ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 1. С. 10–27

УДК 511.9
MSC2000 11D68,11D85

© О. А. Горкуша[1]

О средней длине диагональных дробей Минковского

Получена асимптотическая формула для математического ожидания длин конечных диагональных дробей Минковского. В доказательстве используются методы получения асимптотических оценок, опубликованные в работах Быковского, Устинова.

Ключевые слова: *Алгоритм Эвклида, непрерывные дроби, геометрия чисел, решетки.*

Основные обозначения

1) Для измеримого по Жордану множества X через mX будем обозначать меру Жордана множества X.

2) Для рационального числа r запись $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ означает каноническое разложение в правильную непрерывную дробь длины s.

3) Запись $s_1(r)$ — сумма всех неполных частных в каноническом разложении числа r, включая t_0.

4) Константа Эйлера
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

5) Дзета-функция Римана
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

6) Функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество взаимно простых с n чисел, не превосходящих n.

7) Функция Мебиуса $\mu(n)$, которая определяется следующим образом:
$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 1, \\ (-1)^k & \text{если } n = p_1\cdot\ldots\cdot p_k, \\ 0 & \text{если } p^2 | n. \end{cases}$$

8) Дилогарифм Эйлера
$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt.$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: 684bmts@rambler.ru

Введение

В работе [1] Минковский рассмотрел представление рационального числа в виде нерегулярной конечной непрерывной дроби, зависящей от параметра Ω, которая получила название дроби Минковского с параметром Ω.

Пусть r — рациональное число. Для фиксированного вещественного числа $\Omega \geq 1$ определим последовательности целых неотрицательных чисел $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ с помощью следующей процедуры.

Сначала выбираем $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = a_0 = [r]$, $Q_1 = 1$. Затем для всех $n \geq 1$ до тех пор, пока $P_n - rQ_n \neq 0$, вычислим

$$u = \frac{P_{n-1} - rQ_{n-1}}{P_n - rQ_n},\ a_n = -\mathrm{sign}\ (u),\ v = [|u|] + a_n \frac{Q_{n-1}}{Q_n},$$

$$b_n = \begin{cases} [|u|] + 1, & \text{если } \{u\} \neq 0 \text{ и } \frac{(v+1)^\Omega - 1}{1-(1-\{|u|\})^\Omega} \leq \frac{v^\Omega - 1}{1-\{|u|\}^\Omega}, \\ [|u|] & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

$$P_{n+1} = b_n P_n + a_n P_{n-1},\ Q_{n+1} = b_n Q_n + a_n Q_{n-1},$$

где через $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначаются целая и дробная часть числа.

Тогда

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}}$$

и

$$r = a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{s(r;\Omega)}|}{|b_{s(r;\Omega)}},$$

где $s(r;\Omega)$ — длина дроби Минковского с параметром Ω. В статье речь пойдет о дробях Минковского с параметром $\Omega = 1$. Такие дроби называются диагональными дробями Минковского.

Среди различных представлений числа r в виде непрерывной дроби обычно выделяют три варианта.

Первый вариант — правильная непрерывная дробь, второй вариант — дробь с выбором ближайшего целого:

$$r = q_0 + \frac{\varepsilon_1|}{|q_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_l|}{|q_l},$$

где q_0 — целое, $q_1, \ldots, q_l$ — натуральные, $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, $q_k \geq 2$ $(1 \leq k \leq l)$, $a_k + \varepsilon_{k+1} \geq 2$ $(1 \leq k < l)$, и $\varepsilon_l = -1$ при $l \geq 1$ и $q_l = 2$, $l = l(r)$ — длина дроби.

Третий вариант — дробь с нечетными неполными частными:

$$r = q_0 + \frac{\varepsilon_1|}{|q_1} + \cdots + \frac{\varepsilon_h|}{|q_h},$$

где q_0 — нечетное целое, $q_1, \ldots, q_h$ — нечетные натуральные, $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, $a_k + \varepsilon_{k+1} \geq 1$ $(1 \leq k < h)$, и $\varepsilon_h = 1$ при $h \geq 1$ и $q_h = 2$, $h = h(r)$ — длина дроби.

Подробный обзор, посвященный перечисленным дробям, изложен в работах [2], [3].

Для вещественного положительного числа R определим величины $E'(R), E_1(R), E_2(R)$ и $E_3(R)$ из равенств

$$E'(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s(c/d; 1), \tag{1}$$

$$E_1(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s(c/d),$$

$$E_2(R)=\frac{2}{[R]([R]+1)}\sum_{d\le R}\sum_{c\le d}l(c/d),$$

$$E_3(R)=\frac{2}{[R]([R]+1)}\sum_{d\le R}\sum_{c\le d}h(c/d).$$

Асимптотическому поведению величин $E_1(R),E_2(R),E_3(R)$, посвящен ряд работ. Портер [4] получил асимптотическую формулу

$$\sum_{\substack{c=1\\ \text{НОД }(c,d)=1}}^{d} s(c/d)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\varphi(d)\log d+C\varphi(d)+O_\varepsilon(d^{5/6+\varepsilon}),$$

где C — константа, найденная Ренчем [5]:

$$C=\frac{\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2+4\gamma-4\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-2\right)-\frac{3}{2}.$$

Из этого результата следует равенство

$$E_1(R)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log R+C_P'+O_\varepsilon(R^{-1/6+\varepsilon})$$

с некоторой положительной константой C_P' [6]. В работе [7] Устинов доказал асимптотическую формулу для $E_1(R)$ с улучшенным остаточным членом:

$$E_1(R)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\log R+C_P'+O(R^{-1}\log^5 R),$$

где

$$C_P'=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(3\log 2+2\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}.$$

Для величин $E_2(R),E_3(R)$ Баладии и Валле в 2005 году в работе [8] эргодическими методами получили асимптотические формулы

$$E_2(R)=\frac{2\log\varphi}{\zeta(2)}\log R+\widetilde{C}_l+O(R^{-\beta}),$$

$$E_3(R)=\frac{3\log\varphi}{\zeta(2)}\log R+\widetilde{C}_h+O(R^{-\beta}),$$

где $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение , $\beta>0$, $\widetilde{C}_l,\widetilde{C}_h$ — абсолютные постоянные. Устинов в работах [9] и [10] получил для этих формул оценку остаточных членов в виде $O(R^{-1}\log^5 R)$.

В настоящей работе, основываясь на подходе, предложенном в работе [7], исследуется асимптотическое поведение $E'(R)$.

Теорема. *Для величины $E'(R)$, определенной формулой (1), справедливо равенство*

$$E'(R)=\frac{\log R}{\zeta(2)}+C_d+O(R^{-1}\log^3 R),$$

где

$$C_d=\frac{1}{\zeta(2)}\left(2\gamma-\frac{3}{2}+2\log\left(\frac{3}{2}\right)(1-\log 2)-\log^2 3-2\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right)+2\mathrm{Li}_2\left(\frac{-1}{2}\right)-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)-\frac{17}{6}.$$

1. Соотношения между диагональными дробями и минимумами решеток

Представление рационального числа в виде дроби Минковского с параметром Ω имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть $X \subset \mathbf{R}^2$ — симметричная относительно координатных осей, ограниченная и замкнутая выпуклая область с кусочно-гладкой границей, $m(X) \neq 0$. Для рационального числа $r \in (0, 1/2)$ рассмотрим решетку на плоскости $\Gamma_r = \{(n - r \cdot m, m) | \, n, m \in \mathbf{Z}\}$.

Определение 1. *Ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ решетки Γ_r назовем минимумом относительно области X, если для некоторых вещественных положительных чисел t_1, t_2*

1) на границе области $\{(t_1 x_1, t_2 x_2) | (x_1, x_2) \in X\}$ лежат только узлы γ и $-\gamma$,

2) внутри этой области нет ненулевых узлов из Γ_r.

Множество таких минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_r; X)$. Минковский в своей работе [1] рассмотрел области

$$X_\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \ |x_1|^\Omega + |x_2|^\Omega \leq 1\}, \text{ где } \Omega \in [1, \infty).$$

Множество минимумов относительно X_Ω будем обозначать через $\mathfrak{M}_\Omega(\Gamma_r)$. Минимумы относительно области X_1 будем называть октаэдральными. Из определения 1 следует, что

$$\mathfrak{M}_1(\Gamma_r) = \{\pm(P_i - rQ_i, Q_i)\}.$$

Поэтому $\#\mathfrak{M}_1(\Gamma_r) = 2s(r, 1) + 4$ для рационального числа $r \in (0, 1/2)$. Учитывая равенства $s(1/2, 1) = 1$, и $s(r; 1) = s(1 - r; 1) + 1$ для $r > 1/2$, получаем

$$s(r, 1) = \begin{cases} \#\mathfrak{M}_1(\Gamma_r)/2 - 2 & \text{если } r \in (1, 1/2), \\ \#\mathfrak{M}_1(\Gamma_{1-r})/2 - 1 & \text{если } r \in (1/2, 1), \\ 1 & \text{если } r = 1/2. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть функция $\psi(x_1, x_2)$ описывает границу области X и область не является прямоугольником. Обозначим через (a_0, b_0), (a_1, b_1) точки с условием

$$\psi(2a_0, 0) = \psi(a_0, b_0) = \psi(a_1, b_1) = \psi(0, 2b_1).$$

Для всех чисел α из $[0, 1]$ определим функцию $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$ по правилу

$$\begin{cases} \psi(u, v) = 0 & \text{для } a_0 \leq u \leq a_1, \\ \psi(s, t) = 0, \ u = s\beta, t = v\alpha & \text{для } a_1 \leq s \leq 2a_0, \\ \psi(x, y) = 0, \ x = s - u, y = t + v & \text{для } 0 \leq x \leq a_0. \end{cases}$$

Для октаэдральных минимумов

$$\beta(\alpha) = \beta_1(\alpha) = \frac{1}{2 - \alpha}. \tag{3}$$

Определение 2. *Четверка натуральных чисел (k, l, m, n) есть Ω–представление числа d, если*

$$km + ln = d, \ m \leq n, \ k \leq l\beta_\Omega(m/n), \ \textit{НОД}(m, n) = \textit{НОД}(k, l) = 1.$$

Множество Ω–представлений числа d обозначим через $T^*_\Omega(d)$. В работе [11] исследуются минимумы относительно области X. В частности, доказана зависимость числа элементов во множестве $\mathfrak{M}_\Omega(\Gamma_{c/d})$ и числа элементов во множестве $T^*_\Omega(d)$ [11, лемма 9]:

$$\sum_{\substack{c \leq d/2 \\ \text{НОД}(c,d)=1}} \#\mathfrak{M}_\Omega(\Gamma_{c/d}) = 2\#T^*_\Omega(d) + 3\varphi(d). \tag{4}$$

2. Основные асимптотические равенства и вспомогательные суммы

В этом параграфе мы приведем несколько вспомогательных утверждений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1 (формула суммирования Эйлера—Маклорена). *Определим функции*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\},\ \sigma(x) = \int_0^x \rho(u)du.$$

Тогда для любой дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ *функции* $f(x)$

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a) - \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Доказательство. См., например, в [12, глава I, теорема 1].

Лемма 2. *Пусть* $x = P(x)/Q(x)$ *— рациональное число,* y, a, b *— вещественные числа и* $a \le b$. *Тогда*

$$\sum_{a<k\le b} \{kx + y\} = \frac{b-a}{2} + O\left(\frac{b-a}{Q(x)}\right) + O(s_1(x)).$$

Доказательство. Будем следовать теореме 2 из [13, §2]. Положим $n = [b]-[a], \gamma = \{y + x[a]\}$. Тогда

$$\sum_{a<k\le b} \{kx + y\} = S_n(x) - N_n(\gamma) + n\gamma,$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \{kx\},$$

а $N_n(\gamma)$ — число значений k, лежащих в отрезке $[1, n]$, для которых $\{kx\} \ge 1 - \gamma$.

Представим x в виде правильной непрерывной дроби

$$x = [t_0; t_1, \ldots, t_s].$$

Обозначим через P_i/Q_i — подходящую дробь числа x с номером i. Определим последовательности неотрицательных целых чисел $J_0, J_1, J_2 \ldots$ и $R_{-1}, R_0, R_1 \ldots$ посредством следующего рекуррентного правила: $R_{-1} = n$, $R_0 \equiv n(\mathrm{mod}\ Q(x))$, $J_0 = s + 1$ и J_m, R_m для $m \ge 1$ — целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$Q_{J_m} \le R_{m-1} < Q_{J_m+1},\ R_m \equiv R_{m-1}(\mathrm{mod}\ Q_{J_m}).$$

Так как $1 \le J_m < J_{m-1}$, то последовательности $\{J_m\}$ и $\{R_m\}$ конечны. Обозначим через l количество элементов в последовательности $\{J_m\}$.

Положим $i = J_m$. Поскольку $R_{m-1} < Q_{i+1}$, то

$$x = \frac{P_i}{Q_i} + \frac{\theta}{Q_i R_{m-1}},\quad |\theta| < 1. \tag{5}$$

Поэтому

$$S_{R_{m-1}}(x) = \sum_{k=1}^{R_{m-1}} \left\{\frac{r_k}{Q_i} + \frac{\theta \cdot k}{Q_i R_{m-1}}\right\},\ r_k \equiv kP_i(mod\ Q_i).$$

В силу того, что при $r_k = 0$ и $\theta < 0$

$$\frac{r_k}{Q_i} + \frac{\theta \cdot k}{Q_i R_{m-1}} \in (-1, 0),$$

а в остальных случаях

$$\frac{r_k}{Q_i} + \frac{\theta \cdot k}{Q_i R_{m-1}} \in [0, 1),$$

приходим к равенству

$$S_{R_{m-1}}(x) - \frac{R_{m-1}}{2} = \sum_{k=1}^{R_{m-1}} \left(\frac{r_k}{Q_i} + \frac{\theta \cdot k}{Q_i R_{m-1}} \right) + [\theta < 0] \sum_{\substack{k=1 \\ r_k=0}}^{R_{m-1}} 1 - \frac{R_{m-1}}{2},$$

где запись $[A]$ означает характеристическую функцию условия A. Когда k пробегает полную систему вычетов по модулю Q_i, r_k по одному разу принимает каждое из значений $0, 1, \ldots, Q_i - 1$. Поэтому

$$\left| S_{R_{m-1}}(x) - \frac{R_{m-1}}{2} \right| \leq \left| S_{R_m}(x) - \frac{R_m}{2} \right| + \left| \sum_{k=1}^{R_m} \frac{\theta \cdot k}{Q_i R_{m-1}} \right| + \frac{1}{2} \left| \left[\frac{R_{m-1}}{Q_i} \right] - \frac{|\theta|(R_{m-1}+1)}{Q_i} \right|.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{R_m} \frac{|\theta| \cdot k}{Q_i R_{m-1}} < \frac{R_m(R_m+1)}{2Q_i R_{m-1}} \leq \frac{R_m + 1}{2Q_i} \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \left| \left[\frac{R_{m-1}}{Q_i} \right] - \frac{|\theta|(R_{m-1}+1)}{Q_i} \right| < \frac{1}{2} \left(\left[\frac{R_{m-1}}{Q_i} \right] + \frac{R_{m-1}+1}{Q_i} \right) \leq \left[\frac{R_{m-1}}{Q_i} \right] + \frac{1}{2},$$

$$\left[\frac{R_{m-1}}{Q_i} \right] \leq \begin{cases} \frac{n}{Q(x)} & \text{если } m = 0, \\ t_i + 1 & \text{если } m > 0, \end{cases}$$

то

$$\left| S_{R_{m-1}}(x) - \frac{R_{m-1}}{2} \right| \leq \left| S_{R_m}(x) - \frac{R_m}{2} \right| + 1 + 2t_i[m > 0] + \frac{n}{Q(x)}[m = 0].$$

Суммируя последнее неравенство по переменной m и учитывая $l \leq s$, получаем асимптотическую формулу для величины $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \frac{n}{2} + O(s_1(x)) + O\left(\frac{n}{Q(x)} \right).$$

Теперь вычислим $N_n(\gamma)$, используя последовательности чисел $\{J_m\}_{m=0}^{l}$ и $\{R_m\}_{m=-1}^{l}$, которые мы определили выше. Определим характеристическую функцию $\chi(x)$ соотношениями

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in [1-\gamma, 1), \\ 0 & \text{если } x \in [0, 1-\gamma), \end{cases}$$
$$\chi(x) = \chi(x+1).$$

Тогда

$$N_n(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \chi(\{kx\}) = \sum_{k=1}^{n} \chi(kx).$$

Пусть m — фиксированное натуральное число из отрезка $[1, l]$. Положим $i = J_m$. Обозначим

$$E_i(\gamma) = \left\{ k \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{k}{Q_i} \in [1-\gamma, 1) \right\}.$$

Для этого множества выполняется равенство $\#E_i(\gamma) = [\gamma Q_i]$. Согласно (5) для всех $k \in [1, R_{m-1}]$

$$\chi(kx) = \chi\left(\frac{r_k}{Q_i} + \frac{k\theta}{Q_i R_{m-1}}\right) = \chi\left(\frac{r_k}{Q_i}\right) + \sigma,$$

где $r_k \equiv kP_i(\mod Q_i)$ и σ — слагаемое, равное ± 1, которое появляется только в одном из двух случаев:

$$1 - \gamma \in \left(\frac{r_k}{Q_i}, \frac{r_k}{Q_i} + \frac{k\theta}{Q_i R_{m-1}}\right],\ 1 - \gamma \in \left(\frac{r_k}{Q_i} + \frac{k\theta}{Q_i R_{m-1}}, \frac{r_k}{Q_i}\right].$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{R_{m-1}} \chi(kx) = \#E_i(\gamma)\left[\frac{R_{m-1}}{Q_i}\right] + \sum_{k=1}^{R_m} \chi(kx) + O\left(\left[\frac{R_{m-1}}{Q_i}\right]\right)$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{R_{m-1}} \chi(kx) - \gamma R_{m-1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{R_m} \chi(kx) - \gamma R_m\right| + O\left(\left[\frac{R_{m-1}}{Q_i}\right]\right).$$

Суммируя последнее равенство по переменной m, получаем

$$N_n(\gamma) = \gamma n + O(s_1(x)) + O\left(\frac{n}{Q(x)}\right).$$

Учитывая $n = b - a + O(1)$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть n, m — натуральные числа и $m \le n$. Функция $\beta = \beta(\alpha)$ определена равенством (3), $\alpha = \alpha(\beta)$ — функция, обратная к $\beta(\alpha)$. Тогда*

1) $s_1(m/n) = s_1(n/m)$.
2) $s_1(\beta(m/n)) = s_1(m/n) + 1$.
3) $s_1(\alpha(m/n)) = s_1(m/n) - 1$.
4) $\sum_{m=1}^{n} s_1\left(\frac{m}{n}\right) = O(n \log^2(n+1))$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе и третье. Запишем m/n в виде непрерывной дроби $m/n = [0; t_1, \ldots, t_s]$. Замечая, что функция $\alpha(m/n)$ определена на отрезке $[1/2, 1]$, при помощи элементарных преобразований приходим к равенствам

$$\beta(m/n) = \begin{cases} [0; 1, 1 + t_2, t_3, \ldots, t_s], & \text{если } t_1 = 1, \\ [0; 1, 1, t_1 - 1, t_2, t_3, \ldots, t_s], & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha(m/n) = \begin{cases} [0; 1 + t_3, t_4, \ldots, t_s] & \text{если } t_2 = 1, \\ [0; 1, t_2 - 1, t_3, t_4, \ldots, t_s] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $s_1(\beta(m/n)) = s_1(m/n) + 1$, $s_1(\alpha(m/n)) = s_1(m/n) - 1$. Утверждение 4 получено в [14].

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$H = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\sum_{l<k\le\frac{3l}{2}} \frac{1}{k} - \sum_{2l<k\le 3l} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{\frac{l}{2}<k\le l} \frac{l}{k^2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\zeta(2)}{3} + (1 - \log 2)(\log 3 - 2\log 2 + 1/2).$$

Доказательство. Легко проверить, что слагаемые в исследуемом ряде оцениваются как $O(l^{-2})$, поэтому ряд абсолютно сходится.

Пусть N — фиксированное натуральное число. Определим величины $H_1, H_1(N), H_2$ равенствами

$$H_1(N) = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{\frac{l}{2}<k\le l} \frac{l}{k^2} - 1\biggr),$$

$$H_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{\frac{l}{2}<k\le l} \frac{l}{k^2} - 1\biggr),$$

$$H_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{l<k\le \frac{3l}{2}} \frac{1}{k} - \sum_{2l<k\le 3l} \frac{1}{k}\biggr).$$

Заметим, что

$$H = H_2 + H_1/2. \tag{6}$$

Применяя лемму 1, вычислим

$$\begin{aligned} H_1(N) &= \sum_{l=1}^{N} \sum_{\frac{l}{2}<k\le l} \frac{1}{k^2} - \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{l} = \sum_{k\le \frac{N}{2}} \frac{1}{k^2} \sum_{k\le l<2k} 1 + \sum_{\frac{N}{2}<k\le N} \frac{1}{k^2} \sum_{k\le l\le N} 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \\ &= -2 \sum_{\frac{N}{2}<k\le N} \frac{1}{k} + (N+1) \sum_{\frac{N}{2}<k\le N} \frac{1}{k^2} = 1 - 2\log 2 + O\biggl(\frac{1}{N}\biggr). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при N, стремящемся к бесконечности, получаем

$$H_1 = 1 - 2\log 2. \tag{7}$$

Ряд H_2 абсолютно сходится и его можно представить в виде разности двух сходящихся рядов:

$$H_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{l<k\le \frac{3l}{2}} \frac{1}{k} - \log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\biggr) - H_3,$$

$$H_3 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l<k\le 2l} \biggl(\frac{1}{l(k+l)} - \frac{1}{l^2}\log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\biggr).$$

Так как

$$H_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\biggl(\sum_{\frac{k}{2}\le l<k} \frac{1}{l} - \sum_{\frac{3k}{2}\le l<2k} \frac{1}{l} - \log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\biggr) - \log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\cdot H_1,$$

то

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{l<k\le 2l} \frac{1}{k} - \log 2\biggr) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l}\biggl(\sum_{\frac{l}{2}\le k<l} \frac{1}{k} - \log 2\biggr) - \frac{\zeta(2)}{3} + \log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\cdot H_1 = \\ &= -\frac{\zeta(2)}{3} + \log\biggl(\frac{3}{4}\biggr)\cdot H_1. \end{aligned}$$

Используя (6) и (7), находим значение H. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть R, U — вещественные положительные числа, $R \ge 2$, $1 \le U \le R$. Тогда*

$$\sigma_1(R,U) = \sum_{l\le \frac{2R}{3U}} \sum_{\frac{k}{l}\le \frac{1}{2}} \biggl(\frac{1}{l} - \frac{1}{k+l}\biggr) = \frac{R}{3U}\biggl(1 - 2\log\biggl(\frac{3}{2}\biggr)\biggr) + O(\log R),$$

$$\sigma_2(R,U)=\sum_{\frac{2R}{3U}<l<\frac{R}{U}}\sum_{k\le\frac{R}{U}-l}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{k+l}\right)=\frac{R}{3U}\left(5\log\left(\frac{3}{2}\right)-2\right)+O(1),$$

$$\sigma_3(R,U)=\sum_{\frac{2R}{3U}<l\le\frac{R}{U}}\sum_{k\in[\frac{R}{U}-l,\frac{l}{2}]}\left(\frac{R}{l}-U\right)=\frac{R^2}{U}\left(\frac{5}{12}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)+O(R),$$

$$\sigma_4(R,U)=\sum_{l\le\frac{R}{2U}}\sum_{k\in(\frac{l}{2},l]}\left(\frac{R}{k+l}-U\right)=\frac{R^2}{2U}\left(\log\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{8}\right)+O(R\log R),$$

$$\sigma_5(R,U)=\sum_{\frac{R}{2U}<l\le\frac{2R}{3U}}\sum_{\frac{l}{2}<k\le\frac{R}{U}-l}\left(\frac{R}{k+l}-U\right)=\frac{R^2}{U}\left(\frac{\log 3}{2}-\log 2+\frac{7}{48}\right)+O(R\log R).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя лемму 1 к каждой сумме, получим требуемые соотношения.

Лемма 6. *Пусть U — вещественное положительное число. Определим величины $F^{(1)}(U)$ и $F^{(2)}(U)$ равенствами*

$$F^{(1)}(U)=\sum_{l\le U-1}\sum_{U-l<k\le\frac{l}{2}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{l+k}\right),$$

$$F^{(2)}(U)=\sum_{l\le U-1}\sum_{\substack{\frac{l}{2}<k\le l\\ 2k\le U\\ l+k>U}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{2k}\right)+\sum_{l\le U-1}\sum_{\substack{\frac{l}{2}<k\le l\\ l+k>U}}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{l+k}\right).$$

Тогда

$$F^{(1)}(U)=\log\left(\frac{3}{2}\right)(1+\log 3)-\mathrm{Li}_2(1)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{\log 2-\log 3-1/3}{2U}+\frac{\rho(U)}{U}\log\left(\frac{3}{2}\right)+O\left(\frac{\log U}{U^2}\right),$$

$$\begin{aligned}F^{(2)}(U)\ &=\ -\frac{\log^2 3}{2}+\log 2\log 3+\frac{\log 2}{2}-\log 3+1-\frac{\mathrm{Li}_2(1)}{2}-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right)+\\ &+\ \frac{\log 3-\log 2+1/3}{2U}+\frac{\rho(U)}{U}\left(\frac{1}{2}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)+O\left(\frac{\log U}{U^2}\right).\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку величины $F^{(1)}(U)$ проведем методом, предложенным в работе [9]. Применим обозначение

$$g(l,U)=\frac{\log l-\log(U-l)}{U}-\frac{\log U-\log(U-l)}{l}.$$

Используя лемму 1, представим внутреннюю сумму в $F^{(1)}(U)$ в виде интеграла и остаточного члена. И учитывая, что область $\{(l,k)|\ l\le U-1,\ U-l<k\le l/2\}$ — треугольник $\{(l,k)|\ 2U/3<l\le U-1,\ U-l<k\le l/2\}$, получаем

$$F^{(1)}(U)=\sum_{\frac{2U}{3}<l\le U-1}\left(g(l,U)-\frac{\log 2}{U}+\frac{\log 3}{l}+\frac{\rho(l/2)}{l/2}\left(\frac{1}{U}-\frac{2}{3l}\right)+O\left(\frac{1}{l^2(U-l)}\right)\right).$$

Вклад последнего слагаемого в $F^{(1)}(U)$ будет $O(\log U/U^2)$. К полученным суммам снова применим формулу Эйлера—Маклорена и, принимая во внимание равенства

$$\log(U-1)-\log U=-\frac{1}{U}+O\left(\frac{1}{U^2}\right),\ \frac{1}{U-1}=\frac{1}{U}+O\left(\frac{1}{U^2}\right),$$

придем к соотношению

$$F^{(1)}(U) = \sum_{\frac{2U}{3}<l\le U-1} g(l,U) + \log^2 3 - \log 2\log 3 - \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 2 - \log 3 - 1/3}{2U} +$$
$$+ \frac{\rho(U)}{U}(\log 3 - \log 2) + \frac{\rho(2U/3)}{2U/3}\left(\frac{2}{3}\log 2 - \log 3\right) + O\left(\frac{1}{U^2}\right).$$

Вычислим

$$\sum_{\frac{2U}{3}<l\le U-1} g(l,U) = \int_{\frac{2U}{3}}^{U} g(t,U)dt - \rho\left(\frac{2U}{3}\right) g\left(\frac{2U}{3},U\right) + \rho(U)g(U-1,U) +$$
$$+ O\left(g'_x(x,U)\Big|_{x=U-1}\right) + O\left(g'_x(x,U)\Big|_{x=2U/3}\right) + O\left(\int_{U-1}^{U} g(t,U)dt\right).$$

В последней формуле все слагаемые, за исключением первых двух, дают вклад $O(\log U/U^2)$. Поэтому

$$\sum_{\frac{2U}{3}<l\le U-1} g(l,U) = \int_{\frac{2U}{3}}^{U} g(t,U)dt - \rho\left(\frac{2U}{3}\right)\left(\frac{2\log 2 - 3\log 3}{2U}\right) + O\left(\frac{\log U}{U^2}\right)$$

и

$$\int_{\frac{2U}{3}}^{U} g(t,U)dt = \log 3 - \frac{2}{3}\log 2 - \mathrm{Li}_2(1) + \mathrm{Li}_2(2/3).$$

Объединяя найденные величины, получаем оценку для $F^{(1)}(U)$.

Осталось найти сумму $F^{(2)}(U)$. Введем в рассмотрение функции

$$g_1(t,U) = \frac{3}{U} - \frac{\log t}{t} + \frac{-1 - \log 3 - \frac{1}{2U} + \log U}{t} + \frac{1}{6t^2},$$
$$g_2(t,U) = \frac{U-1+\rho(U)}{2t^2} - \frac{1}{2t} - \frac{\log(U+t)}{t} + \frac{\log(2t)}{t} + \frac{1-\rho(U)}{t(U+t)}.$$

С учетом значений k, l, сумма $F^{(2)}(U)$ преобразуется к суммам

$$F^{(2)}(U) = \sum_{\frac{U}{3}<k\le\frac{U}{2}} \frac{1}{k} \sum_{U-k<l\le 2k-1} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{l+k}\right) + \sum_{\frac{U}{2}<k\le U-1} \frac{1}{k} \sum_{k-1<l\le U-1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{l+k}\right).$$

Первая сумма оценивается стандартным образом при помощи леммы 1 и приводится к виду

$$\int_{\frac{U}{3}}^{\frac{U}{2}} g_1(t,U)dt + \frac{\rho(U/2)}{U/2}\left(\frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) + O\left(\frac{\log U}{U^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2U}\left(\frac{1}{3} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \frac{\rho(U/2)}{U/2}\left(\frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) + O\left(\frac{\log U}{U^2}\right).$$

Таким же образом вычисляем вторую сумму в $F^{(2)}(U)$ с учетом оценки

$$\int_{U-1}^{U} g_2(t,U)dt \ll \frac{1}{U^2}:$$

$$\sum_{\frac{U}{2}<k\le U-1} \frac{1}{k} \sum_{k-1<l\le U-1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{l+k}\right) = \int_{\frac{U}{2}}^{U} g_2(t,U)dt - \frac{\rho(U/2)}{U/2}\left(\frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) + O\left(\frac{\log U}{U^2}\right) =$$

$$= \frac{1+\log^2 2-\log 2}{2}+\mathrm{Li}_2(-1)-\mathrm{Li}_2(-1/2)+\frac{\rho(U)}{U}\left(\frac{1}{2}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{1}{U}\log\left(\frac{3}{2}\right)-$$
$$-\frac{\rho(U/2)}{U/2}\left(\frac{1}{2}-\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)+O\left(\frac{\log U}{U^2}\right).$$

Объединяя найденные величины, и учитывая равенство $\mathrm{Li}_2(-1)=-\mathrm{Li}_2(1)/2$, получаем оценку для $F^{(2)}(U)$.

3. Доказательство основного результата

Обозначим через $N(R)$, $N^*(R)$ множества четверок, состоящих из натуральных чисел:

$$N(R)=\left\{\ (k,l,m,n)\in\mathbf{N}^4\ \middle|\ \begin{array}{l} km+ln\le R,\\ 1\le m\le n,\\ 1\le k\le l\beta(m/n)\end{array}\right\},\tag{8}$$

$$N^*(R)=\left\{\ (k,l,m,n)\in N(R)\ \middle|\ \text{НОД}(k,l)=1\ \right\},\tag{9}$$

где функция $\beta(\alpha)$ задается формулой (3).

Лемма 7. *Пусть R,U — вещественные числа, $R\ge 2$, $U\le R$ и*

$$N_1(R,U)=\{(k,l,m,n)\in N(R)|\ n\le U\}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\#N_1(R,U)=\frac{R^2}{4}\log U+\frac{R^2}{4}\left(\frac{\rho(U)}{U}+\gamma\right)-\frac{RU}{2}+O\left(U^2\log^2 R+R\log^2 R+\frac{R^2}{U^2}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество

$$N_1^*(R,U)=\{(k,l,m,n)\in N_1(R,U)|\ \text{НОД}(m,n)=1\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\#N_1(R,U) &= \sum_{n\le U}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l\le\frac{R}{n}}\sum_{k\le l\beta(\frac{m}{n})}[km+ln\le R]=\\
&= \sum_{n\le U}\sum_{d|n}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=d}}\sum_{l\le\frac{R}{n}}\sum_{k\le l\beta(\frac{m}{n})}[km+ln\le R]=\\
&= \sum_{d\le U}\sum_{n\le\frac{U}{d}}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=1}}\sum_{l\le\frac{R}{n}}\sum_{k\le l\beta(\frac{m}{n})}\left[km+ln\le\frac{R}{d}\right]=\\
&= \sum_{d\le U}\#N_1^*\left(\frac{R}{d},\frac{U}{d}\right).
\end{aligned}$$

Представим $\#N_1^*(R,U)$ в виде

$$\#N_1^*(R,U)=\sum_{n\le U}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=1}}T(R,U,m,n),\tag{10}$$

где $T(R,U,m,n)$ — число целых точек (l,k) с ненулевыми координатами, лежащими в области

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|\ 0\le x<R/n, 0\le y\le x\beta(m/n), 0\le y\le(R-xn)/m\}.$$

Следовательно,
$$T(R,U,m,n)=\sum_{l\le\frac{R}{n}}F(l)-\sum_{l\le\frac{R}{n}}\{F(l)\},\tag{11}$$
где
$$F(l)=\min(l\beta(m/n),(R-ln)/m).$$
Используя леммы 1, 2, 3 (пункты 1–3) и соотношение $Q\big(\beta\big(\frac{m}{n}\big)\big)\ll n$, получаем
$$\sum_{l\le\frac{R}{n}}\{F(l)\}=\frac{R}{2n}+O\left(s_1\left(\frac{m}{n}\right)\right)+O\left(\frac{R}{n^2}\right),$$
$$\sum_{l\le\frac{R}{n}}F(l)=\frac{R^2}{2n^2}g\left(\frac{m}{n}\right)+O\left(\frac{n}{m}\right),$$
$$g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\beta(\frac{m}{n})}{1+\frac{m}{n}\beta(\frac{m}{n})}.$$
Подставим эти формулы в (11), а затем в (10), и учитывая лемму 3 (пункт 4) и равенство (5), получим следующее представление $\#N_1^*(R,U)$:
$$\#N_1^*(R,U)=\frac{R^2}{2}\sum_{n\le U}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=1}}g\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{R}{2}\sum_{n\le U}\frac{\varphi(n)}{n}+O(U^2\log^2R+R\log R).$$
Так как
$$\sum_{n\le U}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{n\le U}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{n\le U/d}1=U\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\log R)=\frac{U}{\zeta(2)}+O(\log R)$$
и
$$\#N_1(R,U)=\sum_{d\le U}\#N_1^*\left(\frac{R}{d},\frac{U}{d}\right),$$
то
$$\#N_1(R,U)=\frac{R^2}{2}\sum_{d\le u}\frac{1}{d^2}\sum_{n\le U/d}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=1}}g\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{RU}{2}+O(U^2\log^2R)+O(R\log^2R).$$
В нашем случае $g(t)=1/2$. Используя лемму 1, оценим первое слагаемое в полученном соотношении:
$$\begin{aligned}\frac{R^2}{2}\sum_{d\le u}\frac{1}{d^2}\sum_{n\le U/d}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ \text{НОД}(n,m)=1}}g\left(\frac{m}{n}\right)&=\frac{R^2}{2}\sum_{n\le u}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{R^2}{4}\sum_{n\le u}\frac{1}{n}=\\&=\frac{R^2}{4}\left(\log U+\frac{\rho(U)}{U}+\gamma+O(U^{-2})\right).\end{aligned}$$
Поэтому
$$\#N_1(R,U)=\frac{R^2}{4}\log U+\frac{R^2}{4}\left(\frac{\rho(U)}{U}+\gamma\right)-\frac{RU}{2}+O\left(U^2\log^2R+R\log^2R+\frac{R^2}{U^2}\right).$$
Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть R — вещественное, U — полуцелое числа, $R \geq 2$, $1 \leq U \leq R$ и*

$$N_2(R,U) = \{(k,l,m,n) \in N(R) |\ n > U\}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\#N_2(R,U) = \frac{R^2}{4}\log\left(\frac{R}{U}\right) + \sigma_0' R^2 + \frac{RU}{2} + O\biggl(\frac{R^2}{U^2}\log^2 R + R\log^2 R + U^2\log^2 R\biggr),$$

где

$$\sigma_0' = \frac{\gamma}{4} - \frac{7}{12}\zeta(2) - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)(1-\log 2) - \frac{\log^2 3}{4} - \frac{\mathrm{Li}_2(2/3)}{2} + \frac{\mathrm{Li}_2(-1/2)}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переписав условия

$$km + ln \leq R,\ 1 \leq m \leq n,\ 1 \leq k \leq l\beta(m/n),\ n > U$$

в эквивалентном виде

$$km + ln \leq R,\ l < R/U,\ 1 \leq k \leq l,\ U < n < R/l,\ n\max\{0, \alpha(k/l)\} \leq m \leq n,$$

где $\alpha = \alpha(\beta)$ — функция, обратная к $\beta(\alpha)$, и обозначив в наших рассуждениях

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } \ 0 < x \leq 1/2, \\ \alpha(x) & \text{если } \ 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \tag{12}$$

получим

$$\#N_2(R,U) = \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{U<n<\frac{R}{l}} \sum_{t(\frac{k}{l}) \leq \frac{m}{n} \leq 1} [km + ln \leq R].$$

Определим множество

$$N_2^*(R,U) = \{(k,l,m,n) \in N_1(R,U) |\ \text{НОД}(k,l) = 1\}.$$

При этом

$$\#N_2(R,U) = \sum_{d<\frac{R}{U}} \#N_2^*\biggl(\frac{R}{d}, U\biggr), \tag{13}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\#N_2(R,U) &= \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{U<n<\frac{R}{l}} \sum_{t(\frac{k}{l}) \leq \frac{m}{n} \leq 1} [km + ln \leq R] = \\
&= \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{d|l} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ \text{НОД}(k,l)=d}} \sum_{U<n<\frac{R}{l}} \sum_{t(\frac{k}{l}) \leq \frac{m}{n} \leq 1} [km + ln \leq R] = \\
&= \sum_{d<\frac{R}{U}} \sum_{l<\frac{R}{Ud}} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ \text{НОД}(k,l)=1}} \sum_{U<n<\frac{R}{l}} \sum_{t(\frac{k}{l}) \leq \frac{m}{n} \leq 1} \left[km + ln \leq \frac{R}{d}\right] = \\
&= \sum_{d\leq U} \#N_2^*\biggl(\frac{R}{d}, U\biggr).
\end{aligned}$$

Представим $\#N_2^*(R,U)$ в виде

$$\#N_2^*(R,U)=\sum_{l<\frac{R}{U}}\sum_{\substack{1\le k\le l\\ \text{НОД}(k,l)=1}} T(R,U,k,l), \tag{14}$$

где $T(R,U,k,l)$ — число целых точек (n,m) с ненулевыми координатами, лежащими в многоугольнике

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|\ U<x\le R/l, xt(k/l)\le y\le x, 0\le y\le (R-xl)/k\}.$$

Из леммы 2, если положить

$$F(x)=\min\left(x,\frac{R-lx}{k}\right)-xt\left(\frac{k}{l}\right), \tag{15}$$

следует оценка

$$\begin{aligned}T(R,U,k,l)\ =\ &\sum_{u<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{k+l}-\frac{R}{l}\right)\left[k\le\frac{l}{2}\right]\left[U\le\frac{R}{k+l}\right]+\\ +\ &\frac{1}{2}\left(U-\frac{R}{l}\right)\left[k\le\frac{l}{2}\right]\left[\frac{R}{k+l}<U\le\frac{R}{l}\right]+\\ +\ &\frac{1}{2}\left(\frac{R}{k+l}-U\right)\left[\frac{l}{2}<k\le l\right]\left[U\le\frac{R}{k+l}\right]+O\left(\frac{R}{l^2}+s_1\left(\frac{k}{l}\right)\right).\end{aligned}$$

Отсюда, согласно (13), (14), лемме 3, получаем

$$\begin{aligned}\#N_2(R,U)=\ &\sum_{l<\frac{R}{U}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(n)-\frac{R}{2}\sigma_1(R,U)-\frac{R}{2}\sigma_2(R,U)-\frac{\sigma_3(R,U)}{2}+\\ +\ &\frac{\sigma_4(R,U)}{2}+\frac{\sigma_5(R,U)}{2}+O\left(\frac{R^2}{U^2}\log^2 R+R\log^2 R\right),\end{aligned}$$

где величины $\sigma_1(R,U),\dots,\sigma_5(R,U)$ определены в лемме 5. Воспользуемся ее результатами:

$$\#N_2(R,U)=\sum_{l<\frac{R}{U}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(n)+O\left(\frac{R^2}{U^2}\log^2 R+R\log^2 R\right).$$

Используя лемму 1, представим внутреннюю сумму в полученном выражении через интеграл и остаточный член:

$$\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(n)=\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(x)dx-\rho(U)F(U)+O\left(\frac{l}{k}\right),\text{если}\ \ U<\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})},$$

$$\sum_{U<n\le\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(n)=0,\ \text{во всех остальных случаях.}$$

Поскольку U — нечетное число, то

$$\#N_2(R,U)=\sum_{l<\frac{R}{U}}\sum_{\substack{k\le l\\ U<\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}}\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}}F(x)dx+O\left(\frac{R^2}{U^2}\log^2 R+R\log^2 R\right).$$

Вычисляя интеграл, воспользуемся формулами (12), (15) — определениями функций $t(x)$ и $F(x)$. Тогда

$$\int_U^{\frac{R}{l+kt(\frac{k}{l})}} F(x)dx = \int_U^R dx \int_{xt(k/l)}^x dy[lx+ky \le R].$$

Положим во внутреннем интеграле $\xi = lx + ky$ и изменим порядок интегрирования. После сделаем подстановку $v = \xi/U$. В результате получим

$$\int_U^R dx \int_{xt(k/l)}^x [lx+ky \le R]dy = \frac{1}{k}\int_1^R d\xi \int_U^R dx\left[\frac{\xi}{l+k} \le x \le \frac{\xi}{l+kt(k/l)}\right] =$$

$$= \frac{1}{k}\int_1^R \xi\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \max\left(\frac{U}{\xi}, \frac{1}{l+k}\right)\right)[\xi > U(l+kt(k/l)]d\xi =$$

$$= \frac{U^2}{k}\int_{1/U}^{R/U} v\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \max\left(\frac{1}{v}, \frac{1}{l+k}\right)\right)[v > l+kt(k/l)]dv.$$

Таким образом,

$$\# N_2(R,U) = U^2\int_{1/U}^{R/U} vF(v,R,U)dv + O\left(\frac{R^2}{U^2}\log^2 R + R\log^2 R\right), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} F(v,R,U) &= \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{\substack{k\le l\\ v\ge k+l}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \frac{1}{l+k}\right) - \sum_{l<\frac{R}{U}} \sum_{\substack{k\le l\\ l+kt(k/l)\le v<k+l}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{l+kt(k/l)}\right) = \\ &= \sum_{l\le v} \sum_{\substack{k\le l\\ v\ge k+l}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \frac{1}{l+k}\right) - \sum_{l\le v} \sum_{\substack{k\le l\\ l+kt(k/l)\le v<k+l}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{l+kt(k/l)}\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{\substack{k\le v\\ v\ge k+[v]}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{[v]+kt(k/[v])} - \frac{1}{[v]+k}\right) - \sum_{\substack{k\le v\\ [v]+kt(k/[v])\le v\\ v<k+[v]}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{[v]+kt(k/[v])}\right) =$$

$$= -\sum_{k\le\frac{[v]}{2}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{[v]}\right) = \frac{\{v\}}{v\cdot[v]}\sum_{k\le\frac{[v]}{2}}\frac{1}{k} \ll \frac{\log v}{v^2},$$

то $F(v,R,U)$ можно представить в виде

$$F(v,R,U) = F_1(v) - F_2(v) + O\left(\frac{\log v}{v^2}\right), \tag{17}$$

$$F_1(v) = \sum_{l\le v-1}\sum_{k\le l}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \frac{1}{l+k}\right),$$

$$F_2(v) = \sum_{l\le v-1} \sum_{\substack{k\le l\\ l+kt(k/l)\le v\\ l+k>v}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{l+kt(k/l)}\right) + \sum_{l\le v-1}\sum_{\substack{k\le l\\ l+k>v}} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{l+kt(k/l)} - \frac{1}{l+k}\right).$$

Выведем асимптотическую формулу для $F_1(v+1)$. Для этого воспользуемся леммой 1, определениями функций $t(x)$ и $\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}
F_1(v+1) &= \sum_{l\le v}\bigg(\sum_{k\le l/2}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+k}\Big)+\sum_{\frac{l}{2}<k\le l}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2k}-\frac{1}{l+k}\Big)\bigg)= \\
&= \sum_{l\le v}\bigg(\sum_{k\le l/2}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+k}\Big)+\sum_{\frac{l}{2}<k\le l}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2k}-\frac{1}{l+k}\Big)-\frac{1}{2l}\bigg)+\frac{1}{2}\sum_{l\le v}\frac{1}{l}= \\
&= H+\frac{1}{2}\sum_{l\le v}\frac{1}{l}-\sum_{l>v}\bigg(\sum_{k\le l/2}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+k}\Big)+\sum_{\frac{l}{2}<k\le l}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2k}-\frac{1}{l+k}\Big)-\frac{1}{2l}\bigg).
\end{aligned}$$

Величина H определена в лемме 4. Так как

$$\sum_{k\le l/2}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+k}\Big)+\sum_{\frac{l}{2}<k\le l}\frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2k}-\frac{1}{l+k}\Big)-\frac{1}{2l}=-\frac{1}{l^2}+O(l^{-3}),$$

то

$$F_1(v+1,R,U)=H+\frac{1}{2}\sum_{l\le v}\frac{1}{l}+\frac{1}{v}+O\Big(\frac{1}{v^2}\Big).$$

Принимая во внимание оценки $\log(v-1)=\log v-1/v+O(v^{-2})$, $1/(v-1)=1/v+O(v^{-2})$, получаем

$$F_1(v)=\frac{\log v}{2}+H+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2v}+\frac{\rho(v)}{2v}+O\Big(\frac{1}{v^2}\Big). \tag{18}$$

В обозначениях леммы 6 $F_2(v)=F^{(1)}(v)+F^{(2)}(v)$. Таким образом, учитывая равенство $\mathrm{Li}_2(1)=\zeta(2)$, получаем

$$F_2(v)=\frac{\log^2 3}{2}-\frac{\log 2}{2}+1-\frac{3}{2}\zeta(2)+\mathrm{Li}_2(2/3)-\mathrm{Li}_2(-1/2)+\frac{\rho(v)}{2v}+O\Big(\frac{\log v}{v^2}\Big).$$

Подставим найденное соотношение и (18) в (17):

$$F(v,R,U)=\frac{\log v}{2}+2\sigma_0'+\frac{1}{4}+\frac{1}{2v}+O\Big(\frac{\log v}{v^2}\Big).$$

Здесь σ_0' — константа, определенная в формулировке леммы 9. Теперь мы можем найти асимптотическую формулу для $\#N_2(R,U)$ из (16). Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть R — вещественное число и $R\ge 2$. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\#N(R)=\frac{R^2}{4}\log R+\sigma_0R^2+O(R\log^2 R),$$

где

$$\sigma_0=\frac{\gamma}{2}-\frac{7}{12}\zeta(2)-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\log\Big(\frac{3}{2}\Big)(1-\log 2)-\frac{\log^2 3}{4}-\frac{\mathrm{Li}_2(\frac{2}{3})}{2}+\frac{\mathrm{Li}_2(-\frac{1}{2})}{2}.$$

Доказательство. Пусть U — полуцелое положительное число и $U<R$. Разобьем множество $N(R)$, определенное формулой (5), на два непересекающихся множества $N_1(R,U)$ и $N_2(R,U)$, определенных в леммах 7 и 8. Тогда

$$\#N(R)=\#N_1(R,U)+\#N_2(R,U).$$

Воспользуемся результатами этих лемм, положив $U = [\sqrt{R}] + 1/2$.

Доказательство теоремы. Для действительного $R \geq 1$ положим

$$S(R) = \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}; 1\right).$$

Из соотношения (1) следует равенство

$$S(R) = \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d/2} \#\mathfrak{M}_1\left(\Gamma\left(\frac{c}{d}\right)\right) - \frac{3R^2}{4} + O(R). \tag{19}$$

Посчитаем первое слагаемое в правой части полученного равенства, обозначив его через $\Sigma(R)$. Для этого воспользуемся формулой (4):

$$\sum_{c \leq d/2} \#\mathfrak{M}_1\left(\Gamma\left(\frac{c}{d}\right)\right) = \sum_{\substack{t \leq d/2 \\ t|d}} \left(2T_1^*\left(\frac{d}{t}\right) + \varphi\left(\frac{d}{t}\right)\right) = 2\sum_{t|d} T_1^*\left(\frac{d}{t}\right) + d - 1.$$

Используя определение (9) множества $N^*(R)$, получим оценку

$$\Sigma(R) = 2 \cdot \#N^*(R) + \frac{R^2}{2} + O(R).$$

Применим формулу обращения Мебиуса к $\#N^*(R)$. Тогда

$$\Sigma(R) = 2\sum_{t \leq R} \#N\left(\frac{R}{t}\right)\mu(t) + \frac{R^2}{2} + O(R). \tag{20}$$

С помощью леммы 9 находим

$$\sum_{t \leq R} \#N\left(\frac{R}{t}\right)\mu(t) = \frac{R^2 \log R}{4\zeta(2)} + R^2\left(\frac{\sigma_0}{\zeta(2)} - \frac{\zeta'(2)}{4\zeta^2(2)}\right) + O(R \log^3 R).$$

Для завершения доказательства объединим полученное соотношение, (19), (20) и определение величин $S(R)$ и $E'(R)$. Теорема доказана.

Автор выражает признательность В.А. Быковскому за постановку задачи. Автор также благодарна рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

[1] H. Minkowski, “Zur Theorie der Kettenbruche”, *Annales de l’Ecole Normale Superieure*, **13**:3, (1894), 41-60.

[2] B. Vallée, “Dynamical analysis of a class of Euclidean Algorithms”, *Theoret. Comput. Sci.*, **297**, (2003), 447-486.

[3] Y. Hartono, *Ergotic properties of continued fraction algorithms*, Thesis (Dr.)–Technische Universiteit Delft (The Netherlands), 2003, ISBN: 90-407-2381-8, 119 с.

[4] J.W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1, (1975), 20-28.

[5] D.E. Knuth, “Evaluation of Porter’s Constant”, *Comp. and Maths. with Appls.*, **2**, (1976), 137-139.

[6] G.H. Norton, “On the asymptotic analysis of the Euclidean algorithm”, *J. Symbolic Comput.*, **10**:1, (1990), 53-58.

[7] А.В. Устинов, “Асимптотическое поведение первого и второго момента для числа шагов в алгоритме Эвклида”, *Известия РАН*, **72**:5, (2008), 189-224.

[8] V Baladi, B. Vallée, “Euclidean algorithms are Gaussian”, *J. Number Theory*, **110**, (2005), 331-386.

[9] А.В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка”, *Математические заметки*, **85**:1, (2009), 153-156.
[10] А.В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными”, *Математические заметки*, **88**:4, (2010), 594-604.
[11] О.А. Горкуша, “О конечных цепных дробях специального вида”, *Чебышевский сборник*, **9**:1(25), (2008), 80-108.
[12] А.А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, М.: Наука, 1983, 500 с.
[13] А.Я. Хинчин, *Избранные труды по теории чисел*, М.: МЦНМО, 2006, 260 с.
[14] D.E. Knuth, A.C. Yao, “Analysis of the Subtractive Algorithm for Greatest Common Divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **72**:12, (1975), 4720-4722.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 июля 2010 г.

Работа выполнена при поддержке РФФИ 10-01-98001-р-сибирь-а

Gorkusha O.A. The average length of Minkowski's diagonal continued fractions. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 10–27.

ABSTRACT

We prove asymptotic formulae with two significant terms for the expectation of the random variable $s(c/d;1)$ — length of Minkowski's diagonal continued fraction when the variables c and d range over the set $1 \le c \le d \le R < \infty$.
Key words: *Continued fractions, geometry of numbers, lattices*