ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 1. С. 28–36

УДК 512.62, 517.54
MSC2000 30C10, 30C75

© В. Н. Дубинин[1]

К теоремам искажения для алгебраических полиномов

Рассматриваются приложения одной из граничных версий леммы Шварца, а также приложения свойств конформной емкости конденсаторов к некоторым неравенствам для модулей полиномов и их производных. Доказывается новое неравенство бернштейновского типа для полиномов на окружности. Устанавливаются двусторонние оценки для полиномов с ограничениями на их критические значения и двусторонние оценки усредненного искажения по всем нулям полинома.

Ключевые слова: *полиномы, критические точки, критические значения, полином Чебышева, неравенство Бернштейна, теоремы искажения, емкости конденсаторов.*

Введение

Хорошо известен интерес математиков разных специальностей к классическим и современным неравенствам для полиномов (см., например, [1]–[3]). Данная статья дополняет исследования по применению геометрической теории функций комплексного переменного к такого рода неравенствам, начатые в работах [4]–[8] и отличные от подходов в [1]–[3]. Рассматриваются произвольные алгебраические полиномы вида

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

с комплексными коэффициентами c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. В первом параграфе устанавливается оценка модуля величины

$$\left(|P(z)|^2\right)'_\varphi = -2|P(z)|^2 \mathrm{Im} \frac{zP'(z)}{P(z)}$$

в точках $z = e^{i\varphi}$ единичной окружности $|z| = 1$ (теорема 1). Эта оценка зависит от модулей коэффициентов c_0, c_n и следующих величин:

$$m(P) = \min\{|P(z)| : |z| = 1\}, \qquad M(P) = \max\{|P(z)| : |z| = 1\}.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на граничную версию леммы Шварца для голоморфных накрытий единичного круга, предложенную в [7]. В качестве следствий этой теоремы выведены оценки для модуля $|P(z)|$ и, в частности, получено усиление недавнего результата Шейл-Смолла [9]. С другой стороны, из оценки модуля $|P(z)|$ вытекает иное доказательство классического неравенства Бернштейна для тригонометрических сумм [10, с.154]. Во втором параграфе доказывается общая теорема для полиномов с критическими значениями, принадлежащими некоторому континууму γ. Под критическим значением понимается значение

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: dubinin@iam.dvo.ru

полинома P в критических точках, т.е. в точках ζ, где производная $P'(\zeta)=0$. Выбирая в качестве γ, например, круг или отрезок, получаем конкретные точные оценки с участием критических точек и критических значений полинома. Интерес к такого рода оценкам вызван известной работой Смейла [11] (см. также [3]). В случае, когда континуум γ есть круг, экстремальным является полином вида $P(z)=(1+tz)^n$, $t\neq 0$, а в случае, когда континуум γ представлен в виде отрезка – полином Чебышева первого рода $T_n(z)=2^{n-1}z^n+\ldots$. Доказательства части утверждений из §2 и утверждений §3 опираются на свойства конформной емкости конденсаторов. Соответствующие обозначения и определения взяты нами из [12]. При доказательстве теоремы 3 используется голоморфная функция, описанная в статье [6], которая позволяет свести утверждения для полиномов к некоторым теоремам для известных классов однолистных функций [13]. Доказательство неравенства (6) теоремы 3 является примером применения такого подхода. В третьем параграфе поднимается вопрос об оценках средних значений модулей $|P'(z_k)|$ в точках z_k, имеющих одинаковый образ при отображении P: $P(z_k)=P(z_1)$, $k=1,\ldots,n$. Мы рассматриваем случай, когда z_k, $k=1,\ldots,n$, – нули полинома P. При доказательстве одной из оценок используется аналог неравенства Шура [14], взятый из книги [12].

1. Неравенства для полиномов и их производных на окружности

Всюду ниже приняты обозначения из введения. Следующий результат относится к так называемым неравенствам бернштейновского типа [1]–[3].

Теорема 1. *Для любого полинома $P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$, $n\geq 2$, и любой точки z на окружности $|z|=1$, в которой $|P(z)|$ отличен от $m(P)$ и $M(P)$, справедливы неравенства*

$$\frac{\left|\left(|P(z)|^2\right)'_\varphi\right|}{\sqrt{\left(|P(z)|^2-m^2(P)\right)\left(M^2(P)-|P(z)|^2\right)}}\leq \lambda_n:=$$

$$:=\frac{n^2\left(M^2(P)-m^2(P)+4|c_0c_n|\right)}{(n+1)\left(M^2(P)-m^2(P)\right)+4|c_0c_n|(n-1)}\leq n. \qquad (1)$$

Равенства в левой и правой части (1) *достигаются в случае $P(z)=c_0+c_nz^n$ для любых точек z, $|z|=1$, $z^n\neq\pm c_0/c_n$, где c_0 и c_n - произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0|=|c_n|\neq 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $c_0\neq 0$ и $c_n\neq 0$. В этих условиях $m(P)<M(P)$. Действительно, в противном случае полином P отображает окружность $|z|=1$ в себя и, ввиду того, что $P(\infty)=\infty$, принцип симметрии дает равенство $P(0)=0$. Это противоречит допущению $P(0)=c_0\neq 0$. Обозначим через $\zeta=\Phi(w)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает внешность отрезка $\gamma=\left[m^2(P),M^2(P)\right]$ на круг $|\zeta|<1$ так, что $\Phi(\infty)=0$ и $\Phi(m^2(P))=-1$. Тогда функция

$$f(z)=\Phi\left(\overline{P(\overline{z})}P(1/z)\right)$$

регулярна на множестве

$$G=\left\{z:|z|<1,\ \overline{P(\overline{z})}P(1/z)\notin\gamma\right\}$$

и аналитически продолжима на множество

$$E=\left\{z:|z|=1,\ |P(\overline{z})|\neq m(P),\ |P(\overline{z})|\neq M(P)\right\}.$$

В некоторой окрестности начала координат справедливо разложение

$$f(z)=\frac{M^2(P)-m^2(P)}{4\overline{c_0}c_n}z^n+\dots .$$

Кроме того, $f(z)\neq 0$ при $z\in G\setminus\{0\}$ и все предельные граничные значения $|f(z)|$ в G равны единице. По теореме 1 работы [7] в точках z множества E выполняются неравенства

$$|f'(z)|\leq \lambda_n\leq n. \tag{2}$$

Равенство в обеих частях (2) достигается в случае, если функция $f(z)=cz^n$, $|c|=1$, и область $G=\{z:|z|<1\}$. Непосредственное вычисление модуля производной $|f'(z)|$, аналогичное вычислению на странице 58 работы [5], дает

$$|f'(z)|=\frac{\left|\left(|P(\overline{z})|^2\right)'_\varphi\right|}{\sqrt{\left(|P(\overline{z})|^2-m^2(P)\right)\left(M^2(P)-|P(\overline{z})|^2\right)}},$$

$z=e^{i\varphi}\in E$. Учитывая непрерывность функции $|f'(z)|$ заключаем, что неравенство (1) выполняется для всех точек z на окружности $|z|=1$, в которых $|P(z)|$ отличен от $m(P)$ и $M(P)$. Что касается проверки случая, когда достигаются равенства в (1), то для полинома $P(z)=c_0+c_nz^n$ с $|c_0|=|c_n|$ имеем $m(P)=0$, $M(P)=2|c_0|$ и, следовательно, $\lambda_n=n$. Левая часть неравенства (1) также равна n. Действительно, в этом случае

$$\Phi^{-1}(f(z))=(\overline{c_0}+\overline{c_n}z^n)\left(c_0+c_n\frac{1}{z^n}\right)=2|c_0|^2+|c_0|^2\left(\frac{c_0}{c_n}z^n+\frac{c_n}{c_0}\frac{1}{z^n}\right),$$

а по определению функции Φ

$$\Phi^{-1}(f(z))=2|c_0|^2+|c_0|^2\left(f(z)+\frac{1}{f(z)}\right).$$

Таким образом, $f(z)=(c_0/c_n)z^n$ и для таких функций в неравенствах (2) выполняется равенство. Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что в случае $M^2(P)-m^2(P)<4|c_0c_n|(n-1)^2$ неравенство (1) сильнее неравенства (12) работы [5].

Теорема 2. *Для полинома P степени n, удовлетворяющего условию $m(P)\neq M(P)$, и для любых вещественных чисел φ_1,φ_2 справедливо неравенство*

$$\left|\arcsin\sqrt{\frac{\left|P(e^{i\varphi})\right|^2-m^2(P)}{M^2(P)-m^2(P)}}\right|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Bigg|\leq\frac{\lambda_n|\varphi_1-\varphi_2|}{2}, \tag{3}$$

где величина λ_n определена в формулировке теоремы 1.

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi_1<\varphi_2$. Интегрируя неравенство (1) на интервале (φ_1,φ_2) и делая замены последовательно $u=u(\varphi)=\left|P(e^{i\varphi})\right|^2$, $t=\sqrt{u-m^2(P)}$, получаем

$$\lambda_n(\varphi_2-\varphi_1)\geq\pm\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{u'_\varphi d\varphi}{\sqrt{(u-m^2(P))(M^2(P)-u)}}=\pm\int\limits_{u(\varphi_1)}^{u(\varphi_2)}\frac{du}{\sqrt{(u-m^2(P))(M^2(P)-u)}}=$$

$$=\pm 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\sqrt{M^2(P)-m^2(P)-t^2}}=\pm 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{M^2(P)-m^2(P)}}\Bigg|_{t_1}^{t_2},$$

где $t_k = \sqrt{u(\varphi_k) - m^2(P)},\ k = 1, 2$. Теорема доказана.

Следствие 1. (ср. [9, теорема 1]). *Для любого полинома P степени n и любого натурального числа $N \geq n$ выполняется неравенство*

$$\max_{\omega^N=1} |P(\omega)| \geq \cos\frac{\pi\lambda_n}{2N} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_0 = e^{i\varphi_0}$ – одна из точек, в которой достигается максимум $M(P)$. Среди корней N-ой степени из единицы найдется по крайней мере один, пусть $\omega_k = e^{i\varphi_k}$, такой, что $|\varphi_k - \varphi_0| \leq \pi/N$. Применяя неравенство (3), получаем

$$\arcsin\sqrt{\frac{\left|P(e^{i\varphi_k})\right|^2 - m^2(P)}{M^2(P) - m^2(P)}} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda_n}{2}|\varphi_k - \varphi_0| \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\lambda_n}{2N} \geq 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{\left|P(e^{i\varphi_k})\right|^2 - m^2(P)}{M^2(P) - m^2(P)}} \geq \cos\frac{\pi\lambda_n}{2N},$$

и, следовательно,

$$\left|P(e^{i\varphi_k})\right| \geq M(P)\cos\frac{\pi\lambda_n}{2N}.$$

Осталось заметить, что $\left|P(e^{i\varphi_k})\right| \leq \max\limits_{\omega^N=1} |P(\omega)|$. Следствие доказано.

Следствие 2. (см. [10, с.154]). *Предположим, что тригонометрическая сумма*

$$S_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta$$

удовлетворяет условиям $|S_n(0)| \leq 1,\ |S_n(\alpha)| \leq 1$ при некотором $\alpha,\ 0 < \alpha < \pi/n$. Если абсолютный максимум M выражения $|S_n(\theta)|$ достигается на интервале $(0, \alpha)$, то

$$M \leq \frac{1}{\cos\frac{n\alpha}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем тригонометрическую сумму в виде

$$S_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Делая замену $z = e^{i\theta}$, приходим к равенству

$$S_n(\theta) = z^{-n} P(z),$$

где $P(z)$ – алгебраический полином степени $2n$. В условиях следствия выполняются соотношения

$$|P(1)| \leq 1, \quad \left|P(e^{i\alpha})\right| \leq 1, \quad M(P) = M = \left|P(e^{i\alpha_0})\right|$$

при некотором α_0, $0 < \alpha_0 < \alpha$. Повторяя доказательство предыдущего следствия, получаем неравенство

$$\left|P(e^{i\varphi})\right| \geq M(P)\cos n(\varphi - \alpha_0),$$

справедливое для любых φ, $|\varphi - \alpha_0| \leq \pi/2n$, Полагая здесь $\varphi = 0$ или $\varphi = \alpha$, в зависимости от того, что $\alpha_0 \leq \alpha/2$ или, соответственно, $\alpha_0 \geq \alpha/2$, приходим к требуемому неравенству. Следствие доказано.

2. Ограничения на критические значения полиномов

Для произвольного невырожденного континуума γ открытой w-плоскости обозначим через $F(w)$ функцию Римана:

$$F(w) = (d(\gamma))^{-1}w + a_0 + \frac{a_1}{w} + \dots$$

– конформно и однолистно отображающую связную компоненту множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащую бесконечность, на область $|\zeta| > 1$.

Теорема 3. *Предположим, что все критические значения полинома P степени $n \geq 2$ принадлежат некоторому невырожденному континууму $\gamma \subset \mathbb{C}_w$, и пусть точка z такова, что ее образ $P(z)$ принадлежит связной компоненте множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащей бесконечно удаленную точку. Тогда выполняются неравенства*

$$|\zeta - z||P'(z)| \leq \frac{n|F(P(z))|\left(|F(P(z))|^{1/n} + 1\right)}{|F'(P(z))|\left(|F(P(z))|^{1/n} - 1\right)}, \tag{4}$$

$$|\zeta - z| \geq (d(\gamma)/|c_n|)^{1/n}\left(|F(P(z))|^{1/2n} - |F(P(z))|^{-1/2n}\right)^2. \tag{5}$$

Если, дополнительно, $P(1)$ не принадлежит указанной выше связной компоненте, то справедливы также неравенства

$$\frac{|F(P(z))|^{1/n} - 1}{|F(P(z))|^{1/n} + 1} \leq \left|\frac{nF(P(z))}{(z-1)P'(z)F'(P(z))}\right| \leq \frac{|F(P(z))|^{1/n} + 1}{|F(P(z))|^{1/n} - 1}. \tag{6}$$

Здесь ζ – произвольная критическая точка полинома P, c_n – старший коэффициент этого полинома, F – функция Римана, соответствующая континууму γ, а $d(\gamma)$– постоянная Чебышева.

Доказательство. Обозначим через G связную компоненту множества $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \gamma$, содержащую бесконечно удаленную точку, и пусть $B = \{z : P(z) \in G\}$. Согласно лемме 2.7 работы [6], функция $\Psi(z) := (F(P(z)))^{1/n}$ распадается в односвязной области B на n регулярных ветвей, каждая из которых однолистно отображает эту область на область $|\zeta| > 1$. Далее Ψ означает одну из этих ветвей.

Начнем с доказательства неравенства (4). Пусть z_0 – произвольная фиксированная точка области B, а ζ – произвольная критическая точка полинома P, $\zeta \notin B$. В плоскости $\overline{\mathbb{C}_z}$ рассмотрим конденсатор $C(r; \mathbb{C}_z \setminus \Gamma, \Gamma, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\})$, где $\Gamma = \{z : z = z_0 + (\zeta - z_0)t,\ t \geq 1\}$ [12, с.38,43]. Обозначим через Γ' связное подмножество $\Gamma \cap B$, соединяющее точку $z = \infty$ с границей ∂B, а через Cr – круговую симметризацию относительно вещественной отрицательной полуоси [12, с. 108]. Из монотонности емкости, конформной инвариантности емкости и принципа круговой симметризации Полиа последовательно получаем

$$\operatorname{cap} C(r; \mathbb{C}_z \setminus \Gamma, \Gamma, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\}) \geq \operatorname{cap} C(r; B \setminus \Gamma', \overline{\Gamma'}, \{z_0\}, \{0, 1\}, \{r\}) =$$

$$= \operatorname{cap} C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(\Gamma')\}, \Psi(\overline{\Gamma'}), \{\Psi(z_0)\}, \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}) \geq$$

$$\geq \operatorname{cap} \operatorname{Cr} C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin \Psi(\Gamma')\}, \Psi(\overline{\Gamma'}), \{\Psi(z_0)\}, \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}) =$$

$$= \operatorname{cap} C(r; \{\zeta : |\zeta| > 1, \zeta \notin [-\infty, -1]\}, [-\infty, -1], \{|\Psi(z_0)|\}, \{0, 1\}, \{|\Psi'(z_0)|r\}).$$

Ввиду симметрии функции Жуковского $\omega = (\zeta + 1/\zeta)/2$, последняя емкость равна емкости конденсатора

$$C(r; \mathbb{C}_\omega \setminus [-\infty, -1], [-\infty, -1], \{(|\Psi(z_0)| + 1/|\Psi(z_0)|)/2\},$$

$$\{0,1\},\{(|1-|\Psi(z_0)|^{-2}|/2)|\Psi'(z_0)|r\}).$$

Сравнивая асимптотику емкости этого конденсатора с асимптотикой емкости конденсатора $C(r;\mathbb{C}_z\setminus\Gamma,\Gamma,\{z_0\},\{0,1\},\{r\})$ при $r\to 0$, приходим к неравенству

$$4|\zeta-z_0|\left(|1-|\Psi(z_0)|^{-2}|/2\right)|\Psi'(z_0)|\le 4(1+(|\Psi(z_0)|+1/|\Psi(z_0)|)/2)$$

(см. [12, с. 40,44]). Отсюда следует неравенство (4) для $z=z_0$.

Для доказательства неравенства (5) рассмотрим конденсатор $C(r;\overline{\mathbb{C}_z}\setminus[z_0,\zeta],[z_0,\zeta],\{\infty\},\{0,1\},\{r\})$, где z_0 и ζ определены выше. Вновь из монотонности, конформной инвариантности, принципа круговой симметризации и симметрии функции Жуковского получаем

$$\operatorname{cap} C(r;\overline{\mathbb{C}_z}\setminus L,L,\{\infty\},\{0,1\},\{r\})\ge \operatorname{cap} C(r;B\setminus L',\overline{L'},\{\infty\},\{0,1\},\{r\})=$$

$$=\operatorname{cap} C(r;\{\zeta:|\zeta|>1,\zeta\notin\Psi(L')\},\Psi(\overline{L'}),\{\infty\},\{0,1\},\{(d(\gamma)/|c_n|)^{1/n}r\})\ge$$

$$\ge\operatorname{cap}\operatorname{Cr} C(r;\{\zeta:|\zeta|>1,\zeta\notin\Psi(L')\},\Psi(\overline{L'}),\{\infty\},\{0,1\},\{(d(\gamma)/|c_n|)^{1/n}r\})=$$

$$=\operatorname{cap} C(r;\{\zeta:|\zeta|>1,\zeta\notin[-|\Psi(z_0)|,-1]\},[-|\Psi(z_0)|,-1],\{\infty\},\{0,1\},$$

$$\{(d(\gamma)/|c_n|)^{1/n}r\})=\operatorname{cap} C(r;\mathbb{C}_\omega\setminus[-(|\Psi(z_0)|+1/|\Psi(z_0)|)/2,-1],$$

$$[-(|\Psi(z_0)|+1/|\Psi(z_0)|)/2,-1],\{\infty\},\{0,1\},\{2(d(\gamma)/|c_n|)^{1/n}r\}).$$

Здесь $L=[z_0,\zeta]$, а L' – связное подмножество $L\cap B$, соединяющее точку z_0 с границей ∂B.

Сравнение асимптотик первой и последней емкости в выписанных соотношениях при $r\to 0$ дает неравенство

$$|\zeta-z_0|\ge 2\left(\frac{d(\gamma)}{|c_n|}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left(|\Psi(z_0)|+\frac{1}{|\Psi(z_0)|}\right)-1\right],$$

которое совпадает с неравенством (5).

Перейдем теперь к доказательству неравенства (6). Из свойств функции Ψ и условия $P(1)\notin G$ следует, что функция $z=f(\omega)$, обратная к суперпозиции

$$\omega=\left(\Psi\left(\left(\frac{d(\gamma)}{c_n}\right)^{1/n}\frac{1}{z}+1\right)\right)^{-1},$$

принадлежит известному классу S. Для таких функций справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{1-|\omega|}{1+|\omega|}\le\left|\frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega)}\right|\le\frac{1+|\omega|}{1-|\omega|},$$

$0<|\omega|<1$ (см., например, [13, с.35]). После простых вычислений убеждаемся, что данная оценка влечет за собой неравенство (6). Теорема доказана.

Отметим частные случаи неравенств (4) и (5), когда все критические значения полинома P принадлежат кругу $|w-w_0|\le R$. В этом случае $\gamma=\{w:|w-w_0|\le R\}$, $F(w)=(w-w_0)/R$ и $d(\gamma)=R$. Из неравенства (4) вытекает оценка

$$|\zeta-z||P'(z)|\left(|P(z)-w_0|-R^{1/n}\right)\le n|P(z)-w_0|\left(|P(z)-w_0|+R^{1/n}\right),$$

справедливая для любой точки $z\in\mathbb{C}$. Полагая $w_0=0$, получаем следствие 3.

Следствие 3. (ср. [4, теорема 7]). *Если $P(z)=1+c_1z+\ldots+c_nz^n$, $n\ge 2$, $c_n\ne 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a, $P'(a)=0$, такая, что*

$$|\zeta P'(0)|\left(1-|P(a)|^{1/n}\right)\le n\left(1+|P(a)|^{1/n}\right)$$

для любых критических точек ζ. Равенство достигается для полинома $P(z) = (1+tz)^n$, где t – произвольное комплексное число, отличное от нуля.

Неравенство (5) дает следствие 4.

Следствие 4. *Если $P(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $n \geq 2$, $c_n \neq 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a, $P'(a) = 0$, такая, что либо $|P(a)| \geq 1$, либо*

$$|\zeta| \geq (1/|c_n|)^{1/n} \left(|P(a)|^{1/n} - 1\right)^2$$

для любых критических точек ζ. Равенство в последнем соотношении выполняется в случае, когда $P(z) = (1+tz)^n$, $t \neq 0$.

Рассмотрим также частный случай неравенства (6), когда $\gamma = [L(P), H(P)]$, где

$$L(P) = \min\{\operatorname{Re} P(z) : z \in [-1,1]\} \quad \text{и} \quad H(P) = \max\{\operatorname{Re} P(z) : z \in [-1,1]\}.$$

Функция F конформно и однолистно отображает внешность отрезка γ на область $|\zeta| > 1$, и, следовательно, обратная функция имеет вид

$$F^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{H(P) - L(P)}{2} + \frac{H(P) + L(P)}{2} = \frac{1}{4}(H(P) - L(P))\zeta + \ldots,$$

$d(\gamma) = \frac{1}{4}(H(P) - L(P))$. Неравенство (6) дает следствие 5.

Следствие 5. (ср. [7, теорема 7]). *Для любого полинома P степени n с вещественными коэффициентами и с критическими точками на отрезке $[-1,1]$ выполняется*

$$\frac{|F(P(z))|^{1/n} - 1}{|F(P(z))|^{1/n} + 1} \leq \left|\frac{n(H(P) - L(P))\left[F^2(P(z)) - 1\right]}{4(z-1)P'(z)F(P(z))}\right| \leq \frac{|F(P(z))|^{1/n} + 1}{|F(P(z))|^{1/n} - 1}, \tag{7}$$

где z – произвольная точка плоскости $\mathbb{C}$, для которой $P(z) \notin [L(P), H(P)]$. Равенство в левой части (7) достигается для полинома Чебышева $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \ldots$ при $-\infty < z < -1$, а в правой части (7) – для того же полинома и $1 < z < \infty$.

3. Оценки усредненных искажений

Предположим, что все нули полинома P степени n лежат на отрезке $[-1,1]$. Из теоремы 4.5 работы [6] следует неравенство бернштейновского типа

$$\left|P'(z)\sqrt{1-z^2}\right| \leq n\frac{H(P) - L(P)}{2}\sqrt[2n]{\frac{2^{2-n}|c_n|}{H(P) - L(P)}},$$

справедливое при любом $z \in [-1,1]$. Здесь c_n – старший коэффициент полинома P, и

$$2^{2-n}|c_n| \leq H(P) - L(P)$$

(см. [6, с. 28]). Данное неравенство допускает уточнение, если его левую часть заменить на среднее геометрическое значений этой части, вычисленных в нулях полинома P.

Теорема 4. *Для любого полинома*

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{n}(z - z_k), \qquad c_n \neq 0,$$

с нулями $z_k \in [-1,1]$, $k = 1,\dots,n$, справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|P'(z_k)\sqrt{1-z_k^2}\right|} \le n2^{1-n}|c_n|.$$

Равенство достигается в случае полинома Чебышева T_n.

Доказательство. Можно считать, что все нули полинома P попарно различны и принадлежат интервалу $(-1,1)$. В книге [12, с. 150] в качестве приложения свойств емкостей конденсаторов был предложен следующий аналог классического неравенства Шура:

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|z_k - z_l|\right)\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1-z_k^2} \le n^n 2^{n-n^2}. \tag{8}$$

Остается заметить, что для любого $k = 1,\dots,n$

$$|P'(z_k)| = |c_n|\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|z_k - z_l|$$

и, следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n}|P'(z_k)| = |c_n|^n\prod_{k=1}^{n}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|z_k - z_l|.$$

Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Теорема 5. *Предположим, что полином P степени n удовлетворяет следующим условиям: все нули z_k, $k = 1,\dots,n$, полинома P лежат на отрезке $[-1,1]$, а все критические значения и значения в точках $z = \pm 1$ лежат на вещественной оси вне интервала $(-1,1)$. Тогда*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left|P'(z_k)\sqrt{1-z_k^2}\right|} \ge n.$$

Знак равенства выполняется в случае $P = T_n$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $B = \mathbb{C}_w \setminus \{w : \operatorname{Im} w = 0,\ |\operatorname{Re} w| \ge 1\}$, $\mathcal{R}$ – риманова поверхность функции, обратной к полиному P, лежащая над w-плоскостью, $\mathcal{P}$ – соответствующее P отображение сферы $\overline{\mathbb{C}_z}$ на $\mathcal{R}$ (проекция $\mathcal{P}(z)$ равна $P(z)$), W_k – образы точек z_k на поверхности $\mathcal{R}$ при отображении $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}_k$, $k = 1,\dots,n$, – копии области B, лежащие на $\mathcal{R}$ над областью B. Мы считаем точки z_k, $k = 1,\dots,n$, различными и лежащими на интервале $(-1,1)$. Из условий теоремы следует, что области

$$D_k := \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{B}_k), \qquad k = 1,\dots,n,$$

являются односвязными, попарно непересекающимися и не содержащими точек $z = \pm 1$. Следовательно, дополнение

$$\overline{\mathbb{C}_z} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k$$

содержит некоторый континуум, соединяющий точки $z = \pm 1$. По теореме 6.18 из книги [12] справедлива оценка

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{r(D_k, z_k)}{\left|\sqrt{1-z_k^2}\right|} \le \left(\frac{2}{n}\right)^n, \tag{9}$$

где $r(D, z)$ означает внутренний радиус области D относительно точки z [12, с. 30]. С другой стороны,

$$r(D_k, z_k) = r(\mathcal{B}_k, W_k)\frac{1}{|P'(z_k)|} = r(B, 0)\frac{1}{|P'(z_k)|} = \frac{2}{|P'(z_k)|},$$

$k = 1, \ldots, n$. Осталось подставить эти соотношения в неравенство (9). Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Список литературы

[1] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Scientific Publishing Co., Inc., Singapore, 1994.

[2] P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math, v. 161, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, London Math. Soc. Monographs, New Series, v. 26, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[4] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, "Приведенные модули и неравенства для полиномов", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **263**, (2000), 70–83.

[5] В. Н. Дубинин, "Теоремы искажения для полиномов на окружности", *Матем. сб.*, **191**:12, (2000), 51–60.

[6] В. Н. Дубинин, "Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов", *Алгебра и анализ*, **13**:5, (2001), 16–43.

[7] В. Н. Дубинин, "Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов. II", *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **302**, (2003), 18–37.

[8] В. Н. Дубинин, "О полиномах с критическими значениями на отрезке", *Мат. заметки*, **78**:6, (2005), 827–832.

[9] T. Sheil-Small, "An inequality for the modulus of a polynomial evaluated at the roots of unity", *Bull. London Math. Soc.*, **40**, (2008), 956–964.

[10] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, т. 2, Из-во АН СССР, М., 1954.

[11] S. Smale, "The fundamental theorem of algebra and complexity theory", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **4**:1, (1981), 1–36.

[12] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[13] P. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[14] I. Schur, "Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten", *Math. Zeit.*, **1**, (1918), 377-402.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 марта 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00038) и ДВО РАН (проект 09-I-П4-02).

Dubinin V.N. On the distortion theorems for algebraic polynomials. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 28–36.

ABSTRACT

The applications of a boundary Schwarz lemma and the properties of the condenser capacity to some inequalities for polynomials and their derivatives are considered. We prove a new Bernstein-type inequality for the polynomials on a circle, two-sided estimates for the polynomials with constraints on their critical values, and two-sided estimates of the average distortion computed at zeros of the polynomials.

Key words: *polynomials, critical points, critical values, Chebyshev polynomial, Bernstein-type inequality, distortion theorem, condenser capacity.*