

© О.В. Соболева\*

## Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции

Исследуется коэффициентная обратная экстремальная задача для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции, рассматриваемого в ограниченной области при смешанных граничных условиях. Доказывается устойчивость решения указанной задачи относительно малых возмущений – как функционала качества, так и одной из заданных функций, входящих в исходную краевую задачу. Развивается алгоритм решения рассматриваемой экстремальной задачи. Он основан на использовании метода Ньютона и дискретизации линейной краевой задачи одним из методов конечных разностей или конечных элементов. Обсуждаются результаты проведенных численных экспериментов.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, третья краевая задача, массоперенос, коэффициентные обратные задачи, разрешимость, устойчивость, численный алгоритм.*

### 1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию моделей, описывающих процессы тепло- и массопереноса в жидких средах [1]. Указанные модели и соответствующие им краевые задачи содержат ряд параметров, которые должны быть заданы для однозначного нахождения решения задач. Однако на практике часто возникают ситуации, когда некоторые из параметров не известны либо заданы приближенно и требуют дальнейшего уточнения. Такие задачи относятся к классу обратных задач идентификации неизвестных плотностей источников или коэффициентов, входящих в рассматриваемые модели. Особую трудность вызывает исследование коэффициентных обратных задач, поскольку по своим постановкам они относятся к нелинейным и, как правило, некорректным задачам математической физики. Последнее обстоятельство осложняет как теоретическое исследование обратных коэффициентных задач, так и разработку вычислительных алгоритмов их приближенного решения.

Исследование коэффициентных обратных задач часто сводится к исследованию соответствующих экстремальных задач [2, 3]. Это позволяет применять для их решения хорошо развитые методы условной оптимизации. Для стационарных уравнений конвекции – диффузии и диффузии – реакции указанный подход применялся в работах [3]–[7] с использованием градиентных методов или квазиньютоновского алгоритма. Отметим также работы [8]–[11], посвященные теоретическому и численному исследованию обратных экстремальных задач для нелинейных стационарных моделей тепломассопереноса.

\*Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: soboleva22@mail.ru

Целью работы является теоретический и численный анализ коэффициентной обратной экстремальной задачи для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции, рассматриваемого в области  $\Omega$  при смешанных краевых условиях на границе области.

## 2. Постановка краевой задачи

Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega$  из пространства  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) с липшицевой границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей –  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ , задачу нахождения концентрации  $C$  загрязняющего вещества из соотношений

$$-\lambda \Delta C + \mathbf{u} \cdot \text{grad} C - w_0 \frac{\partial C}{\partial z} + kC = f, \quad (2.1)$$

$$C|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \lambda \left( \frac{\partial C}{\partial n} + \alpha C \right) |_{\Gamma_N} = \chi. \quad (2.2)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\lambda$  – коэффициент диффузии,  $\mathbf{u}$  – скорость вещества в жидкости,  $w_0$  – величина вертикальной скорости осаждения (или поднятия при  $w_0 < 0$ ) частиц вещества,  $k \geq 0$  – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций,  $f$  – плотность распределенных источников,  $\psi$  – заданная на  $\Gamma_D$  функция и  $\chi$ ,  $\alpha$  – заданные на  $\Gamma_N$  функции,  $n$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Ниже будем использовать пространства  $L^2(D)$  и  $H^s(D)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , где  $D$  представляет собой либо область  $\Omega$ , либо границу  $\Gamma$ , либо некоторую часть  $\Gamma_0$  границы  $\Gamma$ . Скалярные произведения в  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(Q)$ ,  $L^2(\Gamma_0)$  будем обозначать через  $(\cdot, \cdot)$ ,  $(\cdot, \cdot)_Q$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_0}$  соответственно. Норму в  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(Q)$  либо  $L^2(\Gamma_0)$  будем обозначать через  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_Q$  либо  $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$ , норму либо полунорму в  $H^1(\Omega)$  и  $\mathbf{H}^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega)^d$  – через  $\|\cdot\|_1$  либо  $|\cdot|_1$ , норму в  $H^{1/2}(\Gamma_D)$  – через  $\|\cdot\|_{1/2, \Gamma_D}$ , норму в  $H^1(Q)$  – через  $\|\cdot\|_{H^1(Q)}$ , отношение двойственности для пары  $X$  и  $X^*$  – через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$  или  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  там, где это не приведет к путанице. Предположим, что выполняются следующие условия:

(i)  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , где  $d = 2, 3$  с границей  $\Gamma \in C^{0,1}$  и открытые участки  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  границы  $\Gamma$  удовлетворяют условиям:  $\Gamma_D \in C^{0,1}$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_N \in C^{0,1}$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ .

При выполнении условий (i) существуют линейные непрерывные операторы следа  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  и  $\gamma|_{\Gamma_0} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0)$ , где  $\Gamma_0$  может принимать значения  $\Gamma_0 = \Gamma_D$  либо  $\Gamma_0 = \Gamma_N$ . Введем основное для дальнейшего рассмотрения функциональное пространство  $\mathcal{T} \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$ .  $\mathcal{T}$  – гильбертово пространство с нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{T}} = \|\cdot\|_1$ , эквивалентной полунорме  $|\cdot|_1$  в силу действия неравенства Фридрикса – Пуанкаре  $|\nabla S|^2 \geq \alpha_1 \|S\|_1^2 \forall S \in \mathcal{T}$ ,  $\alpha_1 = \text{const} > 0$ . Через  $\mathcal{T}^*$  обозначим двойственное к  $\mathcal{T}$  относительно пространства  $L^2(\Omega)$ . Положим также  $L_+^2(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^2(\Gamma_N) : \alpha \geq 0 \text{ на } \Gamma_N\}$ ,  $L_+^2(\Omega) = \{k \in L^2(\Omega) : k \geq 0 \text{ в } \Omega\}$ . Будем использовать следующие неравенства, вытекающие из теорем вложения, непрерывности оператора следа и неравенства Гельдера:

$$|(\nabla \varphi, \nabla h)| \leq \|\varphi\|_1 \|h\|_1, \quad |\nabla h|^2 \geq \delta_1 \|h\|_1^2 \quad \forall (\varphi, h) \in H^1(\Omega) \times \mathcal{T}, \quad (2.3)$$

$$|(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h)| \leq \gamma'_0 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\varphi\|_1 \|h\|_1 \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\varphi\|_1 \|h\|_1, \quad (2.4)$$

$$|(\chi, h)_{\Gamma_N}| \leq \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_{\Gamma_N} \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_1, \quad (2.5)$$

$$|(\alpha \varphi, h)_{\Gamma_N}| \leq \|\alpha\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_{L^4(\Gamma_N)} \|h\|_{L^4(\Gamma_N)} \leq \gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_1 \|h\|_1, \quad (2.6)$$

$$\|h\|_Q \leq \gamma_4 \|h\|_1, \quad |(\varphi, h)_Q| \leq \gamma_4 \|\varphi\|_Q \|h\|_1 \leq \gamma_4^2 \|\varphi\|_1 \|h\|_1, \quad (2.7)$$

$$|(k\varphi, h)| \leq \|k\| \|\varphi\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{L^4(\Omega)} \leq \gamma_5 \|k\| \|\varphi\|_1 \|h\|_1. \quad (2.8)$$

Здесь  $Q$  – произвольная подобласть в  $\Omega$ ,  $\gamma'_0, \gamma_1, \dots, \gamma_5$  – некоторые константы, зависящие от  $\Omega$ . Описание используемых здесь функциональных пространств, норм и полунорм, строгого определения липшицевой границы, а так же формулировки теоремы о следах и теорем вложения без доказательств можно найти в гл. 1 книги [12]. Более детальное обсуждение свойств введенных пространств и используемых обозначений можно найти в книге [13] и [14]. Введем билинейные формы  $a, a_1, c_{\mathbf{u}} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$a(C, h) = \int_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla h d\Omega, \quad a_1(C, h) = \lambda a(C, h) + \lambda(\alpha C, h)_{\Gamma_N} - w_0 \left( \frac{\partial C}{\partial z}, h \right) + (kC, h),$$

$$c_{\mathbf{u}}(C, h) = (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla C) h d\Omega. \quad (2.9)$$

Предположим в дополнение к условиям (i), что выполняются условия

- (ii)  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \geq 0$  на  $\Gamma_N$ ,  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ,  $k \in L^2_+(\Omega)$ ; (iii)  $\lambda_* = \delta_1 \lambda - \gamma_4 |w_0| > 0$ ;
- (iv)  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\chi \in L^2(\Gamma_N)$ ,  $\alpha \in L^2_+(\Gamma_N)$ .

Условие (iii) означает физически, что скорость оседания  $w_0$  должна быть достаточно малой. Это нужно для обеспечения коэрцитивности.

Умножим уравнение (2.1) на функцию  $h \in \mathcal{T}$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Используя формулу интегрирования по частям и второе граничное условие в (2.2), приходим с учетом первого граничного условия в (2.2) к соотношениям

$$a_1(C, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h) = \langle l, h \rangle \equiv (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N}, \quad \gamma|_{\Gamma_D} C = \psi. \quad (2.10)$$

Обобщенным решением задачи (2.1), (2.2) будем называть функцию  $C \in H^1(\Omega)$ , удовлетворяющую соотношениям (2.10).

Простой анализ с учетом (2.3)–(2.8) показывает, что при выполнении условий (i)–(iv) выполняются неравенства

$$|a_1(C, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h)| \leq (\lambda + \gamma_3 \lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_4 |w_0| + \gamma_5 \|k\| + \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1) \|C\|_1 \|h\|_1, \quad (2.11)$$

$$c_{\mathbf{u}}(h, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla h^2) d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} h^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) h^2 d\sigma \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{T},$$

$$a_1(h, h) + c_{\mathbf{u}}(h, h) \geq (\delta_1 \lambda - \gamma_4 |w_0|) \|h\|_1^2 \geq \lambda_* \|h\|_1^2 \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) следует, что форма  $a_1(\cdot, \cdot) + c_{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$  непрерывна на  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  и  $\mathcal{T}$ -коэрцитивна с константой  $\lambda_*$ . Ясно также в силу (2.5) и (ii), (iv), что

$$|(\chi, h)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_1 \quad \forall h \in \mathcal{T}, \quad \|l\|_{\mathcal{T}^*} \leq M \equiv \|f\| + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N}.$$

Известно [14], что при выполнении условий (i) оператор следа  $\gamma|_{\Gamma_D} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_D)$  непрерывен и сюръективен. Поэтому существует непрерывный правый обратный оператор следа  $(\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_D) \rightarrow H^1(\Omega)$  такой, что  $(\gamma|_{\Gamma_D}) \circ (\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1} \psi = \psi \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ . Обозначим через  $\gamma_6$  норму оператора  $(\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1}$  и положим  $C_0 = (\gamma|_{\Gamma_D})_r^{-1} \psi$ . Ясно, что  $\|C_0\|_1 \leq \gamma_6 \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}$ . Полагая в (2.10)  $C = C_0 + \tilde{C}$ , где  $\tilde{C} \in \mathcal{T}$  – новая неизвестная функция, приходим к следующей задаче для  $\tilde{C}$ :

$$a_1(\tilde{C}, h) + c_{\mathbf{u}}(\tilde{C}, h) = \langle \hat{l}, h \rangle \equiv \langle l, h \rangle - a_1(C_0, h) - c_{\mathbf{u}}(C_0, h) \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (2.13)$$

Из (2.11) следует, что

$$\|\hat{l}\|_{\mathcal{T}^*} \leq \|l\|_{\mathcal{T}^*} + (\lambda + \lambda \gamma_3 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_4 |w_0| + \gamma_5 \|k\| + \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1) \gamma_6 \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}. \quad (2.14)$$

Поскольку форма  $a_1(\cdot, \cdot) + c_{\mathbf{u}}(\cdot, \cdot)$  в (2.13) непрерывна на  $H^1(\Omega)^2$  и коэрцитивна на  $\mathcal{T}$  с константой  $\lambda_*$ , то из теоремы Лакса – Мильграма следует, что решение  $\tilde{C} \in \mathcal{T}$  задачи

(2.13) существует, оно единственно, и справедлива оценка  $\|\tilde{C}\| \leq (1/\lambda_*)\|\hat{l}\|_{\mathcal{T}^*}$ , тогда как для функции  $C = C_0 + \tilde{C}$ , являющейся решением задачи (2.10), выполняется оценка

$$\|C\|_1 \leq M_C \equiv \lambda_*^{-1}[M + (\lambda_* + \lambda + \lambda\gamma_3\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_4|w_0| + \gamma_5\|k\| + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_1)\gamma_6\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}]. \quad (2.15)$$

Поставим в соответствие задаче (2.1), (2.2) операторную пару

$$(A, \gamma|_{\Gamma_D}) : X \rightarrow Y, \quad X = H^1(\Omega), \quad Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma_D)), \quad (2.16)$$

состоящую из оператора  $A : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}^*$ , действующего по формуле

$$\langle AC, h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = a_1(C, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h) \quad \forall C \in H^1(\Omega), \quad h \in \mathcal{T}, \quad (2.17)$$

и оператора следа  $\gamma|_{\Gamma_D} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_D)$ . Из свойств формы  $a_1$  и оператора  $\gamma|_{\Gamma_D}$  вытекает, что оператор  $A : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$  представляет собой изоморфизм, а оператор (2.16) линеен, непрерывен, обратим и сюръективен. В таком случае из теоремы Банаха о существовании обратного оператора [15, с. 134] следует, что оператор (2.16) обратим и представляет собой изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда

1) билинейная форма  $a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $\mathcal{T}$ -коэрцитивна с константой  $\lambda_*$ , определенной в (iii); 2) для любой пятерки  $(f, \psi, \chi, \alpha, k) \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N) \times L_+^2(\Gamma_N) \times L_+^2(\Omega)$  задача (2.1), (2.2) имеет единственное обобщенное решение  $C \in H^1(\Omega)$  и справедлива оценка (2.15); 3) оператор (2.16), (2.17) представляет собой линейный и непрерывный изоморфизм пространств  $X$  и  $Y$ .

### 3. Постановка обратной задачи и оценки устойчивости

Рассмотренная выше краевая задача содержит ряд физических параметров, которые должны быть заданы для нахождения ее решения. Но, как было сказано выше, некоторые из параметров могут быть неизвестны. Тогда возникает необходимость решения обратных задач для модели (2.1), (2.2), заключающихся в нахождении неизвестных параметров и искомого решения, по дополнительной информации о состоянии среды. В качестве указанной информации о решении можно выбрать, например, значения  $C_d(\mathbf{x})$  концентрации  $C$ , измеренные в точках некоторого множества  $Q \subset \Omega$ . Решение обратных задач можно свести к решению экстремальных задач при соответствующем выборе функционала качества и управления.

Разобьем множество исходных данных задачи (2.1), (2.2) на две группы: группу фиксированных (или жестких) данных, куда внесем неизменяемые данные  $\mathbf{u}, \lambda, w_0, k, \psi$ , и группу управлений, куда внесем функции  $\chi$  и  $\alpha$ . Что касается функции  $f$ , то в дальнейшем она будет играть особую роль, поскольку устойчивость сформулированной ниже экстремальной задачи будет исследоваться относительно малых возмущений как рассматриваемого функционала качества, так и функции  $f$  в норме пространства  $L^2(\Omega)$ . Положим  $u = (\chi, \alpha)$ ,  $v = (\lambda, w_0, k, \psi, \mathbf{u})$ . Будем считать, что управления  $\chi$  и  $\alpha$  могут изменяться в некоторых множествах  $K_1$  и  $K_2$ . Выражаясь более точно, предположим, что выполняются условия

(j)  $K_1 \subset L^2(\Gamma_N)$ ,  $K_2 \subset L_+^2(\Gamma_N)$  – непустые выпуклые замкнутые множества.

Пусть далее  $K \equiv K_1 \times K_2$ ,  $\mu_l \geq 0, l = 0, 1, 2$  – некоторые константы,  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  – заданный функционал качества. Введем функционал  $J : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$  формулой

$$J(C, u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(C) + \frac{\mu_1}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2. \quad (3.1)$$

В качестве возможных функционалов качества будем использовать следующие:

$$I_1(C) = \|C - C_d\|_{L^2(Q)}^2 \equiv \int_Q |C - C_d|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} r(C - C_d)^2 d\Omega, \quad I_2(C) = \|C - C_d\|_{H^1(Q)}^2.$$

Здесь  $r$  – характеристическая функция множества  $Q$ .

Рассматривая функционал  $J$  на обобщенных решениях задачи (2.1), (2.2), запишем ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (2.10), в виде

$$F(C, u, f) \equiv F(C, \chi, \alpha, f) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь оператор  $F = (F_1, F_2) : X \times K \rightarrow Y$  действует по формулам  $\langle F_1(C, u, f), h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = \langle AC, h \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} - \langle l, h \rangle$ ,  $F_2(C, u) = \gamma|_{\Gamma_D} C - \psi$ . Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(C, u) \equiv J(C, \chi, \alpha) \rightarrow \inf, \quad F(C, u, f) = 0, \quad (C, u) \in X \times K. \quad (3.3)$$

Справедлива следующая теорема о единственности решения задачи (3.3) (ее доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 в препринте [16]. Аналогичную теорему можно найти в [12, с. 139]).

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j), причем  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mu_l > 0$ ,  $l = 0, 1, 2$ ; либо  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_l \geq 0$  и  $K_l$  – ограниченные множества,  $l = 1, 2$ . Тогда задача (3.3) при  $I = I_k$ ,  $k = 1, 2$  имеет по крайней мере одно решение  $(\hat{C}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$ .

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (3.3). По аналогии с [9] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах [17]. Обозначим через  $Y^* \equiv \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$  двойственное пространство к  $Y$ . В соответствии с общей теорией экстремальных задач [17] введем в рассмотрение множитель Лагранжа  $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$ , где элемент  $\eta \in \mathcal{T}$  имеет смысл “сопряженной” концентрации, и лагранжиан  $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$\mathcal{L}(C, u, y^*, f) \equiv J(C, u) + \langle F_1(C, u, f), \eta \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(C, u) \rangle_{\Gamma_D}.$$

Не трудно показать, что множество  $F(\hat{C}, K, f) \equiv \{F(\hat{C}, u, f) : u \in K\}$  является выпуклым подмножеством в  $Y$ , а оператор (производная Фреше)  $F'_C(\hat{C}, \hat{u}, f) : X \rightarrow Y$  определяется формулой  $F'_C(\hat{C}, \hat{u}, f) = (\hat{A}, \gamma|_{\Gamma_D})$ , где оператор  $\hat{A} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}^*$  действует по формуле

$$\langle \hat{A}\tau, h \rangle = \hat{a}_1(\tau, h) + c_{\mathbf{u}}(\tau, h), \quad \hat{a}_1(\tau, h) \equiv \lambda a(\tau, h) + \lambda(\hat{\alpha}\tau, h)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\tau/\partial z, h) + (k\tau, h). \quad (3.4)$$

Из теоремы 1 следует, что оператор  $F'_C(\hat{C}, \hat{u}, f) : X \rightarrow Y$  является изоморфизмом. В таком случае из [17, с. 79] вытекает теорема 3.

**Теорема 3.** Пусть при выполнении условий (i)–(iii) и (j)  $(\hat{C}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$  – элемент, на котором достигается минимум в задаче (3.3), и пусть функционал  $I(\cdot) : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируем по  $C$  в точке  $\hat{C}$ . Тогда существует множитель Лагранжа  $y^* = (\eta, \zeta) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$  такой, что справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\langle y^*, F'_C(\hat{C}, \hat{u}, f)\tau \rangle_{Y^* \times Y} = -(\mu_0/2)\langle I'_C(\hat{C}), \tau \rangle_{X^* \times X} \quad \forall \tau \in X, \quad (3.5)$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{C}, \hat{u}, y^*, f) \leq \mathcal{L}(\hat{C}, u, y^*, f) \quad \forall u \in K. \quad (3.6)$$

Не трудно показать, что уравнение (3.5) эквивалентно тождеству

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(\tau, \eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau, \eta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} &\equiv \lambda a(\tau, \eta) + \lambda(\hat{\alpha}\tau, \eta)_{\Gamma_N} - w_0(\partial\tau/\partial z, \eta) + (k\tau, \eta) + \\ &+ c_{\mathbf{u}}(\tau, \eta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0/2)\langle I'_C(\hat{C}), \tau \rangle \quad \forall \tau \in X, \end{aligned} \quad (3.7)$$

тогда как принцип минимума (3.6) эквивалентен двум вариационным неравенствам

$$\langle \mathcal{L}'_{\chi}(C, u, y^*, f), \tilde{\chi} - \chi \rangle \equiv \mu_1(\chi, \tilde{\chi} - \chi)_{\Gamma_N} - (\tilde{\chi} - \chi, \eta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \tilde{\chi} \in K_1, \quad (3.8)$$

$$\langle \mathcal{L}'_{\alpha}(C, \alpha, y^*, f), \tilde{\alpha} - \alpha \rangle \equiv \mu_2(\alpha, \tilde{\alpha} - \alpha)_{\Gamma_N} + \lambda((\tilde{\alpha} - \alpha)C, \eta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K_2, \quad (3.9)$$

Тождество (3.7) вместе с неравенствами (3.8), (3.9) и операторным уравнением (3.2) представляет собой систему оптимальности для задачи (3.3), описывающую необходимые условия экстремума.

Основываясь на анализе системы оптимальности для задачи (3.3), установим достаточные условия, наложенные на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость ее решения для конкретных функционалов качества. Рассмотрим случай, когда  $I(C) = I_1(C)$ . Тогда производная Фреше  $(I_1)'_{\hat{C}}$  от функционала  $I_1$  в любой точке  $\hat{C} \in X$  определяется соотношением

$$\langle (I_1)'_{\hat{C}}(\hat{C}), \tau \rangle = 2(\hat{C} - C_d, \tau)_Q. \quad (3.10)$$

Будем предполагать ниже, что объемная плотность  $f$  источников вещества, входящая в уравнение состояния  $F(C, u, f) = 0$ , может изменяться на некотором ограниченном множестве  $Z \subset L^2(\Omega)$ , а  $K_1$  и  $K_2$  – ограниченные множества, так что с некоторыми константами  $\gamma_i$ ,  $i = 7, 8$  выполняются оценки

$$\|\chi\|_{\Gamma_N} \leq \gamma_7 \quad \forall \chi \in K_1, \quad \|\alpha\|_{\Gamma_N} \leq \gamma_8 \quad \forall \alpha \in K_2. \quad (3.11)$$

Обозначим через  $(C_1, u_1) = (C_1, \chi_1, \alpha_1) \in X \times K$  (произвольное) решение задачи

$$J(C, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} \|C - C_d^{(1)}\|_Q + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad (3.12)$$

$$F(C, u, f_1) = 0, \quad (C, u) \in X \times K,$$

для заданной функции  $f = f_1 \in Z$ . Через  $(C_2, u_2) = (C_2, \chi_2, \alpha_2) \in H^1(\Omega) \times K$  обозначим решение близкой к (3.12) задачи

$$J(C, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} \|C - C_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_1}{2} \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \quad (3.13)$$

$$F(C, u, f_2) = 0, \quad (C, u) \in X \times K,$$

полученной заменой функции  $C_d^{(1)}$  близкой функцией  $C_d^{(2)}$ , а функции  $f_1$ , входящей в уравнение состояния  $F(C, u, f_1) = 0$  в (3.12), заменой близкой функцией  $f_2 \in Z$ .

В силу утверждения теоремы 1 и условий (3.11) для  $C_i$  справедливы оценки

$$\|C_i\| \leq M_C^0 = \sup_{u \in K, f \in Z} M_C(u, f) < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

Обозначим через  $y_i^* = (\theta_i, \zeta_i) \in Y^*$  отвечающие решениям  $(C_i, u_i)$  множители Лагранжа. В силу утверждения теоремы 3 и (3.10) они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \lambda(\tau, \eta_i) + \lambda(\alpha_i \tau, \eta_i)_{\Gamma_N} - w_0(\partial \tau / \partial z, \eta_i) + (k \tau, \eta_i) + c_{\mathbf{u}}(\tau, \eta_i) + \langle \zeta_i, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\ = -\mu_0(C_i - C_d^{(i)}, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Положим

$$C = C_1 - C_2, \quad C_d = C_d^{(1)} - C_d^{(2)}, \quad \chi = \chi_1 - \chi_2, \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \quad f = f_1 - f_2, \quad (3.16)$$

$$\eta = \eta_1 - \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2.$$

Вычтем тождество (2.10), записанное для  $(C_2, \chi_2, \alpha_2, f_2)$ , из этого же тождества, записанного для  $(C_1, \chi_1, \alpha_1, f_1)$ . Получим

$$\begin{aligned} \lambda a(C, h) + \lambda(\alpha_1 C, h)_{\Gamma_N} - w_0(\partial C/\partial z, h) + (kC, h) + c_{\mathbf{u}}(C, h) = \\ = -\lambda(\alpha C_2, h)_{\Gamma_N} + (\chi, h)_{\Gamma_N} + (f, h) \quad \forall h \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Положим в (3.17)  $h = C \in \mathcal{T}$ . Используя (2.12), (2.5), (2.6), (3.14) и условие  $\alpha_1 \geq 0$ , получим

$$\begin{aligned} \lambda_* \|C\|_1^2 \leq \lambda a(C, C) + \lambda(\alpha_1 C, C)_{\Gamma_N} - w_0(\partial C/\partial z, C) + (kC, C) + c_{\mathbf{u}}(C, C) = \\ = -\lambda(\alpha C_2, C)_{\Gamma_N} + (\chi, C)_{\Gamma_N} + (f, C) \leq (\gamma_3 \lambda M_C^0 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + \|f\|) \|C\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к следующей оценке для  $C$ :

$$\|C\|_1 \leq \lambda_*^{-1} \|u\| + \lambda_*^{-1} \|f\|. \quad (3.18)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\|u\| = \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_3 \lambda M_C^0 \|\alpha\|_{\Gamma_N}. \quad (3.19)$$

Обратимся далее к тождеству (3.15), где положим  $\tau = \eta_i$ . Используя неравенство (2.12), оценки (2.7), (3.14) и условия  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\eta_i|_{\Gamma_D} = 0$ , выводим, что

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\eta_i\|_1^2 \leq \lambda a(\eta_i, \eta_i) + \lambda(\alpha_i \eta_i, \eta_i)_{\Gamma_N} - w_0(\partial \eta_i/\partial z, \eta_i) + (k\eta_i, \eta_i) + c_{\mathbf{u}}(\eta_i, \eta_i) \leq \\ \leq -\mu_0(C_i - C_d^{(i)}, \eta_i)_Q \leq \mu_0(\|C_i\|_Q + \|C_d^{(i)}\|_Q) \|\eta_i\|_Q \leq \mu_0 \gamma_4 (\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{(i)}\|_Q) \|\eta_i\|_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из (3.20) приходим к следующей оценке для  $\eta_i$ :

$$\|\eta_i\|_1 \leq \mu_0 \lambda_*^{-1} \gamma_4 (\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{(i)}\|_Q), \quad i = 1, 2. \quad (3.21)$$

Вычтем теперь тождество (3.15), записанное при  $i = 2$ , из этого же тождества, записанного при  $i = 1$ . Получим

$$\begin{aligned} \lambda a(\tau, \eta) + \lambda(\alpha_1 \tau, \eta)_{\Gamma_N} - w_0(\partial \tau/\partial z, \eta) + (k\tau, \eta) + c_{\mathbf{u}}(\tau, \eta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\ = -\lambda(\alpha \tau, \eta_2)_{\Gamma_N} - \mu_0(C, \tau)_Q + \mu_0(C_d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Положим здесь  $\tau = \eta$ . Учитывая (2.6), (2.7) и условие  $\eta|_{\Gamma_D} = 0$ , из полученного соотношения (3.22) выводим, что

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\eta\|_1^2 \leq -\lambda(\alpha \eta, \eta_2)_{\Gamma_N} - \mu_0(C, \eta)_Q + \mu_0(C_d, \eta)_Q \leq \\ \leq \gamma_3 \lambda \|\eta_2\|_1 \|\eta\|_1 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0 \gamma_4^2 \|C\|_1 \|\eta\|_1 + \mu_0 \gamma_4 \|C_d\|_Q \|\eta\|_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя оценки (3.21) для  $\|\eta_2\|_1$  и (3.18) для  $\|C\|_1$ , из (3.23)

$$\begin{aligned} \|\eta\|_1 \leq \lambda_*^{-1} \left[ \|\eta_2\|_1 \gamma_3 \lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0 \gamma_4^2 \|C\|_1 + \mu_0 \gamma_4 \|C_d\|_Q \right] \leq \\ \leq \lambda_*^{-2} \left[ \mu_0 \gamma_4 (\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{(2)}\|_Q) \gamma_3 \lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0 \gamma_4^2 \|u\| + \mu_0 \gamma_4^2 \|f\| + \mu_0 \lambda_* \gamma_4 \|C_d\|_Q \right]. \end{aligned}$$

Используя очевидное неравенство

$$\gamma_3 \lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} \leq \|u\|/M_C^0, \quad (3.24)$$

вытекающее из (3.19), приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_1 &\leq \frac{\mu_0\gamma_4(\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{(2)}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4^2}{\lambda_*^2}\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4^2}{\lambda_*^2}\|f\| + \frac{\mu_0\gamma_4}{\lambda_*}\|C_d\|_Q = \\ &= \frac{\mu_0\gamma_4(2\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{(2)}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4^2}{\lambda_*^2}\|f\| + \frac{\mu_0\gamma_4}{\lambda_*}\|C_d\|_Q. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Положим  $\tilde{\chi} = \chi_2$  в неравенстве (3.8), записанном при  $i = 1$ , и  $\tilde{\chi} = \chi_1$  в (3.8), записанном при  $i = 2$ . Получим  $-\mu_1(\chi_1, \chi)_{\Gamma_N} + (\chi, \eta)_{\Gamma_N} \geq 0$ ,  $\mu_1(\chi_2, \chi)_{\Gamma_N} - (\chi, \eta_2)_{\Gamma_N} \geq 0$ . Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 \leq (\chi, \eta)_{\Gamma_N} - (\chi, \eta_2)_{\Gamma_N} = (\chi, \eta)_{\Gamma_N}. \quad (3.26)$$

Аналогичным образом положим  $\tilde{\alpha} = \alpha_2$  в неравенстве (3.9), записанном при  $i = 1$ , и  $\tilde{\alpha} = \alpha_1$  в неравенстве (3.9), записанном при  $i = 2$ . Полагая  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ , получим, что  $-\mu_2(\alpha_1, \alpha)_{\Gamma_N} - \lambda(\alpha C_1, \eta)_{\Gamma_N} \geq 0$ ,  $\mu_2(\alpha_2, \alpha)_{\Gamma_N} + \lambda(\alpha C_2, \eta)_{\Gamma_N} \geq 0$ . Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq \lambda(\alpha C_2, \eta) - \lambda(\alpha C_1, \eta)_{\Gamma_N} = -\lambda(\alpha C_2, \eta)_{\Gamma_N} - \lambda(\alpha C_1, \eta)_{\Gamma_N}. \quad (3.27)$$

Складывая неравенства (3.26) и (3.27) и учитывая (2.5), (2.6), выводим

$$\begin{aligned} \mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 &\leq (\chi, \eta)_{\Gamma_N} - \lambda(\alpha C_2, \eta)_{\Gamma_N} - \lambda(\alpha C_1, \eta)_{\Gamma_N} \leq \\ &\leq \gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N}\|\eta\|_1 + \gamma_3\lambda(\|C_2\|_1\|\eta\|_1 + \|C\|_1\|\eta_1\|_1)\|\alpha\|_{\Gamma_N} \leq \\ &\leq \|\eta\|_1(\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N} + \gamma_3\lambda M_C^0\|\alpha\|_{\Gamma_N}) + \gamma_3\lambda\|\alpha\|_{\Gamma_N}\|C\|_1\|\eta_1\|_1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Используя (3.19) и (3.24), из (3.28) приходим к следующему неравенству:

$$\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq (\|\eta\|_1 + \frac{\|C\|_1\|\eta_1\|_1}{M_C^0})\|u\|. \quad (3.29)$$

Учитывая неравенства (3.18), (3.21) и (3.25), из (3.29) получим

$$\begin{aligned} \mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 &\leq (\|\eta\|_1 + \frac{\|C\|_1\|\eta_1\|_1}{M_C^0})\|u\| \leq \frac{\mu_0\gamma_4(2\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{(2)}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\|^2 + \\ &+ \frac{\mu_0\gamma_4^2}{\lambda_*^2}\|f\|\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4}{\lambda_*}\|C_d\|_Q\|u\| + \frac{\mu_0\gamma_4(\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{(1)}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\|^2 + \\ &+ \frac{\mu_0\gamma_4(\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{(1)}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\|\|f\| \leq \frac{\mu_0\tilde{M}_C^0}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\|^2 + \frac{\mu_0\gamma_4}{\lambda_*}\|C_d\|_Q\|u\| + \\ &+ \frac{\mu_0\gamma_4(2\gamma_4M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\lambda_*^2M_C^0}\|u\|\|f\|, \quad \tilde{M}_C^0 = \gamma_4(3\gamma_4M_C^0 + 2\|C_d^{max}\|_Q) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Используя (3.30) и хорошо известное алгебраическое неравенство

$$a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad (3.31)$$

из (3.29) приходим к соотношению

$$\mu_1\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \mu_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq \frac{\mu_0\tilde{M}_C^0}{\lambda_*^2M_C^0}[2\gamma_2^2\|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + 2\gamma_3^2\lambda^2(M_C^0)^2\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] + \frac{\mu_0\gamma_4}{\lambda_*}\|C_d\|_Q\|u\| +$$



$$+ \frac{\mu_0 \gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\lambda_*^2 M_C^0} \|u\| \|f\|,$$

которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} & (\mu_1 - 2\mu_0 \gamma_2^2 \frac{\tilde{M}_C^0}{\lambda_*^2 M_C^0}) \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + (\mu_2 - 2\mu_0 \gamma_3^2 \lambda^2 \frac{M_C^0 \tilde{M}_C^0}{\lambda_*^2}) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq \\ & \leq \frac{\mu_0 \gamma_4}{\lambda_*} \|C_d\|_Q \|u\| + \frac{\mu_0 \gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\lambda_*^2 M_C^0} \|u\| \|f\|. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Предположим, что параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_0$ , входящие в (3.3), удовлетворяют условиям

$$\mu_1 \geq 2\mu_0 \gamma_2^2 \lambda_*^{-2} (M_C^0)^{-1} \tilde{M}_C^0 + 3\varepsilon \gamma_2^2, \quad \mu_2 \geq 2\mu_0 \gamma_3^2 \lambda^2 \lambda_*^{-2} M_C^0 \tilde{M}_C^0 + 3\varepsilon \gamma_3^2 \lambda^2 (M_C^0)^2, \quad (3.33)$$

Учитывая (3.33) и неравенство (3.31), из (3.32) выводим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \|u\|^2 & \leq 2\varepsilon [\gamma_2^2 \|\chi\|_{\Gamma_N}^2 + \gamma_3^2 \lambda^2 (M_C^0)^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] \leq \\ & \leq \mu_0 \lambda_*^{-1} \gamma_4 \|C_d\|_Q \|u\| + \mu_0 \lambda_*^{-2} (M_C^0)^{-1} \gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q) \|u\| \|f\|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из (3.34) получаем, что

$$\|u\| \equiv \|u_1 - u_2\| \leq (\mu_0 \gamma_4 / \varepsilon \lambda_*) \|C_d\|_Q + \mu_0 \varepsilon^{-1} \lambda_*^{-2} (M_C^0)^{-1} \gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q) \|f\|.$$

Отсюда, (3.16) и (3.19) приходим к оценкам устойчивости решения задачи (3.3). Они имеют вид

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\gamma_3 \lambda \lambda_* M_C^0} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\gamma_3 \lambda \lambda_*^2 (M_C^0)^2} \|f_1 - f_2\|, \quad (3.35)$$

$$\|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\gamma_2 \lambda_*} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\gamma_5 \lambda_*^2 M_C^0} \|f_1 - f_2\|,$$

$$\|C_1 - C_2\|_1 \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4}{\lambda_*^2} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\gamma_4 (2\gamma_4 M_C^0 + \|C_d^{max}\|_Q)}{\lambda_*^3 M_C^0} \|f_1 - f_2\|.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j) тройка  $(C_i, \chi_i, \alpha_i) \in H^1(\Omega) \times K$  является решением задачи (3.3), отвечающим заданным функциям  $C_d \equiv C_d^{(i)} \in L^2(Q)$  и  $f_i \in Z \subset L^2(\Omega)$   $i = 1, 2$ , где  $Q \subset \Omega$  – произвольное открытое подмножество. Предположим, что  $\mu_0 > 0$  и выполняются условия (3.14) и (3.33). Тогда задача (3.3) имеет единственное решение и справедливы оценки устойчивости (3.35).

Используя аналогичные рассуждения, можно получить следующие оценки устойчивости для случая, когда  $I(C) = I_2(C)$

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} & \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\gamma_3 \lambda \lambda_* M_C^0} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_{1,Q} + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{(2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\gamma_3 \lambda \lambda_*^2 (M_C^0)^2} \|f_1 - f_2\|, \\ \|\chi_1 - \chi_2\|_{\Gamma_N} & \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\gamma_2 \lambda_*} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_Q + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{(2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\gamma_2 \lambda_*^2 M_C^0} \|f_1 - f_2\|, \\ \|C_1 - C_2\|_1 & \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{1}{\lambda_*^2} \|C_d^{(1)} - C_d^{(2)}\|_{1,Q} + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{(2M_C^0 + \|C_d^{max}\|_{1,Q})}{\lambda_*^3 M_C^0} \|f_1 - f_2\|. \end{aligned} \quad (3.36)$$

## 4. Численный алгоритм решения обратной задачи

Численному исследованию общей задачи управления для модели (2.1), (2.2) будет посвящена отдельная работа автора. Ниже ограничимся рассмотрением однопараметрической экстремальной задачи, в которой роль единственного управления играет функция  $\alpha$ , входящая в граничное условие (2.2). Для простоты рассмотрим случай, когда минимум используемого функционала качества достигается во внутренней точке множества  $K_2 \subset L^2_+(\Gamma_N)$ . В этом случае принцип минимума (3.6) эквивалентен тождеству

$$(\mu_2\alpha + \lambda C\eta, \tilde{\alpha}) = 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K_2. \quad (4.1)$$

Это тождество вместе с ниже следующими соотношениями, последнее из которых является следствием (3.7) при  $I = I_1$  образуют систему оптимальности для задачи (3.3).

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + \lambda(\alpha C, h)_{\Gamma_N} - w_0\left(\frac{\partial C}{\partial z}, h\right) + (kC, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}, \quad C|_{\Gamma_D} = \psi, \quad (4.2)$$

$$\lambda(\nabla \tau, \nabla \eta) + \lambda(\alpha \tau, \eta)_{\Gamma_N} - w_0\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}, \eta\right) + (k\tau, \eta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \eta) = -\mu_0(C - C_d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad \eta|_{\Gamma_D} = 0, \quad (4.3)$$

Перепишем ее в виде следующего операторного уравнения:

$$\Phi(C, \eta, \alpha) = 0. \quad (4.4)$$

Здесь  $\Phi : X \times \mathcal{T} \times L^2(\Gamma_N) \rightarrow \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D) \times \mathcal{T}^* \times L^2(\Gamma_N)$  – нелинейный (из-за наличия мультипликативного управления  $\alpha$ ) оператор. Для численного решения уравнения (4.4) применим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона [12]. Он состоит из ряда этапов.

**0.** Выбирается начальное приближение  $C_0, \eta_0, \alpha_0$  для искомого решения  $(C, \eta, \alpha)$  задачи (4.4). Полагается  $n = 0$ .

**1.** Вычисляется элемент  $(\tilde{C}, \tilde{\eta}, \tilde{\alpha})$  как решение уравнения

$$\Phi'(C_n, \eta_n, \alpha_n)(\tilde{C}, \tilde{\eta}, \tilde{\alpha}) = -\Phi(C_n, \eta_n, \alpha_n). \quad (4.5)$$

Подробную запись этого уравнения можно найти в [12, с. 169, с. 177] или [16, с. 28, с. 37]

**2.** Пересчитываются значения искомых величин  $C, \eta, \alpha$  по формулам

$$C_{n+1} = C_n + \tilde{C}, \quad \eta_{n+1} = \eta_n + \tilde{\eta}, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \tilde{\alpha}.$$

**3.** Проверяется условие выхода из цикла. Если оно не выполняется, то  $n$  увеличивается на 1 и осуществляется переход к этапу 1.

В качестве условия выхода из цикла используется неравенство

$$\|C_{n+1} - C_n\| \equiv \|C_{n+1} - C_n\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-8}.$$

При проведении численных экспериментов в качестве области исследования  $\Omega$  выбирался единичный квадрат с указанным на рис. 1 расположением участков  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  и задавались следующие исходные данные:

$$\mathbf{u} = (1, 0), \quad w_0 = 0, \quad k = 0, \quad f = 0, \quad \chi = 0, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \psi|_{y=0} = x, \quad \psi|_{y=1} = x, \quad \psi|_{x=0} = 0. \quad (4.6)$$

Коэффициент диффузии  $\lambda$  принимал переменные значения от 1 до 0.01.

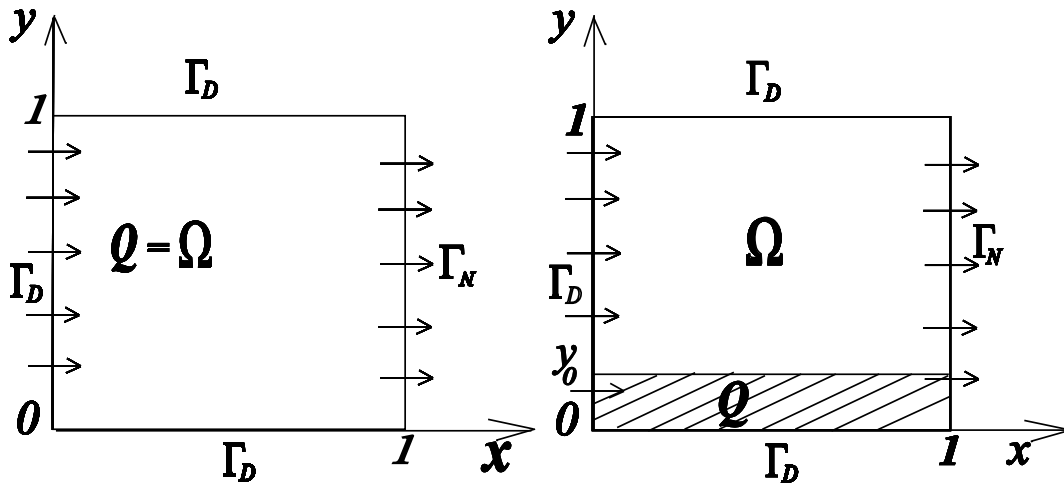


Рис. 1. Геометрия области переноса вещества

В соответствии с концепцией квазиреального эксперимента в качестве дополнительной информации о решении в подобласти  $Q \subset \Omega$  использовалась функция  $C_d$ , полученная путем численного решения прямой краевой задачи (2.1), (2.2) при заданной функции  $\alpha = \alpha_d$  и значениях других параметров, определенных в (4.6). Проверка точности разработанного алгоритма осуществлялась для трех разных классов непрерывных функций  $\alpha(y)$ : линейных, кусочно-линейных и синусоиды. Точность найденного решения определялась с помощью двух типов функционалов-ошибок:

$$E_0 = \frac{\|C - C_d\|_Q}{\|C_d\|_Q}, \quad E_1 = \frac{\|\alpha - \alpha_d\|_{\Gamma_N}}{\|\alpha_d\|_{\Gamma_N}}. \quad (4.7)$$

Для численного решения задачи (4.4) использовался пакет FreeFem++ [18], в котором дискретизация осуществляется с помощью метода конечных элементов. При проведении численных экспериментов выбирались элементы первого порядка, а число элементов изменялось от 200 до нескольких тысяч. Для сравнения приближенное решение задачи (4.4) также было найдено при помощи метода конечных разностей с использованием пакета Scilab (см. [19]). В этом случае в области  $\Omega$  вводилась равномерная сетка с шагом  $h$ , принимавшим значения от 0.1 до 0.025, вторые производные аппроксимировались стандартными разностными производными на трехточечном шаблоне, а первые – центральной разностной производной внутри области и левой односторонней трехточечной разностной производной на границе. Полученная таким образом дискретная задача решалась в пакете Scilab. Целью проведенных вычислительных экспериментов являлось исследование зависимости точности восстановления искомой функции  $\alpha$  от ряда параметров, входящих в задачу, и, в частности, от параметра регуляризации  $\mu_2$ , а также от формы и размеров области измерения  $Q$ .

Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов для случая, когда восстанавливаемая функция имеет вид  $\alpha = \sin(\pi y)$ , а в качестве начального приближения выбирается  $\alpha_0 = 0$ . При использовании метода конечных разностей величина шага сетки  $h$  была выбрана равной 0.05, а при использовании метода конечных элементов была выбрана сетка из 800 треугольных элементов. На рис. 2 приведены графики зависимости величин (4.7) от параметра  $\mu_2$  для  $\lambda = 0.1$ . Оба графика получены с помощью компьютерной реализации программы разработанного алгоритма в пакете FreeFem++ (сплошная линия) либо в среде Scilab (линия с маркерами). Левый график на рис. 2 показывает зависимость от параметра  $\mu_2$  величины ошибки  $E_0$ , тогда как правый график имеет тот же смысл для ошибки  $E_1$ . Из графиков видно, что уменьшение значения параметра  $\mu_2$  приводит к уменьшению

ошибок  $E_0$  и  $E_1$ . На рис. 3 наглядно показан результат восстановления параметра  $\alpha$  при  $\mu_2 = 10^{-6}$  и  $\mu_2 = 10^{-7}$ .

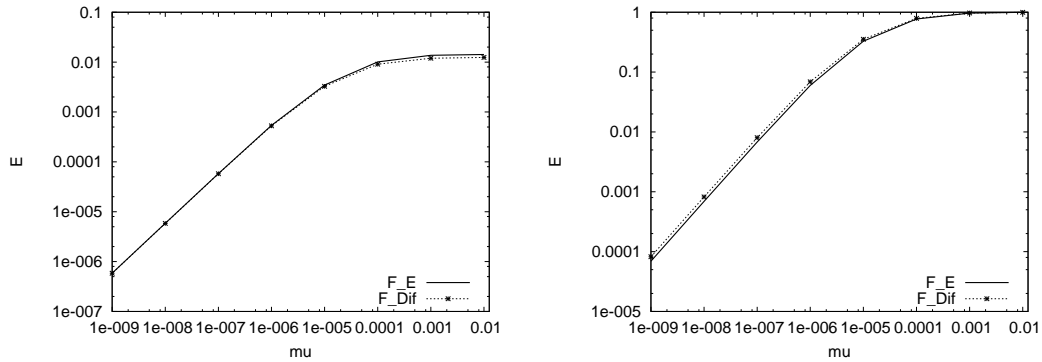


Рис. 2. Зависимость ошибок  $E_0$  (левый график) и  $E_1$  (правый график) от  $\mu_2$ , полученных с помощью пакета FreeFem++ (F E) либо в среде Scilab (F Dif).

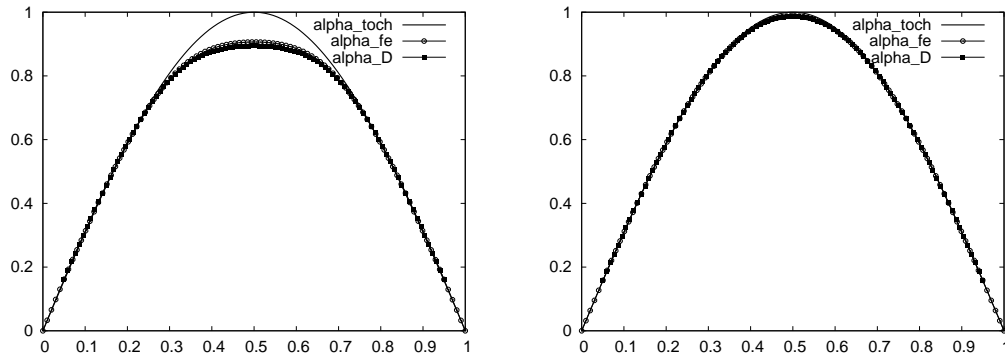


Рис. 3. Графики восстановления величины  $\alpha$  для  $\mu = 10^{-6}$  и  $\mu = 10^{-7}$ .

Напомним, что при проведении исследований мы используем дополнительную информацию о состоянии среды в виде измеренных значений концентрации вещества в некоторой области  $Q \subset \Omega$ . В связи с этим естественно возникает вопрос: “Где должна располагаться область  $Q$  сбора информации и при каких размерах этой области обеспечивается высокая точность решения задачи?” При исследовании этого вопроса автором был проведен ряд численных экспериментов для различных геометрий и размеров области измерений  $Q$ . На рис. 4 приведены графики зависимости ошибок  $E_0$  (левый график) и  $E_1$  (правый график) от размера области  $Q$ , в качестве которой выбирался прямоугольник  $0 < x \leq 1, 0 < y \leq y_0$  с переменным значением  $y_0$  (см. рис. 1). Сплошная линия на графиках показывает зависимость ошибки  $E_0$  или  $E_1$  от величины отношения площади области  $Q$  к площади  $\Omega$  при  $\mu_2 = 10^{-9}$  для  $\lambda = 0.1$ , при использовании пакета FreeFem++. Линия с маркерами имеет тот же смысл при использовании пакета Scilab. Из рис. 4 видно, что точность восстановления функции  $\alpha$  растет с увеличением размеров области  $Q$ . На рис. 5 приведены графики восстановления самой величины  $\alpha$  в двух конкретных случаях, когда площадь области измерений  $Q$  занимает 50% либо 60% от области  $\Omega$ .

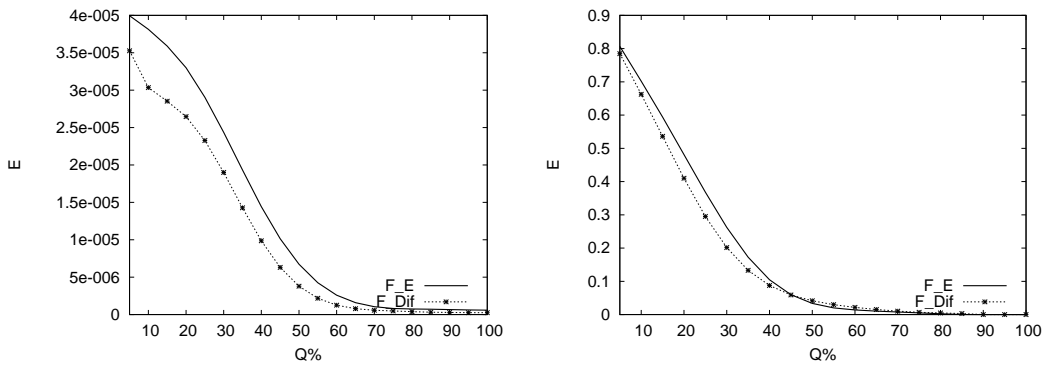


Рис. 4. Графики ошибок  $E_0$  (левый график) и  $E_1$  (правый график) полученных в среде Scilab (F Dif) и пакете FreeFem++(F E) для  $\alpha$  в зависимости от величины области  $Q$ .

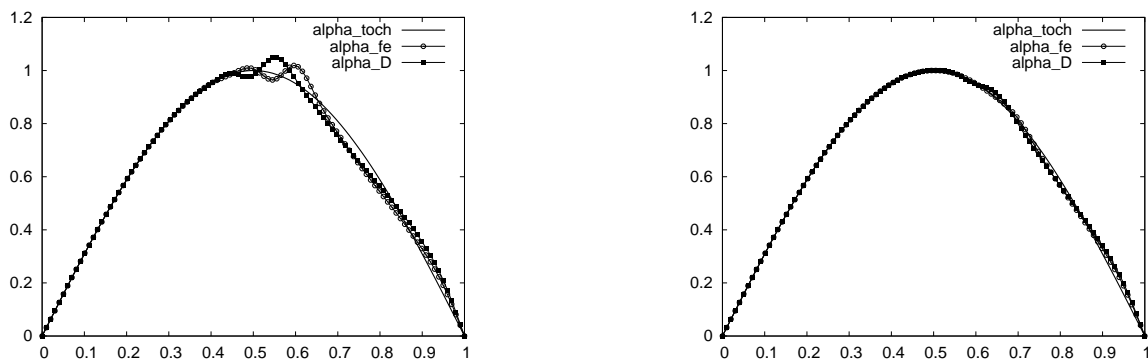


Рис. 5. Графики восстановления величины  $\alpha$  для  $Q = 50\%$  и  $Q = 60\%$ .

## 5. Выводы

В данной работе была исследована обратная экстремальная задача для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции (2.1), рассматриваемого в ограниченной области при смешанных граничных условиях (2.2). Доказана разрешимость указанной задачи и построена система оптимальности. На основе анализа свойств системы оптимальности установлены условия единственности и устойчивости решения для двух конкретных функционалов качества. Разработан численный алгоритм решения данной задачи, основанный на методе Ньютона. С использованием пакетов FreeFem++ и Scilab проведены вычислительные эксперименты, показавшие эффективность предложенного алгоритма. Анализ результатов численных экспериментов позволил выявить влияние параметра регуляризации  $\mu_2$ , шага сетки, выбора начального приближения, а также формы и размеров области  $Q$  на точность восстановления искомых параметров. Проведен сравнительный анализ результатов численных экспериментов, полученных при использовании метода сеток в среде Scilab и метода конечных элементов, используемого пакетом FreeFem++.

## Список литературы

- [1] Г. И. Марчук, *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*, Наука, М., 1982, 319 с.
- [2] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979.

- [3] А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Численные методы решения обратных задач математической физики*, Едиториал УРСС, Москва, 2004, 480 с.
- [4] K. Ito, K. Kunisch, "Estimation of the convection coefficient in elliptic equations", *Inverse Problems*, 1997, № 14, 995–1013
- [5] V. Lowe, W. Rundell, "The determination of a coefficient in an elliptic equation from average flux data", *J. Comput. Math.*, **70**, (1996), 173–187
- [6] Д. А. Терешко, "Численное решение задач идентификации параметров примеси для стационарных уравнений массопереноса", *Выч. техн.*, **9**:4, (2004), 92–98.
- [7] Е. А. Калинина, "Численное исследование обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения", *Дальневост. матем. журн.*, **6**:1-2, (2005), 57–70.
- [8] Г. В. Алексеев, Е. А. Калинина, "Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **10**:2, (2007), 3–16.
- [9] Г. В. Алексеев, "Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теплопереноса", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:6, (2007), 1055–1076.
- [10] Г. В. Алексеев, О. В. Соболева, Д. А. Терешко, "Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса", *Прикл. мех. техн. физ.*, **49**:4, (2008), 24–35.
- [11] Г. В. Алексеев, О. В. Соболева, "Об устойчивости решений экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса", *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2, (2009), 5–14.
- [12] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости*, Дальнаука, Владивосток, 2008, 365 с.
- [13] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985, 416 с.
- [14] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains. Monograph and studies in mathematics*, Pitman, London, 1985.
- [15] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 496 с.
- [16] Г. В. Алексеев, О. В. Соболева, Д. А. Терешко, *Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции – диффузии – реакции*, Препринт №5 Ин-та прикл. матем. ДВО РАН, Дальнаука, Владивосток, 2008, 40 с.
- [17] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974, 480 с.
- [18] Olivier Pironneau, Frederic Hecht, Antoine Le Hyaric, Jacques Morice, *FreeFem++ version 3.9-0 (2d and 3d)*, <http://www.freefem.org/ff++/index.htm>
- [19] *Home-Scilab WebSite*, <http://www.scilab.org>

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 мая 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03) и грантов РФФИ (проекты 09-01-98518-р\_восток\_а и 10-01-00219-а).

ABSTRACT

We study the coefficient inverse extremum problem for stationary equations of convection-diffusion-reaction in a bounded domain with mixed boundary conditions. We prove the stability of the solution of this problem with respect to small perturbations of both the cost functional and of the given function entering into the initial boundary value problem. The numerical algorithm is developed for solution of this extremum problem. It is based on Newton method for solving nonlinear equations and discretization of the linear boundary value problem by finite difference method or finite element method. Some results of numerical experiments are discussed.

Key words: *elliptic equation, third boundary value problem, mass transfer, coefficient inverse problem, solvability, stability, numerical algorithm.*