ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 2. С. 162–169

УДК 517.956
MSC2000 35P20

© Л.В. Марченко*

Асимптотическое распределение собственных значений краевой задачи для шаровой области

В статье получена асимптотическая формула с двумя регулярными членами для числа собственных значений краевой задачи $\Delta U + \lambda U = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ в случае, когда пространственной односвязной областью является шар.

Ключевые слова: *собственные значения, функция распределения.*

1. Введение

В данной работе рассматривается распределение собственных значений краевой задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial D} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_{\partial D} = 0 \tag{1.2}$$

для случая, когда D – трехмерный шар с границей ∂D.

Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ – собственные значения задачи (1.1)–(1.2), занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности.

Обозначим $N(\lambda)$ – число собственных значений, не превосходящих λ, и найдем асимптотику $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Р. Курант и Д. Гильберт ([1]), рассматривая закон асимптотического распределения собственных значений задачи (1.1)–(1.2), доказали, что для пространственной односвязной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ при неограниченном возрастании λ функция распределения собственных значений $N(\lambda)$ имеет вид

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{mes}(\Omega)}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + O\left(\lambda \ln \lambda\right). \tag{1.3}$$

В частности, для шара

$$N(\lambda) = \frac{2R^3}{9\pi}\lambda^{3/2} + O\left(\lambda \ln \lambda\right). \tag{1.4}$$

В асимптотической формуле можно рассчитывать на существование второго регулярного члена. Для двумерных, а также трехмерных цилиндрических областей в случае разделяющихся переменных такие оценки получены в [2], [3], [4].

Для двумерного случая

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{mes}(\Omega)}{4\pi}\lambda \pm \frac{\mathrm{mes}(\partial\Omega)}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O\left(\lambda^{1/3}\right),$$

[1]Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47. Электронная почта: march66@inbox.ru

для трехмерной цилиндрической области

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{mes}(\Omega)}{6\pi^2}\lambda^{3/2} \pm \frac{\mathrm{mes}(\partial\Omega)}{16\pi}\lambda + O\left(\lambda^{5/6}\right).$$

В данной работе показано наличие аналогичной формулы в случае, когда трехмерной областью является шар $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$. Результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots$ *– собственные значения краевой задачи* $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_{\partial D} = 0$*, где* D *– трехмерный шар с границей* ∂D*,* $N(\lambda)$ *– число собственных значений, не превосходящих* λ*. Тогда при* $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) = \frac{V}{6\pi^2}\lambda^{3/2} \pm \frac{S}{16\pi}\lambda + O\left(\lambda^{5/6}\right),$$

где V *– объем шара,* S *– площадь полной поверхности шара. Знак «плюс» соответствует краевому условию при* $|\sigma| < \infty$*, а знак «минус» – краевому условию при* $\sigma = \infty$*.*

2. Уравнение для собственных значений

Задачу (1.1)–(1.2) рассмотрим в сферических координатах r, ϕ, θ: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $0 < r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$,$0 \leq \theta \leq \pi$.

Уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right) + \lambda u = 0. \tag{2.1}$$

Решение (2.1) будем искать в виде $u = \Phi(r)\Psi(\phi,\theta)$, тогда получим

$$\frac{\left(r^2\Phi'_r\right)'_r + \lambda r^2\Phi}{\Phi} = -\frac{1}{\Psi\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\Psi'_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sin\theta\right)\right) = k. \tag{2.2}$$

Постоянная k в (2.2) выбирается так, чтобы дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\Psi'_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sin\theta\right)\right) + k\Psi = 0 \tag{2.3}$$

имело решение, непрерывное на всей поверхности шара, т.е. периодическое с периодом 2π относительно ϕ и остающееся регулярным при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Такому требованию удовлетворяют лишь для значений $k = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2...$, шаровые (сферические) функции Лапласа $\Psi_n(\theta,\phi)$ ([1]). Существуют ровно $(2n+1)$ независимых шаровых функций порядка n. Этими функциями $\Psi_n(\theta,\phi)$ исчерпываются все фундаментальные функции, а числами вида $k = n(n+1)$ – все собственные значения задачи (2.3).

Для функции $\Phi(r)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\left(r^2\Phi'_r\right)'_r + \lambda r^2\Phi - n(n+1)\Phi = 0, \tag{2.4}$$

для которого решениями, конечными в нуле, являются функции Бесселя полуцелого порядка

$$\frac{J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.5}$$

Параметр λ определяется из краевых условий. Так, для краевого условия $u|_{\partial D} = 0$ – из уравнения

$$J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}R\right) = 0. \tag{2.6}$$

Обозначая корни этого уравнения $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots$, получим решение краевой задачи

$$u = \Psi_n(\phi, \theta) J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{n,l}}r\right) r^{-1/2}, \qquad l = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.7}$$

Поскольку существуют ровно $(2n+1)$ линейно независимых шаровых функций порядка n, то каждое собственное значение $\lambda_{n,l}$ имеет кратность $(2n+1)$.

Краевое условие $u|_{\partial D} = 0$ можно считать частным случаем условия $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_{\partial D} = 0$ при $\sigma = \infty$, что позволяет рассматривать только общее краевое условие при различных σ.

Согласно соотношению (2.6), собственные значения $\lambda_{n,l}$ определяются нулями функции Бесселя. Для $n = 0, 1, ...$ функция Бесселя $J_{n+1/2}(x)$ имеет лишь вещественные нули. Если порядок функции мал по сравнению с аргументом, то положительные нули близки к величинам $x_m = m\pi + \frac{\pi n}{2}$ с целыми m, что следует из асимптотического разложения функции Бесселя $J_\nu(x)$ при $x \to \infty$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-3/2}\right). \tag{2.8}$$

Для целей данной работы требуется асимптотическая формула в случае, когда порядок функции Бесселя $J_\nu(\nu x)$ велик. Соответствующие асимптотические разложения в настоящее время хорошо известны ([5], [6]) и вошли в справочники ([7], с. 189). Когда $\nu \to \infty$, эти разложения равномерны по x, $0 < x < \infty$. Они получаются путем преобразования уравнения Бесселя к уравнению вида

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \mu^2 \xi y = \phi(\xi) y, \tag{2.9}$$

решением которого при $\phi \equiv 0$ является функция Эйри. Оценка близости решений (2.9) и уравнения с $\phi \equiv 0$ приводит к уравнению для собственных значений, подробный вывод которого дан в работе [3]. Там же сформулирована и следующая лемма.

Лемма. *Пусть в уравнении*

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \mu^2 p(\xi, \alpha) y = \phi(\xi) y, \qquad 0 < \xi \le b, \tag{2.10}$$

для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *функция* $p(\xi, \alpha)$; *при* $\xi \to 0$, $p(\xi, \alpha) = -\frac{\alpha^2}{\xi^2} + O(1)$, $\phi(\xi) = \frac{-1}{4\xi^2}$, *причем* $p \ge 0$ *для* $\xi \ge \xi_0$. *Тогда уравнение имеет конечное при* $\xi \to 0$ *решение* $y(\xi)$, *удовлетворяющее краевым условиям* $y'(b) + \sigma(b) = 0$ *и содержащее* $m-1$ *нулей внутри интервала* $(0, b)$, *если*

$$m = \frac{\mu}{\pi} \int_{\xi_0}^{b} \sqrt{p(t, \alpha)} dt + \gamma(\sigma) + O\left(\frac{1}{\mu(x(b))^{3/2}}\right), \tag{2.11}$$

где

$$\frac{2}{3} (x(b))^{3/2} = \int_{\xi_0}^{b} \sqrt{p(t, \alpha)} dt, \tag{2.12}$$

$$\gamma(\sigma) = 3/4, |\sigma| < \infty; \tag{2.12'}$$

$$\gamma(\sigma) = 1/4, \sigma = \infty. \tag{2.12''}$$

Полагая в (2.4) $f(\sqrt{\lambda}r) = \sqrt{\lambda}r\Phi(r)$, получим краевую задачу

$$f''_{rr} + \lambda\left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) f = -\frac{1}{4r^2} f, \qquad 0 \le r \le R, \tag{2.13}$$

$$f'(R) + \sigma f(R) = 0, \tag{2.14}$$

соответствующую лемме (здесь $\alpha^2 = \frac{1}{\lambda}\left(n + 1/2\right)^2$).

Запишем уравнение для собственных значений

$$m = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\int_\alpha^R \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{t^2}}dt + \gamma(\sigma) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}\int_\alpha^R \sqrt{1-\alpha^2 t^{-2}}dt}\right), \tag{2.15}$$

где $\gamma(\sigma)$ определяется соотношениями ($2.12'$) и ($2.12''$). Параметр α, согласно условию (2.14), принимает значения $\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \leq \alpha < R$.

3. Подсчет числа собственных значений

В уравнении(2.15), для компактности записи, обозначим

$$E(\alpha) = \int_\alpha^R \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{t^2}}dt$$

и запишем соотношение для собственных значений

$$m = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E(\alpha) + \gamma(\sigma) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}E}\right). \tag{3.1}$$

Если порядок функции Бесселя достаточно мал по сравнению с аргументом, т.е. когда $\frac{n}{\sqrt{\lambda_{n,l}}} = O(1)$, то уравнение (2.15) примет вид

$$m = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}R - \frac{1}{2}(n + 1/2) + \gamma(\sigma) + O\left(\frac{(n+1/2)^2}{\lambda}\right), \tag{3.2}$$

что согласуется с асимптотикой большого аргумента.

Выражение (2.15) означает, что $\lambda_{n,l}$ определяются целочисленными значениями правой части равенства. Пусть $L_n(\lambda)$ – число тех $\lambda_{n,l}$, которые не превышают λ при данном n. Тогда

$$L_n(\lambda) = \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E(\alpha) + \gamma(\sigma) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}E}\right)\right], \tag{3.3}$$

где [...] означает целую часть. Пусть остаточный член в (3.3) заключен в пределах

$$\left(-\frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}, \frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\right),$$

где C – некоторая константа. Тогда

$$L_n^{(-)}(\lambda) \leq L_n(\lambda) \leq L_n^{(+)}(\lambda), \tag{3.4}$$

где

$$L_n^{(-)}(\lambda) = \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E(\alpha) + \gamma(\sigma) - \frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\right], \tag{3.5}$$

$$L_n^{(+)}(\lambda) = \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E(\alpha) + \gamma(\sigma) + \frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\right]. \tag{3.5$'$}$$

Поскольку каждое собственное значение $\lambda_{n,l}$ имеет кратность $(2n+1)$, то для оценки влияния остаточного члена нужно сосчитать суммы

$$\sum_{n\le R\sqrt{\lambda}}(2n+1)L_n^{(\pm)}.$$

Пусть

$$g(\alpha(n))=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E(\alpha)+\gamma(\sigma), \tag{3.6}$$

тогда для $L_n^{(+)}$ получим

$$L_n^{(+)}=g(\alpha(n))+\frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}-\{L_n^{(+)}\}, \tag{3.7}$$

где $\{...\}$ обозначает дробную долю. По смыслу асимптотических формул, в соотношении (3.7) $g(\alpha(n))\gg 1$. В этом можно убедиться и непосредственно. Известно, что для наименьшего положительного нуля x_ν функции Бесселя $J_\nu(x)$ справедлива оценка ([8]) $\left(x_\nu-\nu\gg\nu^{1/3}\right)$. Занумеруем собственные значения в порядке возрастания $\lambda_{n,1}\le\lambda_{n,2}\le\ldots$. Тогда первый нуль функции Бесселя $J_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}R\right)$ удовлетворяет условию

$$R\sqrt{\lambda_{n,1}}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\gg\lambda_{n,1}^{1/6}.$$

Так как $E(\alpha)\to\left(R^2-\alpha^2\right)^{3/2}$ для $\alpha\to R$, то

$$R^2\lambda-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(R\sqrt{\lambda}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\left(R\sqrt{\lambda}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\gg\lambda^{1/6}\lambda^{1/2}=\lambda^{2/3},$$

$$\sqrt{\lambda}E(\alpha)\gg\sqrt{\lambda}\left(\lambda^{-1/3}\right)^{3/2}\gg 1.$$

Положим $\left[R\sqrt{\lambda}\right]=N$ и $n=N-n_1$, тогда

$$E(\alpha)\gg\left(\frac{n_1}{\sqrt{\lambda}}\right)^{3/2}=\lambda^{-1/3}n_1^{3/2};$$

$$\sum_n\frac{1}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\ll\sum_{n_1\ge\lambda^{1/6}}\frac{1}{n_1^{3/2}}\ll\lambda^{-1/6}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n<R\sqrt{\lambda}}(2n+1)\frac{1}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\ll\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=\lambda^{1/3}. \tag{3.8}$$

Для удобства вычислений формулу (3.3) запишем в виде

$$L_n(\lambda)=\sum_{n\ge1}(2n+1)\left(g(\alpha(n))+\frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\sum_{n\ge1}(2n+1)\left(\{g(\alpha(n))+\frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\}-\frac{1}{2}\right)=T_1-T_2. \tag{3.9}$$

Сумма

$$\sum_{n\geq 1}(2n+1)\left(g(\alpha(n))-\frac{1}{2}\right)$$

вычисляется с помощью формулы Эйлера – Маклорена (формула Сонина) ([9], [10]).

Теорема 2 (Эйлер – Маклорен). *Пусть в промежутке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\phi(x) = \int_0^x \rho(z)dz$. Тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) -$$

$$-\phi(b)f'(b) + \phi(a)f'(a) + \int_a^b \phi(x)f''(x)dx. \tag{3.10}$$

Применение формулы (3.10) позволяет получить следующую оценку:

$$\sum_{1/2<n\leq R\sqrt{\lambda}-1/2} (2n+1)\left(g(\alpha(n))-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9\pi}\lambda^{3/2}R^3 \pm \frac{1}{4}R^2\lambda + O\left(\sqrt{\lambda}\right).$$

Таким образом, первая сумма в соотношении (3.9) может быть представлена как

$$T_1 = \sum_{1/2<n\leq R\sqrt{\lambda}-1/2} (2n+1)\left(g(\alpha(n)) + \frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2} \pm 4\pi R^2 \frac{\lambda}{16\pi} + O(\sqrt{\lambda}), \tag{3.11}$$

где знак «плюс» соответствует (согласно формуле (2.16)) случаю $|\sigma| < \infty$, а знак «минус» – случаю $\sigma = \infty$.

Теперь оценим вторую сумму формулы (3.9), а именно сумму дробных долей

$$T_2 = \sum_{1/2<n\leq R\sqrt{\lambda}-1/2} (2n+1)\left(\{g(\alpha(n)) + \frac{C}{\sqrt{\lambda}E(\alpha)}\} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{1/2<n\leq R\sqrt{\lambda}-1/2} (2n+1)\left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right), \tag{3.12}$$

представив ее в виде суммы двух слагаемых $T_2 = K_1 + K_2$, где

$$K_1 = \sum_{0\leq n\leq N_0} (2n+1)\left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right), \tag{3.13}$$

$$K_2 = \sum_{N_0\leq n\leq R\sqrt{\lambda}} (2n+1)\left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right). \tag{3.13$'$}$$

Значение N_0 выберем так, чтобы $R\sqrt{\lambda} - N_0 \asymp \lambda^{1/3}$. При этом условии сумма K_2 оценивается как

$$K_2 = \sum_{N_0\leq n\leq R\sqrt{\lambda}} (2n+1)\left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right) = O\left(\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{\lambda}R - N_0\right)\right) = O\left(\lambda^{5/6}\right). \tag{3.14}$$

Для оценки K_1 воспользуемся теоремой И. ван дер Корпута ([3]; [11] с. 628).

Теорема 3 (И. ван дер Корпут). *Пусть $\nu_0 - 1/2$, $\nu_1 - 1/2$, $v_0 - 1/2$ – целые, $\nu_0 < \nu_1$. Пусть на отрезке $\nu_0 \le \nu \le \nu_1$ функция $f(\nu)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям $f(\nu_0) > v_0$, $0 < \rho \le f'(\nu) \le \tau$, $|f''(\nu)| \ge 1/\mu$, где $\mu > 1$, $\mu > \rho^{-3}$. Пусть N – число целых точек в области $\nu_0 \le \nu \le \nu_1$, $v_0 \le v \le f(\nu)$ и I – площадь этой области. Тогда $N - I = O\left(\mu^{2/3}\tau\right)$.*

Представленная теорема оценивает число целых точек в плоской области и позволяет указать распределение дробных долей функции $f(\nu)$. Действительно, если $v_0 = 1/2$, то

$$N = \sum_{\nu_0 \le \nu \le \nu_1} [f(\nu)] = \sum_{\nu_0 \le \nu \le \nu_1} f(\nu) - \sum_{\nu_0 \le \nu \le \nu_1} \{f(\nu)\}. \tag{3.15}$$

По условиям Теоремы 3 $f''(\nu)$ не обращается в нуль и ограничена по модулю снизу, поэтому $f''(\nu)$ сохраняет знак во всем промежутке $\nu_0 \le \nu \le \nu_1$. Следовательно, последний интеграл в формуле (3.10) не превышает

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} |f''(\nu)| d\nu = \pm \int_{\nu_0}^{\nu_1} f''(\nu) d\nu = \pm f'(\nu)|_{\nu_0}^{\nu_1},$$

поскольку $\phi(x)$ ограничена.

Таким образом, в условиях теоремы

$$\sum_{\nu_0 \le \nu \le \nu_1} f(\nu) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} f(x) dx + O\left(\max\left(|f'(\nu_0)|,\ |f'(\nu_1)|\right)\right) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} f(x) dx + O(\tau).$$

Отсюда и из (3.15) получаем, что Теорема 3 дает оценку

$$\sum_{\nu_0 \le \nu \le \nu_1} \left(\{f(\nu)\} - \frac{1}{2}\right) = O\left(\mu^{2/3}\tau\right). \tag{3.16}$$

Сумму K_1 из формулы (3.13) представим как

$$K_1 = \sum_{0 \le n \le N_0} (2n+1) \left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right) = 2 \sum_{m=1}^{N} S_m + S_0, \tag{3.17}$$

где

$$S_m = \sum_{m \le n \le N_0} \left(\{f(\alpha(n))\} - \frac{1}{2}\right). \tag{3.18}$$

Величины S_m оценим с помощью Теоремы 3. Чтобы выполнялись все условия теоремы, а именно $0 < \rho \le f'(\nu) \le \tau$, вместо функции $f(\alpha(n))$ можно рассматривать функцию $F(\alpha(n)) = C - f(\alpha(n))$, где

$$C \ge \max_{0 < \alpha \le R} f(\alpha(n)),$$

что не повлияет на оценку дробных долей:

$$-f_n'(\alpha(n)) \le 1, \qquad |f_n''(\alpha(n))| \ge \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Таким образом, согласно (3.16) и (3.18), $S_m = O\left(\lambda^{1/3}\right)$, а вся сумма

$$K_1 = 2 \sum_{m=1}^{N} S_m + S_0 \ll \sqrt{\lambda} \cdot \lambda^{1/3}. \tag{3.19}$$

В соответствии с (3.14) и (3.19) сумма T_2 из (3.12) оценивается как

$$T_2 = O\left(\lambda^{5/6}\right). \tag{3.20}$$

Окончательно, согласно формулам (3.3), (3.8), (3.9), (3.11), (3.20), получаем результат, который был сформулирован в виде Теоремы 1, представленной в начале статьи.

Полученная асимптотика функции распределения собственных значений краевой задачи (1.1)–(1.2) в случае шара полностью повторяет формулу для цилиндрических областей из [4], то есть зависит от объема трехмерной области и площади полной поверхности.

Автор благодарит Н.В. Кузнецова за научное руководство и беспримерное терпение, проявленное им к автору при написании данной статьи.

Список литературы

[1] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, **1**, Государственное издательство технико-теоретической литературы, М.-Л., 1951, 476 с.

[2] Н. В. Кузнецов, “Асимптотическое распределение собственных частот плоской мембраны в случае разделяющихся переменных”, *Дифференциальные уравнения*, **2**:10, (1966).

[3] Н. В. Кузнецов, *Асимптотическое распределение собственных частот плоской мембраны в случае разделяющихся переменных*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, МФТИ, М., 1965, 119 с.

[4] Л. В. Марченко, “О собственных частотах некоторых трехмерных цилиндрических тел”, *Дифференциальные уравнения*, **44**:7, (2008), 1002–1004.

[5] Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, Наука, М., 1990, 528 с.

[6] А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1962, 128 с.

[7] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979, 832 с.

[8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974, 296 с.

[9] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Иностранная литература, М., 1953, 408 с.

[10] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Лань, СПб., 2004, 176 с.

[11] *Математическая энциклопедия*, **1**, ред. И. М. Виноградов, Советская энциклопедия, М., 1977.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 26 января 2010 г.

Marchenko L. V. The asymptotic distribution of eigenvalues of boundary problem for spherical domain. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 162–169.

ABSTRACT

Asymptotic formula with two regular members for the distribution function of eigenvalues of boundary problem $\Delta U + \lambda U = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ is obtained for spherical domain.

Key words: *eigenvalues, distribution function.*