ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 1. С. 03–09

УДК 511.335+517.524
MSC2000 11D07, (11N56, 11Y65)

© И. С. Воробьев[1]

Экспериментальное исследование проблемы Фробениуса для трех аргументов

В статье описаны результаты численных экспериментов, связанных с проблемой Фробениуса. В частности, построены графики плотности распределения величин $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$, $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ и $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$, где $f(a,b,c)$ — модифицированное число Фробениуса (наибольшее целое M такое, что уравнение $ax+by+cz=M$ не имеет решений в натуральных числах) и $N(a,b,c)$ — модифицированный род полугруппы, порожденной числами a,b,c. Для тех же отношений найдены приближенные значения математических ожиданий. В статье также доказано новое неравенство для рода $N(a,b,c) \geqslant \frac{5\sqrt{3}}{9}\sqrt{abc}$.

Ключевые слова: *цепные дроби, числа Фробениуса.*

1. Введение

Пусть дан набор $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ взаимно простых в совокупности положительных целых чисел. Рассмотрим линейную форму

$$\phi_a = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k.$$

Будем называть целое число L представимым формой ϕ_a, если оно удовлетворяет указанному равенству при фиксированных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и при неотрицательных целых $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Числом Фробениуса $g(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называют самое большое непредставимое формой ϕ_a число при заданных $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Модифицированным числом Фробениуса называют

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = g(a_1, a_2, \ldots, a_k) + a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Также рассмотрим величину $n(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — количество целых неотрицательных чисел, непредставимых формой ϕ, и соответствующее модифицированное значение

$$N(a_1, a_2, \ldots, a_k) = n(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_k}{2} - \frac{1}{2}.$$

Задача о нахождении величин f и N называется задачей Фробениуса [1].

При $k = 2$ известны явные формулы для получения чисел f и N:

$$f(a_1, a_2) = a_1a_2, \qquad N(a_1, a_2) = \frac{a_1a_2}{2}.$$

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: vorobeymc@mail.ru

Нас будет интересовать случай задачи, в котором $k=3$. Вместо a_1, a_2, a_3 будем писать a, b, c и предполагать, что эти числа попарно взаимно просты. Если это не так, то нахождение значений f и N можно свести к попарно взаимно простым аргументам при помощи формул Джонсона [2]

$$f(da, db, c) = df(a, b, c)$$

и Рёдсета[3]

$$N(da, db, c) = dN(a, b, c). \qquad (1)$$

Теперь мы можем воспользоваться формулами из [3]:

$$f(a, b, c) = b\, s_v + c\, p_{v+1} - \min(b\, s_{v+1}, c\, p_v),$$

$$N(a, b, c) = \frac{1}{2}\left[b\,(s_v - s_{v+1}) + c\, p_{v+1} + \frac{1}{a}\, s_{v+1}\,(p_{v+1} - p_v)\,(b\, s_v - c\, p_v)\right]. \qquad (2)$$

Нулевой член последовательности $\{s_i\}$ определяется сравнением

$$bs_0 \equiv c \pmod{a}, \qquad 0 \le s_0 < a.$$

Далее последовательность строится применением соответствующего варианта алгоритма Евклида к числам a и s_0 [4]:

$$\begin{cases} a = s_{-1} &= q_1 s_0 - s_1, \qquad 0 \le s_1 < s_0; \\ \quad s_0 &= q_2 s_1 - s_2, \qquad 0 \le s_2 < s_1; \\ \quad s_1 &= q_3 s_2 - s_3, \qquad 0 \le s_3 < s_2; \\ \quad \dots & \\ \quad s_{m-2} &= q_m s_{m-1} - s_m, \quad 0 \le s_m < s_{m-1}; \\ \quad s_{m-1} &= q_{m+1} s_m, \qquad 0 = s_{m+1} < s_m, \text{ где } q_1, \dots, q_{m+1} \ge 2. \end{cases}$$

Последовательность $\{p_i\}$ определяется по найденным $q_1, \dots, q_{m+1}$ таким образом:

$$p_{-1} = 0, \qquad p_0 = 1, \qquad p_{i+1} = q_{i+1} p_i - p_{i-1}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Так как $q_i \ge 2$, то $p_{i+1} > p_i$, значит,

$$0 = \frac{s_{m+1}}{p_{m+1}} < \frac{s_m}{p_m} < \ldots < \frac{s_0}{p_0} < \frac{s_{-1}}{p_{-1}} = \infty,$$

и найдется единственное целое число $-1 \le v \le m$, для которого

$$\frac{s_{v+1}}{p_{v+1}} \le \frac{c}{b} < \frac{s_v}{p_v}.$$

В настоящее время имеется ряд гипотез, связанных с числами Фробениуса.

Гипотеза 1. Существует слабая асимптотика (точное определение см. в [1]) вида $f(a_1, a_2, \dots, a_k) \sim C(k) \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_k}$ [1, задача 1999-8], [5].

Из [6] известно, что $C(3) = \frac{8}{\pi}$.

Гипотеза 2. Отношение $\frac{N(a_1, a_2, \dots, a_k)}{f(a_1, a_2, \dots, a_k)}$ для больших векторов a в среднем равно $1 - \frac{1}{k}$ [1, задача 1999-9].

Эта гипотеза не подтвердилась, так как для случая $k=3$ в работе [8] доказано, что

$$\frac{1}{2} \le \frac{N(a, b, c)}{f(a, b, c)} < \frac{5}{9}. \qquad (3)$$

Гипотеза 3 (Вопрос Вильфа). Для любого фиксированного числа k справедливо неравенство

$$\frac{n(a_1,a_2,\ldots,a_k)}{g(a_1,a_2,\ldots,a_k)+1} \le 1-\frac{1}{k},$$

(см. [9]). Известно, что при $k=3$ эта оценка верна и точна, но асимптотически (для больших наборов аргументов) константа $\frac{2}{3}$ может быть заменена меньшей константой $\frac{5}{9}$ из (3).

В настоящей работе описываются результаты численных экспериментов, связанных с поведением чисел Фробениуса в среднем: для величин $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$, $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ и $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$ построены графики плотности распределения и для каждой из них найдено приблизительное значение математического ожидания. Анализ полученных данных привел к следующему утверждению.

Теорема. *Справедлива оценка* $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}} > \frac{5\sqrt{3}}{9}$, *в которой константа* $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ *точна.*

Результаты других численных экспериментов опубликованы в работах [10]–[12].

2. Схемы вычислений и результаты эксперимента

Опишем схему вычисления средних значений величин $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$, $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ и $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$ для больших векторов (a,b,c). Усреднение осуществляется по тройкам (a,b,c), в которых a — большое простое число, $b+c<2a$, $(b,c)\in[1,a]^2$. Наложенные ограничения обеспечивают выполнение условий $(a,b)=(a,c)=1$. Определим суммы

$$\overline{S_f}(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2-1}\sum_{\substack{b,c=1\\ b+c<2a}}^{a}\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}+\frac{1}{(a-1)^2}\sum_{b,c=1}^{a-1}\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}\right), \tag{4}$$

$$\overline{S_n}(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2-1}\sum_{\substack{b,c=1\\ b+c<2a}}^{a}\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}+\frac{1}{(a-1)^2}\sum_{b,c=1}^{a-1}\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}\right), \tag{5}$$

$$\overline{S_{n/f}}(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2-1}\sum_{\substack{b,c=1\\ b+c<2a}}^{a}\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}+\frac{1}{(a-1)^2}\sum_{b,c=1}^{a-1}\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}\right), \tag{6}$$

которые ведут себя более регулярно, чем средние значения соответствующих величин по квадратам $(b,c)\in[1,a-1]^2$ и $(b,c)\in[1,a]^2$.

На рис. 1 изображены графики зависимости $\overline{S_f}(a)$, $\overline{S_n}(a)$ и $\overline{S_{n/f}}(a)$ от параметра a (верхний, средний и нижний соответсвенно). По их виду можно предположить, что величины (4)–(6) при $a\to\infty$ стремятся к некоторым константам. Значения, посчитанные при $a=1229$

$$\overline{S_f}=2.5255230341,\qquad \overline{S_n}=1.2858966570,\qquad \overline{S_{n/f}}=0.5101058242,$$

предположительно отличаются от этих констант не более чем на 0.03.

Известно, что существует предельная функция распределения нормированных чисел Фробениуса от произвольного количества аргументов (см. [5]). Ее явный вид известен только для случая трех аргументов (см. [13], [15]). Можно предположить, что и другие величины, связанные с проблемой Фробениуса, обладают предельными распределениями. Численный эксперимент был проведен для величин $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$, $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ и $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$. Графики плотности строились следующим образом. В качестве a выбирались простые числа. Для функций распределения были использованы наборы чисел, посчитанные для всех троек (a,b,c) таких, что

$(b,c) \in [1,a]^2$. Плотность распределения найдена при помощи численного дифференцирования функции распределения.

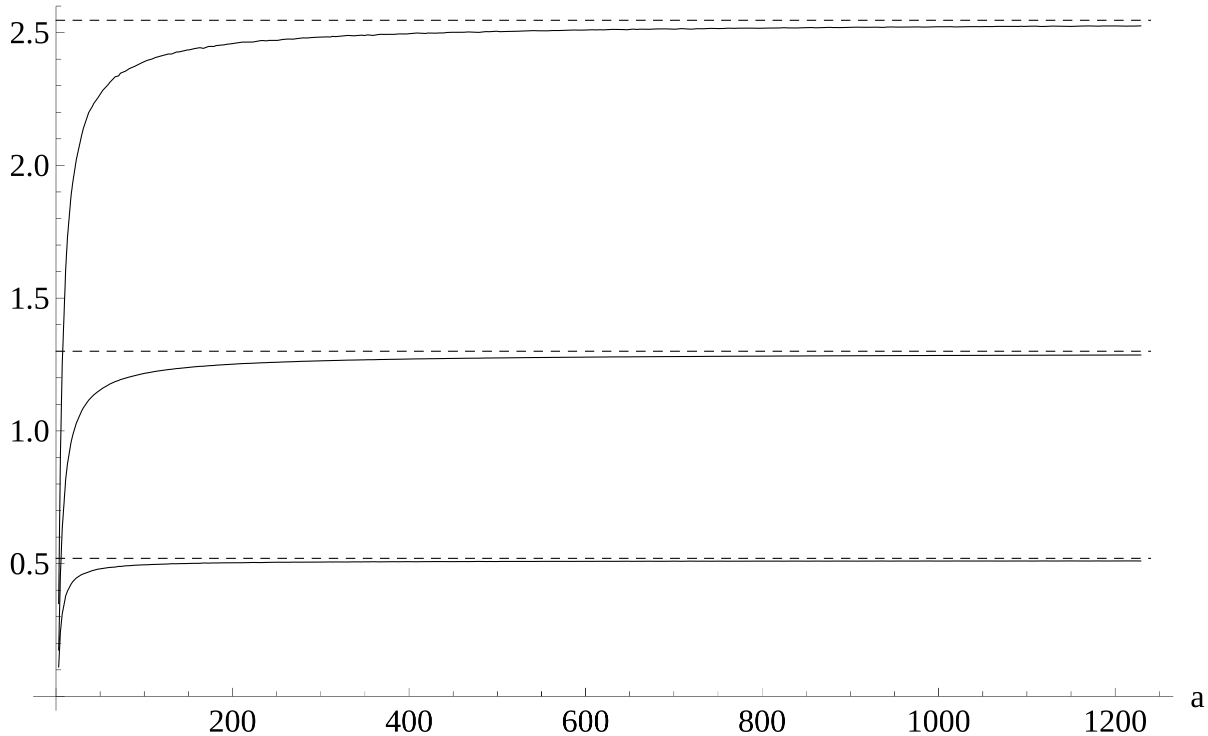

Рис. 1. Графики функций $\overline{S_f}(a)$, $\overline{S_n}(a)$ и $\overline{S_{n/f}}(a)$.

На рисунках ниже изображены графики плотностей распределения, посчитанные при $a = 173$. График на рис. 2 подтверждает точность оценки $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{3}$ (см. [7]) и согласуется с теоретической плотностью распределения из [13] (обозначена пунктиром):

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \sqrt{3}]; \\ \frac{12}{\pi}\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{4-t^2}\right), & t \in [\sqrt{3}, 2]; \\ \frac{12}{\pi^2}\left(t\sqrt{3}\arccos\frac{t+3\sqrt{t^2-4}}{4\sqrt{t^2-3}} + \frac{3}{2}\sqrt{t^2-4}\log\frac{t^2-4}{t^2-3}\right), & t \in [2, +\infty). \end{cases}$$

На основании данных, представленных на рисунке 3, сформулирована теорема 1. График на рис. 4 подтверждает, что константы в неравенствах (3) являются точными.

3. Нижняя грань для $N(a,b,c)$

Доказательство теоремы. Введем величину $\Theta(a,b,c) = \frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ и покажем, что $\Theta(a,b,c) > \frac{5\sqrt{3}}{9}$. Можно предполагать, что числа a, b, c попарно взаимно просты. В противном случае общие делители можно убрать, используя формулу (1). Например, если $d = (a,b)$, то

$$\Theta(a,b,c) = \frac{dN(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c)}{d\sqrt{\frac{a}{d}\frac{b}{d}c}} = \frac{N(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c)}{\sqrt{\frac{a}{d}\frac{b}{d}c}} = \Theta\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, c\right).$$

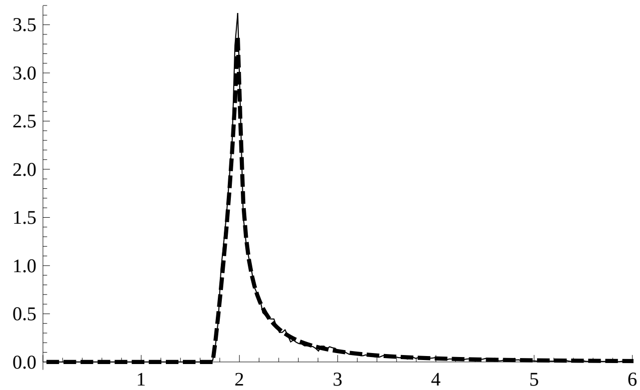

Рис. 2. Плотность распределения величины $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$.

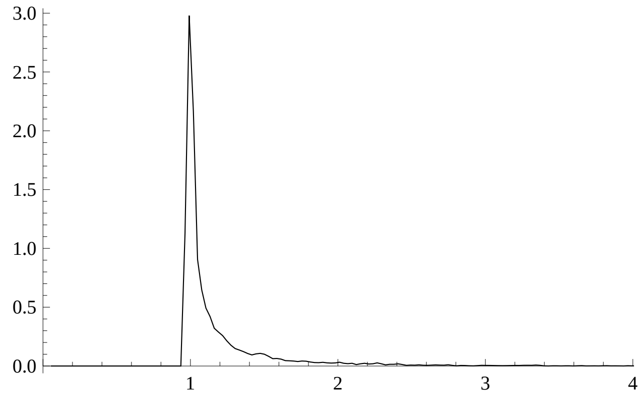

Рис. 3. Плотность распределения величины $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$.

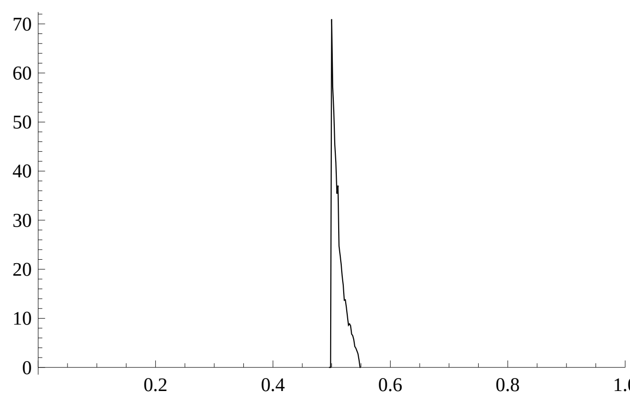

Рис. 4. Плотность распределения величины $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$.

С помощью формулы (2) отношение $\Theta(a,b,c) = \frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ может быть записано в виде

$$\Theta(a,b,c) = F(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

где

$$x_1 = \frac{b\,(s_v - s_{v+1})}{\sqrt{abc}}, \qquad x_2 = \frac{b\,s_{v+1}}{\sqrt{abc}},$$

$$y_1 = \frac{c\,(p_{v+1} - p_v)}{\sqrt{abc}}, \qquad y_2 = \frac{c\,p_v}{\sqrt{abc}},$$

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - x_2 y_2 (x_1 + y_1).$$

Параметры s_v, s_{v+1}, p_{v+1}, p_v связаны соотношением $s_v p_{v+1} - s_{v+1} p_v = a$ [6], поэтому функционал $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ определяется на множестве

$$S = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0, x_1 y_1 + x_1 y_2 + y_1 x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что функционал $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ на множестве S имеет минимум $\frac{5\sqrt{3}}{9}$, который достигается при

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $\Theta(a, b, c) > \frac{5\sqrt{3}}{9}$. Невозможность равенства $\Theta(a, b, c) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ сводится к проверке тройки $(a, b, c) = (1, 1, 3^n)$, для которой $\Theta(1, 1, 3^n) = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Замечание. Константа $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ в теореме 1 точна. Для доказательства достаточно рассмотреть примеры из [14], для которых $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{a,b,c}} \to \sqrt{3}$. Для тройки $(3, 3k + 1, 3k + 2)$, где $k > 0$,

$$N(3, 3k + 1, 3k + 2) = 5k + \frac{5}{2},$$

$$\Theta(3, 3k + 1, 3k + 2) = \frac{5k + \frac{5}{2}}{\sqrt{3(3k + 1)(3k + 2)}} \to \frac{5\sqrt{3}}{9} \qquad (k \to \infty).$$

Другой пример показывает, что можно найти тройку сколь угодно больших попарно взаимно простых чисел, для которых Θ сколь угодно близко к $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. При $m \geq 6$ и $m \equiv 0$ или $2 \pmod 6$

$$N(3m^2 - 5m - 1, 3m^2 - 5m, 3m^2 - 2m - 1) = 5m^3 - 10m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{1}{2},$$

$$\Theta(3m^2 - 5m - 1, 3m^2 - 5m, 3m^2 - 2m - 1) =$$
$$= \frac{5m^3 - 10m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{1}{2}}{\sqrt{(3m^2 - 5m - 1)(3m^2 - 5m)(3m^2 - 2m - 1)}} \to \frac{5\sqrt{3}}{9} \qquad (k \to \infty).$$

Список литературы

[1] V. Arnold, *Arnold's Problems*, Springer, 2005.

[2] S. M. Johnson, "A linear diophantine problem", *Canad. J. Math*, 1960, 12, 390–398.

[3] O. Rödseth, "On a Linear Diophantine Problem of Frobenius", *J. Reine Angew. Math*, **301**, (1978), 171–178.

[4] E. S. Selmer and Ö. Beyer, “On the linear diophantine problem of Frobenius in three variables”, *J. Reine Angew. Math*, **301**, (1978), 161–170.

[5] J. Marklof, “The asymptotic distribution of Frobenius numbers”, *Inventiones mathematicae*, **181**:1, 179–207.

[6] А. В. Устинов, “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Матем. сб.*, **200**:4, (2009), 131–160.

[7] O. Rödseth, “Weighted multi-connected loop networks”, *Discrete Mathematics*, **148**:1-3, (1996), 161–173.

[8] L. G. Fel, “Weak asymptotics in the 3-dim Frobenius problem”, *Funct. Anal. Other Math*, 2009, 2, 179–202.

[9] H. S. Wilf, “A circle-of-lights algorithm for the “money-changing problem”, *Am. Math. Monthly*, **85**, (1978), 562–565.

[10] В. И. Арнольд, *Экмпериментальное наблюдение математических фактов*, МЦНМО, М., 2006.

[11] M. Beck, D. Einstein, Sh. Zacks, “Some experimental results on the Frobenius problem”, *Experiment. Math.*, **12**:3, (2003), 263–269.

[12] D. Beihoffer, J. Hendry, A. Nijenhuis, S. Wagon, “Faster algorithms for Frobenius numbers”, *Electron. J. Combin.*, **12**:1, (2005), research paper 27.

[13] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН сер. матем.*, **74**:5, (2010), 145–170.

[14] J. L. Davison, “On the Linear Diophantine Problem of Frobenius”, *Journal of Number Theory*, **48**:3, (1994), 353–363.

[15] J. Marklof, A. Strömbergsson, *Diameters of random circulant graphs*, arXiv: http://arxiv.org/pdf/1103.3152v1.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 29 октября 2010 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1

Vorobjov I. S. Experimental research of Frobenius problem for three arguments. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 03–09.

ABSTRACT

The paper describes some numerical results concerning Frobenius problem. Density distribution functions are calculated for $\frac{f(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$, $\frac{N(a,b,c)}{\sqrt{abc}}$ and $\frac{N(a,b,c)}{f(a,b,c)}$, where $f(a,b,c)$ is modified Frobenius number (largest integer M such that equation $ax+by+cz=M$ does not have positive integer solution) and $N(a,b,c)$ is modified genus of numerical semigroup generated by a,b,c. Expectations of the same ratios are calculated numerically. The paper also contains new sharp lower bound for genus: $N(a,b,c) \geqslant \frac{5\sqrt{3}}{9}\sqrt{abc}$.

Key words: *continued fractions, Frobenius numbers.*