*ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ.* 2010. Том 10. № 2. С. 199–204

УДК 517.95
MSC2000 35B35, 35Q30

© А.Ю. Чеботарев*

# Конечномерная стабилизация с заданной скоростью систем типа Навье – Стокса

Изучается стабилизация неустойчивого стационарного решения операторного уравнения с квадратичной нелинейностью. Строится ограниченное конечномерное управление с обратной связью экспоненциально стабилизирующее данное решение.

Ключевые слова: *конечномерное управление, уравнения Навье – Стокса, стабилизация с обратной связью.*

## 1. Постановка задачи стабилизации

В реальных физических процессах неизбежно возникают непредусмотренные флуктуации и поэтому возникает необходимость разработки методов построения управлений, способных реагировать на непредусмотренные возмущения и подавлять их. Проблемы стабилизации для систем Навье – Стокса привлекают внимание специалистов в силу прикладной значимости в задачах, связанных с турбулентностью. В работах [1]–[3] разработаны методы стабилизации с границы решений системы Навье – Стокса, основанные на решении смешанной краевой задачи со специально построенным начальным условием, принадлежащим инвариантному устойчивому многообразию. В последние годы появляется достаточно много результатов (например [4]–[8]), посвященных построению стабилизирующих операторов управления для уравнений гидродинамики. Указанные результаты связаны с развитием методов Ляпунова исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений и для их получения используется алгебраическое уравнение Риккати для операторов стабилизации, которое возникает при решении вспомогательных задач оптимального управления с бесконечным горизонтом. Указанные конструкции стабилизации являются сложными для реализации и требуют высокой гладкости стационарного решения.

В данной работе рассмотрена задача стабилизации неустойчивого стационарного решения эволюционного операторного уравнения типа Навье – Стокса в гильбертовом пространстве. При построении стабилизирующего управления учитываются спектральные свойства оператора, моделирующего диссипативные или вязкие члены в моделях гидродинамики. Стабилизация с заданной скоростью достигается за счет ограниченного конечномерного управления. Предложенный метод применим для стабилизации слабых (турбулентных) решений систем Навье – Стокса.

Определим необходимые для постановки задачи пространства и операторы. Пусть $V$ и $H$ – вещественные гильбертовы пространства, $V'$ – пространство, сопряженное с $V$; $V \subset H \subset V'$, при этом вложение $V \subset H$ плотно и компактно. Нормы в пространствах $V, H$ и в $V'$ обозначаем соответственно через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_*$; $(f, v)$ – значение функционала $f \in V'$

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041,Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в $H$, если $f \in H; ((\cdot,\cdot))$ – скалярное произведение в пространстве $V$.

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $A : V \to V'$ и билинейный непрерывный оператор $B : V \times V \to V'$ такие, что

$$(Ay, y) \geq \alpha \|y\|^2, \quad (Ay, z) \leq \gamma \|y\| \cdot \|z\|, \quad (Ay, z) = (Az, y); \tag{1}$$

$$(B(y, z), z) = 0, \quad y, z \in V; \tag{2}$$

$$((B(y_1, y_2), y_3) \leq C_0 \|y_1\| \cdot \|y_2\| \cdot \|y_3\|, \tag{3}$$

$$((B(y_1, y_2), y_3) \leq C_1 \|y_1\| \cdot \|y_2\| \cdot |y_3|^{1/4} \cdot \|y_3\|^{3/4}, \quad y_1, y_2, y_3 \in V. \tag{4}$$

Здесь положительные постоянные $\alpha$, $\gamma$, $C_0$, $C_1$ не зависят от $y$, $z$, $y_i$. Неравенства (1) соответствуют оценкам вязких, а неравенства (3), (4) – конвективных членов в трехмерных моделях динамики несжимаемой жидкости. Заметим, что свойства оператора $A$ позволяют в пространстве $V$ в качестве скалярного произведения выбрать билинейную форму $((y, z)) = (Ay, z)$.

Пусть $f \in V'$ – заданный элемент. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$y' + Ay + B[y] = f. \tag{5}$$

Здесь и далее $y' = dy/dt$, $B[y] = B(y, y)$. Уравнение (5) моделирует нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. В виде (5) можно записать, например, краевые задачи для уравнений Навье – Стокса с условием прилипания на границе или с заданными граничными значениями полного напора, а также краевые задачи для уравнений магнитной гидродинамики [9]–[12].

Пусть $y_s \in V$ – стационарное решение (5), то есть

$$Ay_s + B[y_s] = f, \tag{6}$$

и $y_s$ является неустойчивой особой точкой динамической системы, порождаемой эволюционным уравнением (5) в фазовом пространстве $H$.

Задача стабилизации заключается в следующем:

*Для заданного $\sigma > 0$ требуется найти оператор управления с обратной связью $S(\cdot, t) : H \to H$ такой, что решение задачи Коши для замкнутой системы*

$$y' + Ay + B[y] = f + S(y, t), \ \ t > 0, \ \ y(0) = y_0 \in H, \tag{7}$$

*сходится к $y_s$ с заданной скоростью $\sigma$:*

$$|y(t) - y_s| \leq C\mathrm{e}^{-\sigma t} \quad \textit{при } t \to +\infty, \tag{8}$$

*если величина $|y_0 - y_s|$ достаточно мала.*

Основной результат работы состоит в построении стабилизирующего оператора $S(\cdot, t)$ такого, что $y_s$ является устойчивой особой точкой динамической системы (7) в фазовом пространстве $H$, при этом оператор $S(\cdot, t)$ имеет конечномерный образ, лежащий в шаре заданного радиуса.

## 2. Разрешимость замкнутой системы

В силу теоремы Гильберта – Шмидта, собственные элементы $\{w_j\}$ оператора $A$, определяемые из условий:

$$Aw_j = \lambda_j w_j,\ j = 1, 2, \dots\ (w_i, w_j) = \delta_{ij},\ 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots,$$

образуют базис пространств $H$ и $V$, причем $\lambda_m \to +\infty$ при $m \to \infty$.

Пусть $H_m = span\{w_1, \dots, w_m\}$ – линейная оболочка первых $m$ собственных элементов оператора $A$. Через $P_m:\ H \mapsto H_m$ обозначим оператор проектирования на $H_m$. Отметим сразу справедливость неравенств

$$|y|^2 \le \lambda_1^{-1}\|y\|^2\ \ \forall y \in V, \quad |y|^2 \le \lambda_{m+1}^{-1}\|y\|^2\ \ \forall y \in V \cap (H \ominus H_m). \tag{9}$$

Для положительных параметров $\sigma$, $\varepsilon$, $r$ определим стабилизирующий оператор $S$:

$$S(y,t) = -r \cdot \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} P_m(y - y_s), & \text{если } |P_m(y-y_s)| \le \varepsilon \mathrm{e}^{-\sigma t}, \\ \frac{\mathrm{e}^{-\sigma t}}{|P_m(y-y_s)|} P_m(y-y_s), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

Покажем разрешимость задачи Коши (7) с определенным выше оператором $S$, на конечном интервале времени. Для банахова пространства $X$ через $L^q(0,T;X)$ обозначим пространство $L^q$ функций, определенных на $(0,T)$ со значениями в $X$, $q \ge 1$.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in V'$, $y_s \in V$ – решение стационарного уравнения (6). Тогда для всех $y_0 \in H$, $T > 0$ существует решение $y \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, $y' \in L^1(0,T;V')$ замкнутой системы*

$$y' + Ay + B[y] = f + S(y,t),\ t \in (0,T), \ \ y(0) = y_0.$$

Доказательство. Существование решения доказывается путем получения априорных оценок для галеркинских приближений $y_k$, определяемых из системы $(k > m)$

$$\forall w \in H_m\ \ (y_k' + Ay_k + B[y_k] - f - S(y_k,t), w) = 0, \ \ t \in (0,T), \quad y_k(0) = P_k y_0, \tag{11}$$

и последующего предельного перехода по $k \to +\infty$. Получим нужные априорные оценки $y_k$. Заметим, что $(f,y) \le (\|f\|_*^2 + \|y\|^2)/2$,

$$(S(y,t),y) \le r\mathrm{e}^{-\sigma t}|y_s| - r \cdot \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}|P_m(y-y_s)|^2, & \text{если } |P_m(y-y_s)| \le \varepsilon \mathrm{e}^{-\sigma t}, \\ \mathrm{e}^{-\sigma t}|P_m(y-y_s)|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда, полагая в (11) $w = y_k$ и интегрируя по $t$, получим оценку

$$|y_k(t)|^2 + \int_0^t \|y_k(\tau)\|^2 d\tau \le |y_0|^2 + \frac{2r}{\sigma}(1 - \mathrm{e}^{-\sigma t})|y_s| + t\|f\|_*^2. \tag{12}$$

Выведем теперь оценку, гарантирующую компактность последовательности $y_k$ в $L^2(0,T;H)$. Оператор $(-S(y,t))$ является производной по $y$ выпуклого функционала

$$\Phi(y,t) = r \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}|P_m(y-y_s)|^2, & \text{если } |P_m(y-y_s)| \le \varepsilon \mathrm{e}^{-\sigma t}, \\ \mathrm{e}^{-\sigma t}(|P_m(y-y_s)| - \varepsilon \mathrm{e}^{-\sigma t}/2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

В системе (11) выберем $w = y_k(t) - y_k(\tau)$, где $t, \tau \in (0,T)$. Тогда получаем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}|y_k(t) - y_k(\tau)|^2 + (Ay_k(t) + B[y_k(t)] - f, y_k(t) - y_k(\tau)) = (S(y_k(t),t), y_k(t) - y_k(\tau)) \le$$

$$\leq \Phi(y_k(\tau),t) - \Phi(y_k(t),t) \leq \Phi(y_k(\tau),t).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $t$ на отрезке $[\tau, \tau+h]$ и по $\tau$ на отрезке $[0, T-h]$ и воспользуемся свойствами операторов (1)–(3) и оценкой (12). В результате нетрудно вывести оценку равностепенной непрерывности для последовательности $y_k(t)$ :

$$\int\limits_0^{T-h} |y_k(\tau+h) - y_k(\tau)|^2 d\tau \leq Ch^{1/2}. \tag{13}$$

Здесь постоянная $C > 0$ не зависит от $k$, $\varepsilon$. Оценки (12), (13) позволяют совершить в (11) предельный переход и доказать разрешимость задачи (7).

## 3. Конечномерная стабилизация

Выясним условия, выполнение которых гарантирует, что стационарное состояние $y_s \in V$ является экспоненциально устойчивой особой точкой динамической системы (7). Пусть $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}(y(t) - y_s)$, $t > 0$. Функция $\varphi$ является решением следующей задачи:

$$\varphi' - \sigma\varphi + A\varphi + B(y_s + \varphi \mathrm{e}^{-\sigma t}, \varphi) + B(\varphi, y_s) + R_s(\varphi) = 0,\ t > 0,\ \varphi(0) = y_0 - y_s. \tag{14}$$

Здесь

$$R_s(\varphi) = r \cdot \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} P_m\varphi, & \text{если } |P_m\varphi| \leq \varepsilon, \\ \frac{1}{|P_m\varphi|} P_m\varphi, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$

Функция $\varphi$ удовлетворяет следующему неравенству, которое получается путем предельного перехода в соответствующем равенстве, записанном для $\varphi_k(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}(y_k(t) - P_k y_s)$, где $y_k$ – решение системы (11).

$$\frac{1}{2}\frac{d|\varphi|^2}{dt} + \|\varphi\|^2 + (B(\varphi, y_s), \varphi) + (R_s(\varphi), \varphi) \leq \sigma|\varphi|^2, \quad t > 0. \tag{16}$$

Слагаемое $(B(\varphi, y_s), \varphi)$ в левой части (16), в силу справедливости условия (4), оценивается по модулю сверху величиной $C_1\|y_s\| \cdot \|\varphi\|^{7/4} \cdot |\varphi|^{1/4}$. Применив неравенство Юнга, получаем из (16) неравенство

$$\frac{d|\varphi|^2}{dt} + \|\varphi\|^2 + 2(R_s(\varphi), \varphi) \leq C_2|\varphi|^2 = C_2(|P_m\varphi|^2 + |Q_m\varphi|^2), \quad t > 0. \tag{17}$$

Здесь $Q_m\varphi = \varphi - P_m\varphi$, $C_2 = (7/4)^7 C_1^8 \|y_s\|^8/4 + 2\sigma$. Учтем, что собственные значения оператора $A$ обладают свойством $\lambda_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$, и выберем $m_*$ так, что

$$C_2/\lambda_{m_*+1} \leq 1/2. \tag{18}$$

Тогда, применив второе неравенство в (9), получим

$$C_2|Q_m\varphi|^2 \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2.$$

Из (17) при $m > m_*$ следует оценка

$$\frac{d}{dt}|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + \alpha(|P_m\varphi|)|P_m\varphi| \leq 0, \tag{19}$$

где

$$\alpha(p) = \begin{cases} (r/\varepsilon - C_2)p, & \text{если } 0 \leq p \leq \varepsilon, \\ 2r - C_2, & \text{если } p > \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть параметр $\varepsilon < r/C_2$. Тогда, при условии $|\varphi(0)| < 2r/C_2$, из неравенства (19) вытекает оценка
$$\frac{d}{dt}|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \leq 0.$$
Проинтегрировав полученное дифференциальное неравенство, получаем глобальную на $(0, +\infty)$ ограниченность функции $\varphi$.
$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|, \quad \int_0^{+\infty} \|\varphi(t)\|^2 dt \leq 2|\varphi(0)|^2.$$
Таким образом, справедлив следующий результат о стабилизации с заданной скоростью $\sigma$.

**Теорема 2.** *Пусть $f \in V'$, $y_s \in V$ – решение стационарного уравнения*
$$Ay_s + B[y_s] = f.$$
*Тогда для всех $y_0 \in H$, $m > m_*$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условиям*
$$|y_0 - y_s| < 2r/C_2, \quad C_2/\lambda_{m_*+1} \leq 1/2, \quad \varepsilon < r/C_2,$$
*существует решение $y \in L^\infty(0, +\infty; H) \cap L^2_{loc}(0, +\infty; V)$ динамической системы*
$$y' + Ay + B[y] = f + S(y, t), \ t > 0, \ y(0) = y_0,$$
*такое, что*
$$|y(t) - y_s| \leq |y_0 - y_s|\mathrm{e}^{-\sigma t}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\sigma t}\|y(t) - y_s\|^2 dt \leq 2|y_0 - y_s|^2.$$

## Список литературы


[1] A. V. Fursikov, "Stabilizability of two-dimensional Navier – Stokes equations with help of a boundary feedback control", *J. Math. Fluid Mech*, **3**:3, (2001), 259–301.

[2] А. В. Фурсиков, "Стабилизация с границы решений системы Навье – Стокса: разрешимость и обоснование возможности численного моделирования", *Дальневост. матем. журн.*, **4**:1, (2003), 86–100.

[3] A. V. Fursikov, "Stabilization for the 3D Navier – Stokes system by feedback boundary control", *Discrete and Cont. Dyn. Syst.*, **10**:1–2, (2004), 289–314.

[4] V. Barbu, "Feedback stabilization of Navier – Stokes equations", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **9**, (2003), 197–205.

[5] V. Barbu, R. Triggiani, "Internal stabilization of Navier – Stokes equations with finite-dimensional controllers", *Indiana Univ. Math. J.*, **53**:5, (2004), 1443–1494.

[6] V. Barbu, I. Lasiecka, R. Triggiani, "Abstract settings for tangential boundary stabilization of Navier – Stokes equations by high- and low-gain feedback controllers", *Nonlinear Analysis*, **64**:12, (2006), 2704–2746.

[7] J.-P. Raymond, "Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier – Stokes equations", *J. Math. Pures Appl*, **87**:6, (2007), 627–669.

[8] S. S. Ravindran, "Stabilization of Navier – Stokes equations by boundary feedback", *Intern. J. of Num. Analysis and Modeling*, **4**:3–4, (2007), 608–624.

[9] Р. Темам, *Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981.

[10] А. Ю. Чеботарев, "Обратные задачи для нелинейных эволюционных уравнений типа Навье – Стокса", *Дифференциальные уравнения*, **31**:3, (1995), 517–524.

[11] M. Sermange, R. Temam, "Some mathematical questions related to the MHD equations", *Comm. on Pure and Applied Math.*, **36**, (1983), 635–664.

[12] А. Ю. Чеботарев, “Вариационные неравенства для оператора типа Навье – Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости”, *Математические заметки*, **70**:2, (2001), 296–307.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 25 мая 2010 г.

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН (проект 09-I-ОМН-08) и гранта АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1/1502. 2009-11).

---

*Chebotarev A. Yu.* Finite-dimensional stabilization with given rate for the Navier – Stokes systems. Far Eastern Mathematical Journal. 2010. V. 10. № 2. P. 199–204.

ABSTRACT

The stabilization for unstable stationary solution of operator equation with quadratic nonlinearity is studied. The bounded finite-dimensional feedback control exponentially stabilizing this solution is presented.

Key words: *finite-dimensional control, Navier – Stokes equations, feedback stabilization.*