ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2010. Том 10. № 2. С. 185–191

УДК 517.972
MSC2000 49K21

© Ли Кух Хван*

Условие сильной монотонности кусочно-гладкой функции на решениях дифференциального включения

В работе рассматривается условие убывания функции на решениях дифференциального включения. Устанавливается достаточное условие монотонности кусочно-гладкой функции на решениях дифференциального включения.

Ключевые слова: *дифференциальное включение, сильная монотонность, кусочно-гладкие функции.*

1. Введение

Пусть заданы функция $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Будем предполагать, что абсолютно непрерывное решение $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (1) существует и удовлетворяет включению (1) почти всюду в $[a, b]$.

Говорят, что функция $V(\cdot)$ убывает на решениях дифференциального включения (1), если для каждого решения $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (1) выполнено соотношение

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b] : t_1 < t_2 \Longrightarrow V(x(t_1)) \geq V(x(t_2)). \tag{2}$$

В [5, 7, 8, 13] это свойство называется сильной монотонностью, поскольку оно требует выполнения (2) для всех решений дифференциального включения (1). Упомянем также работы [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], в которых обсуждаются условия сильной монотонности функции на решениях дифференциального включения и их некоторые применения.

В случае, когда функция $V(\cdot)$ является C^1-дифференцируемой, классическое условие, гарантирующее сильную монотонность, имеет вид

$$\sup_{f \in F(x)} \langle \nabla V(x), f \rangle \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, ∇ – градиент. В случае локальной липшицевости (или полунепрерывности снизу) функции $V(\cdot)$ соответствующее условие на основе производной Dini имеет вид [14]

$$\sup_{f \in F(x)} D^+V(x; f) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

[1]Университет им. Ким Ир Сена (г. Пхеньян, КНДР). Электронная почта: `alekseev@iam.dvo.ru`

а на основе обобщенного градиента оно имеет вид

$$\sup_{f\in F(x)} \max\{\langle p, f\rangle\ : p \in \partial V(x)\} \leq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Условие (3) означает, что если направления всех векторов $f \in F(x)$ для любой точки x отвечают невозрастающим направлениям функции $V(\cdot)$, то все решения дифференциального включения (1) также соответствуют невозрастающим направлениям функции $V(\cdot)$. Если $F(\cdot)$ – непрерывное многозначное отображение из $\mathbb{R}^n$ на совокупность непустых компактных множеств, то эти условия являются даже необходимыми [5]. В противном случае они являются достаточными.

Для ослабления вышеупомянутых условий в [3, 4, 7] введено следующее понятие многозначной производной $V(\cdot)$ по дифференциальному включению (1):

$$\dot{V}^{(1)}(x) = \{v \in \mathbb{R} : \exists f \in F(x)\ \text{ такой, что }\ \langle p, f\rangle = v\ \ \forall p \in \partial V(x)\},$$

– и показано, что при выполнении условия

$$\sup \dot{V}^{(1)}(x) \leq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

гарантируется сильная монотонность в случае, когда локально липшицева функция $V(\cdot)$ является Кларк-регулярной или неособой. В этой связи напомним (см. [4]), что функция $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется неособой (nonpathological, по зарубежной терминологии), если для каждой абсолютно непрерывной функции $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и для почти всех t множество $\partial V(x(t))$ является подмножеством аффинного подпространства, ортогонального к $\dot{x}(t)$). Неособые функции образуют широкий класс, который включает в себя класс Кларк-регулярных функций и ряд других классов функций. Проверка неособой функции является достаточно трудной.

В [12, Теорема 3.1] введено условие убывания

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$$

для каждого решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (1) для почти всех t и доказаны две леммы, которые позволяют упрощать проверку этого условия.

В данной работе исследуется достаточное условие сильной монотонности в случае, когда функция $V(\cdot)$ является кусочно-гладкой вида

$$V(x) = \min_{i\in I} \max_{j\in J_i} \varphi_{ij}(x) \tag{5}$$

либо

$$V(x) = \max_{i\in I} \min_{j\in J_i} \varphi_{ij}(x),\ \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Здесь I, J_i – конечные множества, $\varphi_{ij}(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – C^1-дифференцируемые функции. Функции такого вида не обязаны являться Кларк-регулярными.

В работе показывается, что данные функции являются неособыми, и предлагается условие сильной монотонности. Мы вводим ограничение на $F(\cdot)$ в условии (3) с помощью пространств, касательных к поверхностям, где нарушается гладкость кусочно-гладкой функции, без использования многозначной производной. Это означает, что кусочно-гладкая функция убывает по решениям дифференциального включения, хотя направления только некоторых, а не всех векторов, из $F(x)$ являются невозрастающими направлениями функции $V(\cdot)$. В случае кусочно-гладкой функции предложенное условие эквивалентно (4), но должно выполняться всюду, кроме счетного множества из $\mathbb{R}^n$. В конце работы рассматривается случай нестационарного дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$.

2. Основной результат

Основное внимание уделим рассмотрению функции $V(\cdot)$ вида (5). Для функции $V(\cdot)$ вида (6) будем отмечать лишь соответствующие различия.

В дальнейшем будем использовать следующие множества индексов:

$$K := \{(i,j) : j \in J_i, i \in I\}, \;\; I(x) := \{i \in I : \max_{j \in J_i} \varphi_{ij}(x) = V(x)\},$$

$$J(x,i) := \{j \in J_i : \varphi_{ij}(x) = \max_{j \in J_i} \varphi_{ij}(x)\},$$

$$L(x) := \{(i,j) : j \in J(x,i), i \in I(x)\}. \tag{7}$$

Для функции $V(\cdot)$ вида (6)

$$I(x) := \{i \in I : \min_{j \in J_i} \varphi_{ij}(x) = V(x)\}, \; J(x,i) := \{j \in J_i : \varphi_{ij}(x) = \min_{j \in J_i} \varphi_{ij}(x)\}).$$

Кусочно-гладкая функция $V(\cdot)$ локально липшицева и, кроме того, дифференцируема по направлению, то есть предел

$$DV(x;f) := \lim_{\delta \to +0} \frac{V(x+\delta f) - V(x)}{\delta} \tag{8}$$

существует и определяется следующей формулой (см. [1]):

$$DV(x;f) = \min_{i \in I(x)} \max_{j \in J(x,i)} \langle \nabla \varphi_{ij}(x), f \rangle. \tag{9}$$

В случае функции $V(\cdot)$, введенной в (6),

$$DV(x;f) = \max_{i \in I(x)} \min_{j \in J(x,i)} \langle \nabla \varphi_{ij}(x), f \rangle).$$

Введем для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ линейное подпространство $T_n(x)$ в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$T(x) = \{f \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla \varphi_{i_1 j_1}(x), f \rangle \; = \langle \nabla \varphi_{i_2 j_2}(x), f \rangle, \; (i_1,j_1),(i_2,j_2) \in L(x)\}. \tag{10}$$

В соответствии с (10) пространство $\mathbb{R}^n$ можно разделить на такие дифференцируемые многообразия различных размерностей, что сужение функции $V(\cdot)$ на каждое многообразие является гладким. Тогда в точке x n-мерного многообразия $T(x) = \mathbb{R}^n$; в точке x m-мерного многообразия, где $m < n$, $T(x)$ является m-мерным пространством, касательным в точке x к этому многообразию; в точке x 0-мерного многообразия $T(x) = \{0\}$.

Очевидно, что при $f \in T(x)$ выполняется равенство

$$DV(x;f) = \min_{i \in I(x)} \min_{j \in J(x,i)} \langle \nabla \varphi_{ij}(x), f \rangle = \langle \nabla \varphi_{ij}(x), f \rangle, \; (i,j) \in L(x). \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Положим*

$$[a,b]^* := \{t \in [a,b] : \dot{x}(t) \in T(x(t))\}. \tag{12}$$

Тогда дополнение $[a,b] \backslash [a,b]^*$ является множеством меры нуль.

(Лемма 1 означает, что кусочно-гладкая функция $V(\cdot)$ является неособой).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если определить отношение между точками x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^n$ равенством $L(x_1) = L(x_2)$, то это отношение является отношением эквивалентности, вследствие чего можно разделить пространство $\mathbb{R}^n$ на класс эквивалентности, то есть на конечное семейство $\{M_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,m}}$ таких множеств, что

1) $\cup_{\alpha=1}^{m} M_\alpha = \mathbb{R}^n$, $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta)$;

2) $x_1, x_2 \in M_\alpha \Longrightarrow L(x_1) = L(x_2)$.

(Конечность семейства $\{M_\alpha\}$ вытекает из конечности множеств I и J_i).

Из условия $\cup_{\alpha=1}^{m} M_\alpha = \mathbb{R}^n$ вытекает, что $[a,b] = \cup_{\alpha=1}^{m}\{t \in [a,b] : x(t) \in M_\alpha\}$. Тогда

$$[a,b]\backslash[a,b]^* = \cup_{\alpha=1}^{m}(\{t \in [a,b] : x(t) \in M_\alpha\}\backslash\{t \in [a,b] : \dot{x}(t) \in T(x(t))\}) =$$

$$= \cup_{\alpha=1}^{m}\{t \in [a,b] : x(t) \in M_\alpha \Lambda \dot{x}(t) \notin T(x(t))\}.$$

Для доказательства леммы остается показать, что множество $[a,b]_\alpha := \{t \in [a,b] : x(t) \in M_\alpha \Lambda \dot{x}(t) \notin T(x(t))\}$ является не более, чем счетным, то есть является множеством меры нуль. Для этого достаточно показать, что никакая точка из $[a,b]_\alpha$ не является точкой накопления множества $[a,b]_\alpha$.

Предположим противное. Тогда найдутся точка $t_0 \in [a,b]_\alpha$ и последовательность $\{t_n\}$ из $[a,b]_\alpha$ $(t_n \neq t_0)$, сходящаяся к t_0 при $n \to \infty$. Из условий $t_0, t_n \in [a,b]_\alpha$ вытекает, что $x(\cdot)$ дифференцируема в t_0; $x(t_0)$, $x(t_n) \in M_\alpha$, т.е. $L(x(t_0)) = L(x(t_n))$; $\dot{x}(t_0) \notin T(x(t_0))$.

Теперь покажем, что $\dot{x}(t_0) \in T(x(t_0))$. Это противоречит условию $\dot{x}(t_0) \notin T(x(t_0))$.

Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in L(x(t_0))$. Тогда из определения $L(\cdot)$ (7) и равенства $L(x(t_0)) = L(x(t_n))$ вытекает, что $\varphi_{i_1 j_1}(x(t_0)) = \varphi_{i_2 j_2}(x(t_0))$ и $\varphi_{i_1 j_1}(x(t_n)) = \varphi_{i_2 j_2}(x(t_n))$. Поэтому справедливо равенство

$$\langle \nabla\varphi_{i_1 j_1}(x(t_0)), \dot{x}(t_0)\rangle = \left.\frac{d\varphi_{i_1 j_1}(x(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{i_1 j_1}(x(t_n)) - \varphi_{i_1 j_1}(x(t_0))}{t_n - t_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{i_2 j_2}(x(t_n)) - \varphi_{i_2 j_2}(x(t_0))}{t_n - t_0} = \left.\frac{d\varphi_{i_2 j_2}(x(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \langle \nabla\varphi_{i_2 j_2}(x(t_0)), \dot{x}(t_0)\rangle.$$

Из определения $T(\cdot)$ в (10) вытекает, что $\dot{x}(t_0) \in T(x(t_0))$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если во всех точках x из $\mathbb{R}^n$, кроме счетного множества, справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in F_T(x)} DV(x; f) \leq 0, \tag{13}$$

то функция $V(\cdot)$ убывает по дифференциальному включению (1). Здесь

$$F_T(x) := F(x) \cap T(x). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого решения дифференциального включения (1) выполнено (2). Для этого выберем и зафиксируем произвольное решение $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (1). В силу абсолютной непрерывности решения $x(\cdot)$ и локальной липшицевости функции $V(\cdot)$ функция $t \to V(x(t))$ на $[t_1, t_2]$ также является абсолютно непрерывной, поэтому

$$V(x(t_2)) - V(x(t_1)) = \int\limits_{[t_1,t_2]} \frac{dV(x(t))}{dt} dt.$$

Обозначим через $[t_1, t_2]'$ множество всех точек t из $[t_1, t_2]$, в которых $\dot{x}(t) \in F(x(t))$, $\dot{x}(t) \in T(x(t))$, а функция $V(x(\cdot))$ дифференцируема в t. Тогда в силу определения решения дифференциального включения, леммы 1 и абсолютной непрерывности $V(x(\cdot))$ дополнение $[t_1, t_2]\backslash[t_1, t_2]$ является множеством меры нуль, вследствие чего

$$V(x(t_2)) - V(x(t_1)) = \int\limits_{[t_1,t_2]'} \frac{dV(x(t))}{dt} dt.$$

Обозначим через S счетное множество точек, в которых не выполняется неравенство (13), и разобьем $[t_1, t_2]$ следующим образом:

$$[t_1, t_2]' = J \cup \bigcup_{x \in S} (J'_x \cup J''_x).$$

Здесь

$$J := \{t \in [t_1, t_2]' : x(t) \notin S\}; \quad J_x := \{t \in [t_1, t_2]' : x(t) = x\};$$

$$J'_x := \{t \in J_x : t\text{– точка накопления множества } J_x\};$$

$$J''_x := J_x \backslash J'_x \text{ при } x \in S.$$

Так как множество J''_x является счетным множеством, то есть множеством меры нуль, то множество $\bigcup_{x\in S} J''_x$ также является множеством меры нуль, поэтому

$$V(x(t_2)) - V(x(t_1)) = \int\limits_{J\cup\bigcup_{x\in S} J'_x} \frac{dV(x(t))}{dt} dt.$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что $\frac{dV(x(t))}{dt} \le 0$ при $t \in J \cup \bigcup_{x\in S} J'_x$.

В силу [2, с. 63–65] и равенства (11)

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = DV(x(t); \dot{x}(t)) = \langle \nabla\varphi_{ij}(x(t)), \dot{x}(t)\rangle, \quad (i, j) \in L(x(t)).$$

Тогда, если $t \in J'_x$ $(x \in S)$, то $\dot{x}(t) = 0$, поэтому $\frac{dV(x(t))}{dt} = 0$; а если $t \in J(\subset [t_1, t_2]'\backslash S)$, то в силу соотношения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \cap T(x(t)) = F_T(x(t))$$

и неравенства (13)

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = DV(x(t); \dot{x}(t)) \le \sup_{f\in F_T(x(t))} DV(x(t); f) \le 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что множество $F_T(x)$ может быть пустым. В этом случае полагаем по определению $\sup \emptyset = -\infty$.

Следствие 1. Если во всех точках x из $\mathbb{R}^n$, кроме счетного множества точек, справедливо соотношение

$$\sup_{f\in F(x)} \min_{i\in I(x)} \min_{j\in J(x,i)} \langle \nabla\varphi_{ij}(x), f\rangle \le 0, \tag{15}$$

то функция $V(\cdot)$ убывает по дифференциальному включению (1).

В самом деле, из равенства (11) вытекает неравенство

$$\sup_{f\in F_T(x)} DV(x; f) \le \sup_{f\in F(x)} \min_{i\in I(x)} \min_{j\in J(x,i)} \langle \nabla\varphi_{ij}(x), f\rangle.$$

В силу этого из неравенства (15) вытекает неравенство (13). Следствие 1 доказано.

В связи со следствием 1 заметим, что в случае кусочно-гладкой функции $V(\cdot)$ условие (3) эквивалентно неравенству

$$\sup_{f\in F(x)} \min_{i\in I(x)} \max_{j\in J(x,i)} \langle \nabla\varphi_{ij}(x), f\rangle \le 0.$$

(В случае функции $V(\cdot)$, удовлетворяющей (6), условие (3) эквивалентно неравенству

$$\sup_{f\in F(x)} \max_{i\in I(x)} \min_{j\in J(x,i)} \langle \nabla\varphi_{ij}(x), f\rangle \le 0.)$$

Замечание 1. В силу равенства (11) неравенство (13) на самом деле равносильно неравенству

$$\sup_{f\in F_T(x)} \langle \nabla\varphi_{ij}(x), f\rangle \le 0$$

для любой выбранной пары индексов $(i, j) \in L(x)$.

Замечание 2. Отметим, что нельзя заменить выражение “во всех точках x из $\mathbb{R}^n$, кроме счетного множества точек” теоремы 1 (или следствия 1) выражением “для почти всех точек x из $\mathbb{R}^n$”. Например, непрерывная кривая является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Если неравенство (13) не выполняется на этой кривой, причем эта кривая является решением дифференциального включения (1), то условие теоремы 1 не дает каких-либо ограничений на это решение.

3. Случай нестационарного дифференциального включения

Пусть заданы функция $V(\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Как и выше, предполагается, что существует абсолютно непрерывное решение дифференциального включения (16).

Говорят, что функция $V(\cdot)$ убывает по дифференциальному включению (16), если для каждого решения $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (16) выполняется соотношение

$$\forall t_1, t_2 \in [a,b] : t_1 < t_2 \Longrightarrow V(t_1, x(t_1)) \geq V(t_2, x(t_2)).$$

Указанное свойство также называется сильной монотонностью.

Ниже мы будем рассматривать условие сильной монотонности кусочно-гладкой функции $V(\cdot)$ следующего вида:

$$V(t,x) = \min_{i \in I} \max_{j \in J_i} \varphi_{ij}(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{17}$$

(или

$$V(t,x) = \max_{i \in I} \min_{j \in J_i} \varphi_{ij}(t,x) \ ). \tag{18}$$

Здесь I, J_i – конечные множества; $\varphi_{ij}(\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ – C^1– дифференцируемые функции.

Рассматривая переменную времени t как вспомогательную переменную состояния, можно трансформировать дифференциальное включение (16) в дифференциальное включение (1), вследствие чего можно для этого случая применять теорему 1. Далее будем рассматривать некоторое обобщение. Для этого будем использовать изложенный в начале §2 материал и обозначения, в которых следует заменить x на t, x.

Лемма 2. *Пусть $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Положим*

$$[a,b]^* := \{t \in [a,b] : (1, \dot{x}(t)) \in T(t, x(t))\}.$$

Тогда дополнение $[a,b] \backslash [a,b]^*$ является множеством меры нуль.

Лемма 2 утверждает, другими словами, что кусочно-гладкая функция $V(\cdot)$, определенная в (17) или в (18), является неособой.

Рассматривая переменную времени t как вспомогательную переменную состояния, аналогично лемме 1 можно доказать лемму 2.

Теорема 2. *Если для почти всех точек $t \in \mathbb{R}$ и всех точек $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in F_T(t,x)} DV(t, x : 1, f) \leq 0,$$

то функция $V(\cdot)$, введенная в (17), (18), убывает по дифференциальному включению (16). Здесь

$$F_T(t,x) := \{f \in F(t,x) : (1,f) \in T(t,x)\}.$$

Теорема 2 доказывается аналогично предложению 8 из [7, §2.4].

Следствие 2. Если в почти всех точках t из $\mathbb{R}$ и во всех точках x из $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\sup_{f \in F(t,x)} \min_{i \in I(t,x)} \min_{j \in J(t,x,i)} \langle \nabla \varphi_{ij}(t,x), (1,f) \rangle \leq 0,$$

то функция $V(\cdot)$, определенная в (17) либо в (18), убывает по дифференциальному включению (16).

Автор благодарит Л.Т. Ащепкова и Г.В. Алексеева за ценные советы и полезные обсуждения результатов работы.

Список литературы

[1] В. Ф. Демьянов, *Минимакс: дифференцируемость по направлениям*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1974, 112 с.

[2] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981.

[3] A. Bacciotti, F. Ceragioli, “Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions”, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, **4**, (1999), 361–376.

[4] A. Bacciotti, F. Ceragioli, “Nonsmooth Lyapunov functions and discontinuous Caratheodory systems”, Proc. of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004), Stuttgart, **3**, (2004), 1115–1120.

[5] A. Bacciotti, F. Ceragioli, L. Mazzi, “Differential inclusions and monotonicity conditions for nonsmooth Lyapunov functions”, *Set-Valued Analysis*, **8**, (2000), 299–309.

[6] A. Bacciotti, L. Mazzi, “An invariance principle for nonlinear switched systems”, *Systems & Control Letters*, **54**:11, (2005), 1109–1119.

[7] F. Ceragioli, *Discontinuous ordinary defferential equations and stabilization*, Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica (PhD Thesis), Universita di Firenze, 2000.

[8] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, “Qualitative properties of trajectories of control systems: A survery”, *J. Dynam. Contr. Systems*, **1**:1, (1995), 1–48.

[9] J. Cortes, F. Bullo, “Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **44**, (2005), 1543–1574.

[10] Qing Hui, Wassim M. Haddad, Sanjay P. Bhat, “Semistability theory for differential inclusions with applications to consensus problems in dynamical networks with switching topology”, Proc. of the 2008 American Control Conference (Seattle, WA, June), 2008, 3981–3986.

[11] S. Mirica, “Reducing a differential game to a pair of optimal control problems”, *Progress in Nonlinear Defferential Equations and Their Applications*, **75**, (2007), 269–283.

[12] Y. V. Orlov, *Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*, Springer, London, 2008.

[13] E. O. Roxin, “Stability in general control systems”, *J. Differential Equations*, **1**, (1965), 115–150.

[14] В. Ф. Демьянов, “Обобщение понятия производной”, *Соросовский образовательный журнал*, 1996, № 5, 121–127.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 8 января 2010 г.

Li Kuh Hwan The strong monotonicity condition for piecewise smooth function on solutions of differental inclusions. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 185–191.

ABSTRACT

The condition of decreasing of function on solutions of differential conslusion is studied. Weakened condition in the case of a piecewise smooth function is suggested.

Key words: *differential inclusion, strong monotonicity, piecewise smooth functions.*