Зафиксируем положительное ε и, используя условие (15), определим T_ε так, чтобы

$$\int_{T_\varepsilon}^\infty \overline{F}(t)dt<\varepsilon. \tag{18}$$

По условию (16) найдем натуральное число n такое, что

$$\frac{A(T_\varepsilon)}{n}<\varepsilon, \tag{19}$$

и положим $\delta=\overline{F}(T_\varepsilon)$. Определим $t_i,\ 1\le i\le n$, из равенств

$$F(t_i)=\frac{i(1-\delta)}{n},\ 1\le i<n,\ F(t_n)=F(T_\varepsilon)=1-\delta.$$

Предположим, что дискретная ф.р. G_n удовлетворяет равенствам

$$G_n(t)=0,\ 0\le t<t_1,\ G_n(t)=F(t_2),\ t_1\le t<t_2,\ G_n(t)=F(t_3),\ t_2\le t<t_3,\dots,$$

$$G_n(t)=F(t_n),\ t_{n-1}\le t<T_\varepsilon,\ G_n(t)=1,\ T_\varepsilon\le t<\infty. \tag{20}$$

Используя формулы (13), (18), (20), легко получить неравенство $L_1(F,G_n)<2\varepsilon$.

Замечание 1. *Нетрудно установить, что ф.р. G_n является вероятностной смесью точечных распределений*

$$G_n(t) = \frac{1-\delta}{n}\left[2\mathbf{1}(t-t_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\mathbf{1}(t-t_i)\right] + \delta\mathbf{1}(t-T_\varepsilon),$$

где $\mathbf{1}(t-a)$ – ф.р., сосредоточенная в точке a.

Лемма 2. *Для любых $\varepsilon > 0$, $k > 0$ существует эрланговское распределение $H(t)$, удовлетворяющее неравенству $L_1(\mathbf{1}(t-k), H(t)) < \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $Erl(m,\lambda)$ эрланговское распределение с плотностью

$$\frac{\lambda^m t^{m-1}\exp(-\lambda t)}{(m-1)!},\ t > 0,$$

которая описывает сумму m независимых с.в. с показательной плотностью $\lambda\exp(-\lambda t)$, $t > 0$. Тогда $Erl(m,k)$ имеет среднее m/k и дисперсию m/k^2. Чтобы аппроксимировать распределение, сосредоточенное в точке $k > 0$ эрланговским распределением, возьмем $Erl(m, m/k)$ и устремим m к бесконечности. Таким образом можно выбрать m_ε так, чтобы дисперсия ф.р. $H = Erl(m, m/k)$ не превосходила ε^2 и, следовательно, $L_1(\mathbf{1}(t-k), H(t)) \le \varepsilon$.

Следствие 1. *Предположим, что эрланговские ф.р. $H_1(t), \ldots, H_n(t)$ выбраны в соответствии с леммой 2 так, чтобы*

$$L_1(\mathbf{1}(t-t_1), H_1(t)) < \varepsilon, \ldots, L_1(\mathbf{1}(t-t_n), H_n(t)) < \varepsilon,$$

тогда $L_1(G_n, Q_n) < \varepsilon$, где

$$Q_n(t) = \frac{1-\delta}{n}\left[2H_1(t) + \sum_{i=2}^{n-1}H_i(t)\right] + \delta H_n(t).$$

Лемма 3. *Если случайные величины ξ, η независимы и $P(\xi > t) = \exp(-\mu t)$, $P(\eta > t) = \exp(-\lambda t))$, $0 < \lambda, \mu$, $\lambda \ne \mu$, тогда*

$$P(\xi + \eta > t) = \frac{\mu\exp(-\lambda t) - \lambda\exp(-\mu t)}{\mu - \lambda}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим

$$P(\xi + \eta > t) = \int_0^t \exp(-\mu(t-u))\lambda\exp(-\lambda u)du + \int_t^\infty \lambda\exp(-\lambda u)du =$$

$$= \frac{\exp(-\lambda t) - \exp(-\mu t)}{\mu/\lambda - 1} + \exp(-\lambda t) = \frac{\mu/\lambda\exp(-\lambda t) - \exp(-\mu t)}{\mu/\lambda - 1}.$$

Лемма 4. *Если ф.р. H совпадает с $Erl(m,\lambda)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ф.р. S, сосредоточенную на полуоси $[0,\infty)$ и такую, что $\overline{S}$ удовлетворяет условию вида (17), причем $L_1(H,S) < \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_m$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Тогда случайная сумма $\sum\limits_{i=1}^m \eta_i$ имеет ф.р. H. Выберем теперь независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_m$ с показательными распределениями, имеющими параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^m \left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_i}\right| < \varepsilon,\ \lambda_i \ne \lambda_j,\ 1 \le i \ne j \le m,$$

и независимые случайные величины $\omega_n,\ n \geq 1$, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ так, чтобы

$$\eta_i = -\frac{\ln \omega_i}{\lambda},\ \xi_i = -\frac{\ln \omega_i}{\lambda_i},\ 1 \leq i \leq m.$$

Обозначим $S(t) = P\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i < t\right)$. Справедливо неравенство

$$E\left|\sum_{i=1}^{m} \eta_i - \sum_{i=1}^{m} \xi_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m} E|\eta_i - \xi_i| \leq \varepsilon.$$

Если заменить в последнем неравенстве метрику $E|X-Y|$ соответствующей ей минимальной метрикой, то в результате возникает неравенство $L_1(H,S) < \varepsilon$. Используя лемму 3, нетрудно представить ф.р. $S(t)$ в виде (17).

Следствие 2. *Предположим, что ф.р. $S_1(t), \ldots, S_n(t)$ выбраны в соответствии с леммой 3 так, чтобы*

$$L_1(H_1, S_1) < \varepsilon, \ldots, L_1(H_n, S_n) < \varepsilon,$$

тогда $L_1(Q_n, L_n) < \varepsilon$, где

$$L_n(t) = \frac{1-\delta}{n}\left[2S_1(t) + \sum_{i=2}^{n-1} S_i(t)\right] + \delta S_n(t)$$

и ф.р. $L_n(t)$ удовлетворяет условию (17).

Утверждение теоремы 1 является следствием лемм 1–4 и замечания 1.

Лемма 5. *Предположим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ – различные положительные числа и $R = m/n$, где m, n – натуральные и взаимно простые числа. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные числа $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_l$ такие, что*

$$|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| < \varepsilon,\ \tilde{\lambda}_i \neq R^k \tilde{\lambda}_j,\ 1 \leq i \neq j \leq l,\ k \geq 0. \tag{21}$$

4. Вычисление вероятности разорения при случайном финансовом риске

Теорема 5. *Предположим, что $\overline{F}^*(t) = \exp(-\lambda t)$ и финансовые риски $R_n,,\ n \geq 1$, являются н.о.р.с.в. с двухточечным распределением*

$$P(R_n = R_+) = p_+,\ P(R_n = R_-) = p_-,\ p_+ + p_- = 1,\ R_+ > 1,\ R_- > 1.$$

Тогда для $n \geq 1$ существуют вещественные числа $B_n^{(0)},\ B_n^{(k,s)},\ 1 \leq k \leq n,\ 0 \leq s \leq k$, удовлетворяющие равенствам

$$\psi^*(t,n) = B_n^{(0)} E(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} B_n^{(k,s)} \exp(-R_+^s R_-^{k-s} \lambda t) \tag{22}$$

и рекуррентным формулам

$$B_1^{(0)} = 1 - e^{-\lambda},\ B_1^{(1,0)} = p_- e^{-\lambda},\ B_1^{(1,1)} = p_+ e^{-\lambda},$$

$$B_{n+1}^{(0)} = 1 - B_n^{(0)}\exp(-\lambda) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k} B_n^{(k,s)} \frac{R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda) - \exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1}, \tag{23}$$

$$B_{n+1}^{(1,0)} = p_-\left(B_n^{(0)}\exp(-\lambda) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{B_n^{(k,s)} R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1}\right),$$

$$B_{n+1}^{(1,1)} = p_+\left(B_n^{(0)}\exp(-\lambda) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{B_n^{(k,s)} R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1}\right), \tag{24}$$

$$B_{n+1}^{(k+1,s)} = -I(s<k+1)p_-\frac{B_n^{(k,s)}\exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1} -$$

$$-I(s>0)p_+\frac{B_n^{(k,s-1)}\exp(-R_+^{s-1}R_-^{k-s+1}\lambda)}{R_+^{s-1}R_-^{k-s+1} - 1},\ 1\le k\le n,\ 0\le s\le k+1. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$\psi^*(t,1) = (1-e^{-\lambda})E(t) + p_+e^{-\lambda}\exp(-R_+\lambda_r t) + p_-e^{-\lambda}\exp(-R_-\lambda t)$$

и, следовательно, $B_1^{(0)} = 1 - e^{-\lambda}$, $B_1^{(1,0)} = p_-e^{-\lambda}$, $B_1^{(1,1)} = p_+e^{-\lambda}$. Докажем индукцией по по i, что $\psi^*(t,i)$ удовлетворяет формуле (22) при некоторых вещественных числах B_i^0, $B_i^{(k,s)}$, $1\le k\le i$, $0\le s\le k$. Предположим, что это утверждение выполняется при $i=n$ и проверим его при $i=n+1$. Действительно,

$$P(V_n^* + Z_{n+1}^* > t) = B_n^{(0)}\exp(-\lambda t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k} B_n^{(k,s)}\frac{R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda t) - \exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda t)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1},$$

и значит,

$$P((V_n^* + Z_n^* - 1)^+ > t) = B_{n+1}^{(0)}E(t) + B_n^{(0)}\exp(-\lambda)\exp(-\lambda t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k} B_n^{(k,s)}\frac{R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda)\exp(-\lambda t) - \exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda)\exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda t)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1},$$

где $B_{n+1}^{(0)}$ удовлетворяет рекуррентной формуле (23), следовательно,

$$\psi^*(t,n+1) = B_{n+1}^{(0)}E(t) + B_n^{(0)}\exp(-\lambda)(p_+\exp(-R_+\lambda t) + p_-\exp(-R_-\lambda t)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{B_n^{(k,s)}R_+^s R_-^{k-s}\exp(-\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1}(p_+\exp(-R_+\lambda t) + p_-\exp(-R_-\lambda t)) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{B_n^{(k,s)}\exp(-R_+^s R_-^{k-s}\lambda)}{R_+^s R_-^{k-s} - 1}(p_+\exp(-R_+^{s+1}R_-^{k-s}\lambda t) + p_-\exp(-R_+^s R_-^{k-s+1}\lambda t))$$

и $B_{n+1}^{(1,s)}$, $s=0,1$ удовлетворяют рекуррентным формулам (24), а $B_{n+1}^{(k+1,s)}$ – рекуррентным формулам (25), $0\le s\le k+1$, $1\le k\le n$.

Следствие 3. *Предположим, что* $\overline{F}^*(t) = \sum_{r=1}^{l} p_r \exp(-\lambda_r t)$ *и н.о.р.с.в.* $R_n,\ n \geq 1$, *имеют двухточечное распределение*

$$P(R = R_+) = p_+,\ P(R = R_-) = p_-,\ p_+ + p_- = 1,\ R_+ > 1,\ R_- > 1.$$

Тогда при $n \geq 1$ *существуют вещественные числа* $B_n^{(0)},\ B_n^{(k,s,r)},\ r \leq l$, *которые удовлетворяют равенствам*

$$\psi^*(t, n) = B_n^{(0)} E(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{r=1}^{l} B_n^{(k,s,r)} \exp(-R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r t)$$

и рекуррентным формулам

$$B_1^{(0)} = 1 - \sum_{r=1}^{l} p_r e^{-\lambda_r},\ B_1^{(1,0,r)} = p_- p_r e^{-\lambda_r},\ B_1^{(1,1,r)} = p_+ p_r e^{-\lambda_r},\ 0 \leq r \leq l,$$

$$B_{n+1}^{(0)} = 1 - B_n^{(0)} \sum_{r=1}^{l} p_r \exp(-\lambda_r) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{r=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} p_i B_n^{(k,s,r)} \frac{R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r \exp(-\lambda_i) - \lambda_i \exp(-R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r)}{R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r - \lambda_i},$$

$$B_{n+1}^{(1,0,r)} = p_- p_r \exp(-\lambda_r) \left(B_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_n^{(k,s,i)} R_+^s R_-^{k-s} \lambda_i}{R_+^s R_-^{k-s} \lambda_i - \lambda_r} \right),\ 1 \leq r \leq l,$$

$$B_{n+1}^{(1,1,r)} = p_+ p_r \exp(-\lambda_r) \left(B_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{i=1}^{l} \frac{B_n^{(k,s,i)} R_+^s R_-^{k-s} \lambda_i}{R_+^s R_-^{k-s} \lambda_i - \lambda_r} \right),\ 1 \leq r \leq l,$$

$$B_{n+1}^{(k+1,s,r)} = -I(s < k+1) p_- \sum_{i=1}^{l} \frac{B_n^{(k,s,r)} \lambda_i p_i \exp(-R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r)}{R_+^s R_-^{k-s} \lambda_r - \lambda_i} -$$

$$-I(s > 0) p_+ \sum_{i=1}^{l} \frac{B_n^{(k,s-1,r)} \lambda_i p_i \exp(-R_+^{s-1} R_-^{k-s+1} \lambda_r)}{R_+^{s-1} R_-^{k-s+1} \lambda_r - \lambda_i},\ 1 \leq k \leq n,\ 0 \leq s \leq k+1.$$

Замечание 2. *В условиях теоремы 2 число коэффициентов в разложении функции* $\psi^*(t, n)$ *имеет порядок* n, *в условиях теоремы 5 – порядок* n^2. *Если случайные величины* R_n *имеют* m*-точечное распределение,* $m > 2$, *то нетрудно показать, что число коэффициентов имеет порядок* n^m. *Поэтому возникает вопрос о резонности такого выбора вероятностной модели, когда случайные величины* R_n *независимы. Альтернативой рассмотренной в теореме 5 вероятностной модели может служить модель, в которой, например, с вероятностью* p_+ *выполняются равенства* $R_1 = R_2 = \ldots = R_+,\ P(Z_n < t) = F^+(t)$, *и с вероятностью* p_- *выполняются равенства* $R_1 = R_2 = \ldots = R_-,\ P(Z_n < t) = F^-(t)$.

Данную модель нетрудно распространить на случай, когда случайные величины R_n *и ф.р.* $F(t)$ *принимают* m *значений. Причем вероятность разорения* $\psi^*(t, n)$ *можно определять с помощью параллельных вычислений, в каждом из которых число коэффициентов на шаге* n *имеет порядок* n.

Список литературы

[1] Г. Ш. Цициашвили, “Вычисление вероятности разорения в классической модели риска”, *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 12, 187–194.

[2] R. Norberg, “Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type”, *Stochastic Process. Appl.*, **81**:2, (1999), 255–269.

[3] Q. Tang, G. Tsitsiashvili, “Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks”, *Stochast. Process. Appl.*, **108**:2, (2003), 299–325.

[4] В. М. Золотарев, “Стохастическая непрерывность систем массового обслуживания”, *Теория вероятностей и ее применения*, **21**:2, (1976), 260–279.

[5] A. Feldmann, W. Whitt, “Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network perfomance models”, *Perfomance Evaluation*, **31**, (1998), 245–279.

[6] D. Dufresne, “Stochastic life annuities abstract”, *American Actuarial Journal*, **11**:1, (2007), 136–157.

[7] B. Ko, A. C. Y. Ng, “Stochastic Annuities”, Daniel Dufresne, Discussions of papers already published, *American Actuarial Journal*, **11**:3, (2007), 170–171.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 мая 2010 г.

Kalmikova T.A., Kharchenko Yu.N., Tsitsiashvili G.Sh. Continuity theorems and algorithmical problems in classical risk model. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 153–161.

ABSTRACT

In this paper an analog of the Bernstein theorem about an approximation of a probability distribution by a mixture of exponential distribution is proved in the metric L_1. Different generalizations of classical risk model on a case of dependent financial and insurance risks are constructed. In this case a possibility of a paralleling of algorithms of ruin probability calculation is analyzed.

Key words: *classical risk model, ruin probability, mixtures of exponential distributions.*