УДК 511.36, 511.9
MSC2000 11J70, 11H06

© А. А. Илларионов[1]

О цилиндрических минимумах трехмерных решеток

Ненулевой узел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ трехмерной решетки Γ назовем цилиндрическим минимумом Γ, если не существует другого ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ такого, что

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 \leqslant \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad |\eta_3| \leqslant |\gamma_3|, \quad |\gamma| < |\eta|.$$

В работе доказывается, что среднее значение количества цилиндрических минимумов трехмерных целочисленных решеток с определителем из отрезка $[1; N]$ равно

$$\mathcal{C} \cdot \ln N + O(1),$$

где $\mathcal{C}$ — некоторая абсолютная постоянная, для которой получено явное аналитическое выражение.

Ключевые слова: *минимум решетки, многомерная непрерывная дробь*

Обозначения

$\#S$ — количество элементов конечного множества S;

$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)$;

$\mathcal{M}_s(X)$ — множество матриц размера $s \times s$ с элементами из X;

$\mathcal{M}_s(X; N)$ — множество матриц из $\mathcal{M}_s(X)$ с определителем из отрезка $[1; N]$;

если $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, то (ρ_x, ϕ_x, h_x) — цилиндрические координаты точки x, то есть $x_1 = \rho_x \cdot \cos\phi_x$, $x_2 = \rho_x \cdot \sin\phi_x$, $x_3 = h_x$;

$|x| = (x_1^2 + \ldots x_s^2)^{1/2}$ при $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$;

ζ — дзета-функция Римана;

если $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, то $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$;

запись

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{либо } f(x) = O(g(x))) \quad \text{ при } x \in X$$

означает, что существует постоянная $C > 0$ для которой $|f(x)| \leqslant C \cdot g(x)$ при $x \in X$. Если C зависит от параметра θ, то применяем обозначение $f(x) \underset{\theta}{\ll} g(x)$ (либо $f(x) = O_\theta(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает, что $f \ll g \ll f$.

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: illar_a@list.ru

Введение

Полной s-мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{k_1 m^{(1)} + \ldots + k_s m^{(s)} : \quad k_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1, s}\right\},$$

где $m^{(i)}$ ($i = \overline{1, s}$) — линейно независимые вектора из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). Матрицу со столбцами ${m^{(i)}}^T$ будем называть базисной. Модуль определителя базисной матрицы называется определителем решетки Γ.

Определение. Ненулевой узел γ s-мерной полной решетки Γ будем называть *цилиндрическим минимумом,* если не существует другого ненулевого узла $\eta \in \Gamma$, удовлетворяющего неравенствам

$$\sum_{i=1}^{s-1} \eta_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i^2, \quad |\eta_s| \leqslant |\gamma_s|, \quad |\eta| < |\gamma|.$$

Будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathcal{L}_s(X)$ — множество s-мерных решеток с узлами из X^s ($X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{Z}$);

$\mathcal{L}_s(X; N)$ — множество решеток из $\mathcal{L}_s(X)$ определителя N;

$\mathfrak{M}(\Gamma)$ — множество цилиндрических минимумов решетки Γ.

Цилиндрические минимумы (трехмерных решеток) впервые появились в работах Г.Ф. Вороного [1] при построении алгоритмов нахождения единиц в кубических числовых полях.

Для любого натурального N положим

$$E_s(N) = \left(\sum_{n=1}^{N} \#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; n)\right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{N} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; n)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

— среднее значение количества цилиндрических минимумов s-мерных целочисленных решеток с определителем из отрезка $[1, N]$.

Используя классические результаты о средней длине конечной цепной дроби [2, 3] нетрудно проверить (подробности см. в [4]), что

$$E_2(N) = \frac{4 \ln 2}{\zeta(2)} \ln N + O(1).$$

Основной результат настоящей работы заключается в доказательстве следующей формулы

$$E_3(N) = \mathcal{C} \cdot \ln N + O(1), \tag{1}$$

где $\mathcal{C}$ — некоторая абсолютная положительная постоянная. Для нее получена аналитическая формула, которая будет приведена позже в теореме 3.

Доказательство формулы (1) будет проведено по следующей схеме. В разделах 1, 2 описывается и изучается специальная процедура дополнения цилиндрического минимума до базиса решетки, основанная на идеях Г.Ф. Вороного (см. [5, глава 5, § 60]). В результате вычисление $E_3(N)$ сводится к нахождению количества матриц из $\Omega_V(\mathbb{Z}, N)$, где Ω_V — некоторое подмножество $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\Omega_V(\mathbb{Z}, N) = \{M \in \Omega_V \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) : \quad 1 \leqslant \det M \leqslant N\}.$$

В разделе 3 выводится асимптотическая формула для $\#\Omega_V(\mathbb{Z}, N)$. В последнем разделе завершается доказательство (1).

1. Необходимое и достаточное условие минимальности узла решетки

Определение. Пусть b, c являются базисом решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, причем треугольник Δ с вершинами в начале координат и точках b, c является остроугольным либо прямоугольным. Тогда b, c будем называть *полуприведенным базисом*, а Δ — *треугольником Зеллинга*. Выпуклый шестиугольник с вершинами в точках $\pm b, \pm c, \pm(b-c)$ будем называть *шестиугольником Зеллинга*.

Если $\Gamma \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, то через $\lambda_1(\Gamma)$, $\lambda_2(\Gamma)$ обозначим последовательные минимумы Γ относительно евклидовой нормы, то есть $\lambda_i(\Gamma)$ — наименьшее из чисел λ_i таких, что шар $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant \lambda_i\}$ содержит не менее чем i линейно независимых узлов Γ.

Справедливы следующие свойства (см., напр., [6]):

1) любые две соседние вершины шестиугольника Зеллинга образуют полуприведенный базис;

2) если решетка не является прямоугольной, то шестиугольник Зеллинга единственен;

3) величины $\lambda_1(\Gamma), \lambda_2(\Gamma)$ совпадают с длинами некоторых сторон треугольника Зеллинга.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$. Возьмем любую примитивную точку a решетки Γ такую, что $h_a > 0$. Тогда все узлы Γ лежат на прямых, которые параллельны вектору a. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ — множество, состоящее из точек пересечения таких прямых с плоскостью $x_3 = 0$, то есть

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(l_\gamma \cap \{(x_1, x_2, 0) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \right),$$

где l_γ — прямая, проходящая через γ параллельно вектору a. Очевидно, что $\tilde{\Gamma}$ — двумерная решетка.

Для каждого $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ выберем узел $\gamma \in \Gamma$ так, что

$$\gamma_3 \geqslant 0, \quad (\gamma_3 - a_3) \leqslant 0, \quad \tilde{\gamma} \in l_\gamma,$$

Будем называть отрезок $[\tilde{\gamma}, \gamma]$ — гвоздиком, точку $\tilde{\gamma}$ — основанием гвоздика, узел γ — шапочкой гвоздика. Если $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, то соответствующий $\tilde{\gamma}$ гвоздик имеет две шапочки: $\tilde{\gamma}$ и $(\tilde{\gamma} + a)$.

Шапочки и основания связаны между собой соотношением

$$\tilde{\gamma} = \gamma - a \cdot \frac{h_\gamma}{h_a}. \tag{2}$$

Множество $\tilde{\Gamma}$ будем называть решеткой оснований гвоздиков, соответствующих узлу a.

Пусть $\tilde{b}, \tilde{c}$ — полуприведенный базис решетки $\tilde{\Gamma}$, причем отрезок $[0, -\tilde{a}]$, где $\tilde{a} = (a_1, a_2)$ проходит через треугольник с вершинами в точках $0, \tilde{b}, \tilde{c}$. Обозначим через b, c шапочки гвоздиков с основаниями в точках $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ соответственно. Тогда a, b, c образуют базис исходной решетки Γ. Будем называть его базисом Вороного. Шапочки гвоздиков с основаниями в вершинах шестиугольника Зеллинга (соответствующего базису $\tilde{b}, \tilde{c}$) решетки $\tilde{\Gamma}$, а также в точке $(\tilde{b} + \tilde{c})$ будем называть шапочками Вороного. Если $\tilde{b}$ сонаправлен с вектором $-\tilde{a}$, то к шапочкам Вороного добавляем шапочку гвоздика с основанием в точке $(2 \cdot \tilde{b} - \tilde{c})$. Аналогично, если $\tilde{c}$ сонаправлен с вектором $-\tilde{a}$, то к шапочкам Вороного добавляем также шапочку гвоздика с основанием в точке $(2 \cdot \tilde{c} - \tilde{b})$. Шапочку Вороного, имеющую наименьшее ρ, будем называть приведенной шапочкой Вороного. Приведенных шапочек может быть несколько.

Будем говорить, что узел $\eta \in \Gamma$ нарушает минимальность узла a, если

$$\rho_\eta \leqslant \rho_a, \quad h_\eta \leqslant h_a, \quad \rho_\eta + h_\eta < \rho_a + h_a.$$

Теорема 1. *Пусть $a \in \Gamma$, $h_a > 0$. Тогда, если приведенные шапочки Вороного не нарушают минимальности a, то a является цилиндрическим минимумом решетки Γ.*

Если решетка Γ удовлетворяет условиям

$$\rho_\gamma \neq \rho_\eta, \quad h_\gamma \neq h_\eta \qquad \forall \gamma, \eta \in \Gamma, \gamma \neq \eta,$$

то сформулированный результат вытекает из теоремы Вороного [5, глава 5, § 60]. Приведенное в [5] доказательство справедливо и для случая произвольной решетки. Поэтому повторять его мы не будем.

Нам также понадобится следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} \setminus \{0\}$, причем $\lambda_1(\tilde{\Gamma}) = |\tilde{\gamma}|$. Тогда, если шапочки гвоздиков с основаниями в точках $\pm\tilde{\gamma}$ не нарушают минимальности a, то*

$$\lambda_1(\tilde{\Gamma}) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_a.$$

Доказательство леммы также вытекает из [5, глава 5, § 60].

2. Параметризация цилиндрических минимумов матрицами

Пусть

$$U(N) = \left\{(\Gamma, a): \quad \Gamma \in \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; n), \quad a \in \mathfrak{M}(\Gamma), \quad h_a > 0\right\}.$$

Нетрудно заметить, что у любой решетки из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ количество цилиндрических минимумов a, у которых $h_a = 0$, не больше, чем $O(1)$. Поэтому

$$E_3(N) = 2 \cdot \frac{\#U(N)}{R_3(N)} + O(1), \tag{3}$$

где

$$R_3(N) = \sum_{n=1}^{N} \#\mathcal{L}_3(\mathbb{Z}; n).$$

Возьмем любую решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ и примитивный узел a этой решетки такой, что $h_a > 0$.

Пусть b, c — шапочки гвоздиков с основаниями в точках $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, причем

$$h_b, h_c < h_a; \quad \rho_b \leqslant \rho_c; \tag{4}$$

$$\left\{|\tilde{b}|, |\tilde{c}|\right\} = \left\{\lambda_1(\tilde{\Gamma}), \lambda_2(\tilde{\Gamma})\right\}, \tag{5}$$

$$\min\left\{\tilde{b}_1, \tilde{c}_1\right\} \geqslant 0.$$

Тогда a, b, c — базис Γ. Если дополнительно $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, то a, b, c будем называть B-базисом решетки Γ.

Любой цилиндрический минимум a, удовлетворяющий условию $h_a > 0$, можно дополнить (возможно, не единственным образом) до B-базиса.

Определим множество $\tilde{\Omega}_V$, состоящее из матриц $M(a, b, c)$ таких, что векторы a, b, c являются B-базисом решетки, порожденной a, b, c. Любая матрица $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}_V$ удовлетворяет условиям (а) $0 \leqslant h_b, h_c < h_a; \quad \rho_a \leqslant \rho_b \leqslant \rho_c; \quad \min\left\{\tilde{b}_1, \tilde{c}_1\right\} \geqslant 0;$

(б) $2 \cdot |\tilde{b} \cdot \tilde{c}| \leqslant \min\left\{|\tilde{b}|^2, |\tilde{c}|^2\right\}$, где $\tilde{b} = b - a \cdot \dfrac{h_b}{h_a}, \ \ \tilde{c} = c - a \cdot \dfrac{h_c}{h_a};$

(в) если $\Gamma = \Gamma(a, b, c)$ — решетка, порожденная векторами a, b, c, то приведенные шапочки Вороного решетки Γ (отвечающие узлу a) не нарушают минимальности a.

Справедливо и обратное: если a, b, c удовлетворяют условиям (а)–(в), то $M(a, b, c) \in \tilde{\Omega}_V$. Действительно, из условия (а) следует, что b, c являются шапочками некоторых гвоздиков. Согласно (б) узлы $\tilde{b}, \tilde{c}$ удовлетворяют (5). Из (в) и теоремы 1 вытекает, что $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Поэтому a, b, c являются В-базисом Γ.

Определим также Ω_V — внутренность и $\partial\Omega_V = \tilde{\Omega}_V \setminus \Omega_V$ — границу $\tilde{\Omega}_V$. Через $\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$ ($\partial\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$) обозначим множество целочисленных матриц из Ω_V ($\partial\Omega_V$) с определителем из отрезка $[1; N]$.

Если $M(a, b, c) \in \Omega_V$, то все неравенства в условиях (а)-(в) строгие и в этом случае узел a единственным образом дополняется до В-базиса решетки $\Gamma(a, b, c)$ (узлами b, c). Поэтому выполняются оценки

$$\#\Omega_V(\mathbb{Z}; N) \leqslant \#U_+(N) \leqslant \#\Omega_V(\mathbb{Z}; N) + \#\partial\Omega_V(\mathbb{Z}; N). \tag{6}$$

Таким образом вычисление $E_3(N)$ сводится к подсчету матриц из $\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$ и оценке величины $\#\partial\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$.

Свойства множества Ω_V.

1) *Граница Ω_V состоит из фиксированного числа гладких гиперповерхностей.*

2) *Если $M \in \Omega_V$, то для любых $\rho, h \in \mathbb{R}_+$ справедлива формула*

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot M \in \Omega_V.$$

Доказательство этого и предыдущего свойства вытекает из определения Ω_V.

3) *Для любой матрицы $M(a, b, c) \in \Omega_V$ справедливы оценки*

$$\rho_a < \rho_b < \rho_c; \qquad h_b, h_c < h_a; \tag{7}$$

$$\rho_b \cdot \rho_c \cdot h_a \ll |\det M(a, b, c)|. \tag{8}$$

Доказательство. Неравенства (7) вытекают из определения множества Ω_V. Докажем (8). Пусть $M(a, b, c) \in \Omega_V$, Γ — решетка, порожденная a, b, c, $\tilde{\Gamma}$ — решетка оснований гвоздиков, соответствующих a. Прежде всего отметим, что

$$\begin{aligned} \det\Gamma &= |\det M(a, b, c)| = \left|\det M\left(a, b - a \cdot \frac{h_b}{h_a}, c - a \cdot \frac{h_c}{h_a}\right)\right| = \\ &= \left|\det \begin{pmatrix} a_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 \\ a_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = \det\tilde{\Gamma} \cdot h_a, \end{aligned}$$

где $\tilde{b}, \tilde{c}$ являются основаниями гвоздиков с шапочками в точках b и c соответственно. Так как $|\tilde{b}|$, $|\tilde{c}|$ удовлетворяют (5), то из теоремы Минковского о последовательных минимумах вытекает, что

$$|\tilde{b}| \cdot |\tilde{c}| \leqslant 4 \cdot \det\tilde{\Gamma}.$$

Из леммы 1 следует оценка $\rho_a \ll \min\{|\tilde{b}|, |\tilde{c}|\}$. Поэтому

$$\rho_b \cdot \rho_c \ll (\rho_a + |\tilde{b}|)(\rho_a + |\tilde{c}|) \ll |\tilde{b}| \cdot |\tilde{c}| \ll \det \tilde{\Gamma} = \frac{\det \Gamma}{h_a}.$$

Неравенство (8) доказано.

3. Количество целочисленных матриц в заданной области

Пусть Ω' — ограниченное измеримое по Лебегу множество матриц из $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, лежащих на поверхности

$$\Big\{ M(a,b,c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \quad \rho_c = 1, \;\; h_a = 1 \Big\}.$$

Обозначим

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot M' : \quad M' \in \Omega', \;\; \rho, h \in [1, +\infty) \right\}. \tag{9}$$

Пусть Ω'_c такое множество из $\mathbb{R}^7$, что

$$\Omega' = \left\{ \begin{pmatrix} \rho'_a \cos \phi'_a & \rho'_b \cos \phi'_b & \cos \phi'_c \\ \rho'_a \sin \phi'_a & \rho'_b \sin \phi'_b & \sin \phi'_c \\ 1 & h'_b & h'_c \end{pmatrix} : \quad (\rho'_a, \phi'_a, \rho'_b, \phi'_b, h'_b, \phi'_c, h'_c) \in \Omega'_c \right\}.$$

На множестве множеств вида (9) определим функцию

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega'} \frac{d\Omega'(M)}{|\det M|^3} = \int_{\Omega'_c} \frac{\rho'_a \rho'_b}{|D(u')|^3} \, du', \tag{10}$$

где

$$u' = (\rho'_a, \phi'_a, \rho'_b, \phi'_b, h'_b, \phi'_c, h'_c), \quad D(u') = \det \begin{pmatrix} \rho'_a \cos \phi'_a & \rho'_b \cos \phi'_b & \cos \phi'_c \\ \rho'_a \sin \phi'_a & \rho'_b \sin \phi'_b & \sin \phi'_c \\ 1 & h'_b & h'_c \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Для сходимости интеграла Лебега (10) достаточно, чтобы множество Ω' было ограниченным и существовала положительная постоянная $C = C(\Omega')$ такая, что

$$\rho_{a'} \leqslant C \cdot \rho_{b'}, \quad \rho_{b'} \leqslant C \cdot |\det M(a', b', c')| \tag{12}$$

для всех $M(a', b', c') \in \Omega'$. Действительно из (12) вытекают оценки

$$\mu(\Omega) \ll_{\Omega'} \int_{0 < \rho'_b < 1} \int_{0 < \rho'_a \leqslant C \cdot \rho'_b} \frac{\rho'_a \rho'_b}{{\rho'_b}^3} \, d\rho'_a \, d\rho'_b = \frac{C^2}{2}.$$

Условия (12) эквивалентны также следующим неравенствам

$$\rho_a \leqslant C \cdot \rho_b, \quad \rho_b \rho_c h_a \leqslant C \cdot |\det M(a,b,c)| \tag{13}$$

для всех $M(a,b,c) \in \Omega$.

Если гиперповерхность состоит из фиксированного числа частей класса C^1, то ее будем называть кусочно-гладкой. Через $\Omega(\mathbb{Z}; N)$ обозначим множество целочисленных матриц из Ω с определителем из $[1; N]$.

Основной результат настоящего раздела заключается в следующем.

Теорема 2. *Пусть множество* Ω *определяется (9), граница* Ω *является кусочно-гладкой. Тогда, если выполняются условия (13), то*

$$\#\Omega(\mathbb{Z}; N) = \frac{N^3}{6}\left(\mu(\Omega) \cdot \ln N + O_\Omega(1)\right).$$

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные результаты. Если $x \in \mathbb{R}^s$, $S \subset \mathbb{R}^s$, то

$$|x|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |x_i|, \quad \rho_\infty(x, S) = \inf_{y \in S} |x - y|_\infty, \quad B_\varepsilon(S) = \{y \in \mathbb{R}^s : \quad \rho_\infty(y, S) \leqslant \varepsilon\}.$$

Через mes обозначим стандартную меру Лебега.

Лемма 2. *Пусть* U *— ограниченное измеримое по Лебегу множество из* $\mathbb{R}^s$. *Тогда*

$$\#(U \cap \mathbb{Z}^s) = \operatorname{mes} U + O\left(\operatorname{mes} B_1(\partial U)\right).$$

Доказательство приведено в [4].

Лемма 3. *Пусть* S *— кусочно-гладкая гиперповерхность в* $\mathbb{R}^s$, $R \in \mathbb{R}^s_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$,

$$S_\varepsilon(R) = B_\varepsilon(S) \cap \{x \in \mathbb{R}^s : |x_i| \leqslant R_i, i = \overline{1, s}\}.$$

Тогда

$$\operatorname{mes} S_\varepsilon(R) \ll_S \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{s} \prod_{i \neq j} R_i.$$

Доказательство леммы очевидно.

Для любых $R, r, C \in \mathbb{R}_+$ определим множество $P_C(R, r)$, состоящее из матриц $M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}
&\max\{\rho_a, \rho_b\} \leqslant C \cdot \rho_c;\\
&\max\{|h_b|, |h_c|\} \leqslant C \cdot |h_a|;\\
&\max\{\rho_a, \rho_b\} \cdot \rho_c \cdot |h_a| \leqslant C \cdot R.\\
&\min\{\rho_b, \rho_c, |h_a|\} \geqslant C \cdot r;
\end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть* $C, R, r, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $R > r^3$, S *— кусочно-гладкая гиперповерхность в* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\operatorname{mes}\left(B_\varepsilon(S) \cap P_C(R, r)\right) \ll_{S,C} \varepsilon \cdot \frac{R^3}{r}.$$

Доказательство. Для всех натуральных k, n, m определим множества

$$P_{k,n,m} = \left\{ M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \quad \begin{array}{l} |a_1|, |a_2|, |b_1|, |b_2| \leqslant re^k, \\ |c_1|, |c_2| \leqslant re^n, \\ |a_3|, |b_3|, |c_3| \leqslant re^m. \end{array} \right\}$$

Очевидно, что существует постоянная C', зависящая только от C, такая, что

$$P_C(R; r) \subset \bigcup_{\substack{k+n+m \leqslant C' + \ln(R/r^3), \\ k \leqslant C' + n}} P_{k,n,m}.$$

Поэтому
$$\mathrm{mes}\,(B_\varepsilon(S)\cap P_C(R,r)) \leqslant \sum_{\substack{k+n+m\leqslant C'+\ln(R/r^3),\\ k\leqslant C'+n}} \mathrm{mes}\,(P_{k,n,m}\cap B_\varepsilon(S)).$$

Используя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}\,(P_{k,n,m}\cap B_\varepsilon(S)) \underset{S,C}{\ll} \quad & \varepsilon(re^k)^4\,(re^n)^2\,(re^m)^3\cdot\left(\frac{1}{re^k}+\frac{1}{re^n}+\frac{1}{re^m}\right)\leqslant\\ & \leqslant \varepsilon r^8 e^{4k}e^{2n}e^{3m}\left(\frac{1}{e^k}+\frac{1}{e^m}\right).\end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{\substack{k+n+m\leqslant C'+\ln(R/r^3),\\ k\leqslant C'+n}} e^{4k}e^{2n}e^{3m}\left(\frac{1}{e^k}+\frac{1}{e^m}\right) = O_{C'}(R^3/r^9).$$

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Положим

$$\Omega(N)=\Big\{M=M(a,b,c)\in\Omega:\quad 1\leqslant\det M\leqslant N;\;\; 1\leqslant\min\{\rho_b,\rho_c,h_a\}\Big\}.$$

Тогда $\Omega(\mathbb{Z};N)=\Omega(N)\cap\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Для подсчета целочисленных точек из $\Omega(N)$ применим лемму 2. Получаем

$$\#\Omega(\mathbb{Z};N)=\mathrm{mes}\,\Omega(N)+O\Big(\mathrm{mes}\,B_1(\partial\Omega(N))\Big). \tag{14}$$

Чтобы вычислить $\mathrm{mes}\,\Omega(N)$, сделаем в интеграле

$$\mathrm{mes}\,\Omega(N)=\int_{\Omega(N)} da\,db\,dc$$

замену:

$$\begin{array}{lll} a_1=\rho_a\cos\phi_a, & b_1=\rho_b\cos\phi_b, & c_1=\rho_c\cos\phi_c,\\ a_2=\rho_a\sin\phi_a, & b_2=\rho_b\sin\phi_b, & c_2=\rho_c\sin\phi_c,\\ a_3=h_a, & b_3=h_b, & c_3=h_c,\end{array}$$

а потом еще одну:

$$\begin{array}{lll} \rho_a=\rho'_a\rho, & \rho_b=\rho'_b\rho, & \rho_c=\rho,\\ \phi_a=\phi'_a, & \phi_b=\phi'_b, & \phi_c=\phi'_c,\\ h_a=h, & h_b=h'_bh, & h_c=h'_ch.\end{array}$$

Якобиан преобразования равен

$$\rho^5h^2\rho'_a\rho'_b.$$

Условие $1\leqslant\det M(a,b,c)\leqslant N$ эквивалентно неравенствам

$$1\leqslant D(u')\rho^2h\leqslant N,$$

где $D(u')$ и u' определяются формулами (11). Поэтому $\Omega(N)$ отображается на множество

$$\tilde\Omega(N)=\left\{(u',\rho,h):\quad u'\in\Omega'_c,\;\;\rho,h\in[1,+\infty),\;\;\frac{1}{D(u')}\leqslant\rho^2h\leqslant\frac{N}{D(u')}\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\Omega(N) &= \int_{\Omega(N)} da\,db\,dc = \int_{\tilde\Omega(N)} \rho^5 h^2 \rho'_a\rho'_b\,d\rho\,dh\,du' = \\
&= \int_{\Omega'_c}\left(\rho'_a\rho'_b \int_{\substack{1\leqslant\rho,h,\\ 1/D(u')\leqslant\rho^2 h\leqslant N/D(u')}} \rho^5h^2\,d\rho\,dh\right)du' = \\
&= \int_{\Omega'_c}\rho'_a\rho'_b\left(\frac{N^3}{6}\ln N\frac{1}{|D(u')|^3} + O\left(N^3+\frac{N^3}{|D(u')|^3}+\frac{\ln D(u')}{|D(u')|^3}\right)\right)du' \\
&= N^3\left(\frac{\mu(\Omega)}{3}\ln N + O(1)\right).
\end{aligned}$$

Здесь и далее в этом доказательстве константы в оценках $\ll$ и $O(\ldots)$ зависят только от Ω.

Осталось оценить $\operatorname{mes} B_1(\partial\Omega(N))$. Из условий, которым удовлетворяет множество Ω, вытекает, что для любой матрица $M(a,b,c)\in B_1(\partial\Omega(N))$ выполняются неравенства

$$\rho_b\rho_c h_a \ll N;\quad \rho_a\ll\rho_b\ll\rho_c;\quad h_b,h_c\ll h_a; \tag{15}$$

$$\min\{\rho_c,\rho_b,h_a,\rho_c\rho_b,\rho_b h_a,\rho_c h_a\}\ll N. \tag{16}$$

Множество $B_1(\partial\Omega(N))$ содержится в объединении трех множеств: $U_1(N)$, $U_2(N)$ и $U_3(N)$, где $U_1(N)$ состоит из матриц $M(a,b,c)$, удовлетворяющих (15), (16) и условию

$$\rho_b\leqslant 1, \text{ либо } \rho_c\leqslant 1, \text{ либо } h_a\leqslant 1. \tag{17}$$

Множество $U_2(N)$ состоит из матриц, лежащих в $B_1(S)$, где S — объединение фиксированного числа кусочно-гладких гиперповерхностей из $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (не зависящих от N), причем элементы $M(a,b,c)\in U_2(N)$ удовлетворяют (15) и условиям

$$\min\{\rho_b,\rho_c,h_a\}\geqslant 1. \tag{18}$$

Множество $U_3(N)$ состоит из матриц $M(a,b,c)\in B_1(S(N))$, где

$$S(N)=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det X = N\},$$

удовлетворяющих (15), (18).

Используя (15), (16), (17), получаем соотношение

$$\operatorname{mes} U_1(N) = O(N^3).$$

Для оценки меры $U_2(N)$ используем следствие 1, в котором $R=N$, $r=1$, $\varepsilon=1$. Получаем

$$\operatorname{mes} U_2(N) = O(N^3).$$

Оценим $\operatorname{mes} U_3(N)$. Рассмотрим множество $N^{-1/3}\cdot U_3(N)$. Оно состоит из матриц $M(a,b,c)$, лежащих в окрестности радиуса $O(N^{-1/3})$ гиперповерхности $S(1)$ и удовлетворяющих условиям

$$N^{-1/3}\leqslant\rho_b,\rho_c,h_a;\quad \rho_b\rho_c h_a\ll 1;\quad \rho_a\ll\rho_b\ll\rho_c;\quad h_b,h_c\ll h_a.$$

Поэтому для оценки меры множества $N^{-1/3}\cdot U_3(N)$ можно снова применить следствие 1, в котором $R=1$, $r=N^{-1/3}$, $\varepsilon=N^{-1/3}$. Получаем

$$\operatorname{mes}(N^{-1/3}\cdot U_3(N)) = O(1),$$

следовательно,

$$\operatorname{mes} U_3(N) = O(N^3).$$

Таким образом, $\operatorname{mes} B_1(\partial\Omega(N))\leqslant \operatorname{mes} U_1(N)+\operatorname{mes} U_2(N)+\operatorname{mes} U_3(N) = O(N^3)$. Теорема 2 доказана.

4. Среднее количество цилиндрических минимумов

Пусть Ω_V — множество матриц, определенное в разделе 2. Оно удовлетворяет условиям теоремы 2 (см. свойства Ω_V из раздела 2). Кроме того, Ω_V имеет непустую внутренность, и поэтому $\mu(\Omega_V) > 0$.

Теорема 3. *Для любого натурального N справедлива формула*

$$E_3(N) = \frac{\mu(\Omega_V)}{\zeta(2)\cdot\zeta(3)} \cdot \ln N + O(1). \tag{19}$$

Доказательство. Из (3), (6) вытекает, что

$$E_3(N) = \frac{2}{R_3(N)} \cdot \#\Omega_V(\mathbb{Z}; N) + O\left(R_3^{-1}(N) \cdot \#\partial\Omega_V(\mathbb{Z}; N)\right).$$

Нетрудно получить следующую формулу (см. [4])

$$R_3(N) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{3} \cdot N^3 + O(N^2 \cdot \ln N + 1).$$

Осталось применить теорему 2 для вычисления $\#\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$, $\#\partial\Omega_V(\mathbb{Z}; N)$ и учесть, что $\mu(\partial\Omega_V) = 0$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Г.Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 1,* Киев, Изд-во АН УССР, 1952.

[2] Lochs G. *Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche.*, Monatsh. Math. **65** (1961), 27–52.

[3] H. Heilbronn *On the average length of a class of finite continued fractions*, Number Theory and Analysis, Papers in Honor of Edmund Landau, Plenum, New York, 1969, 87-96.

[4] А.А. Илларионов, Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток, *Алгебра и анализ*, **23** (2011, в печати).

[5] Б.Н. Делоне, Д.К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. **11** (1940), Изд-во АН СССР, М.-Л., 3–340.

[6] П.Г.Л. Дирихле, *Лекции по теории чисел*, ОНТИ, М.-Л., 1936.

Представлено в Дальневосточный математический журнал

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-98002-р_сибирь_а), ДВО РАН (проекты №№ 11-III-В-01М-002, 09-I-П4-03) и гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1

Illarionov A.A. On cylindrical minima of three-dimensional lattices. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 37–47.

ABSTRACT

Nonzero point $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ of three-dimensional lattice Γ is called by cylindrical minimum if there exist no nonzero point $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ such as

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 \leqslant \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad |\eta_3| \leqslant |\gamma_3|, \quad |\gamma| < |\eta|.$$

It is proved that the average number of cylindrical minima of three-dimensional integer lattices with determinant from $[1; N]$ is equal

$$\mathcal{C} \cdot \ln N + O(1).$$

Key words: *minimum of lattice, multi-dimensional continuous fraction*