ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 1. С. 48–55

УДК 511.36, 511.9
MSC2000 11K60, 11G70

© А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин[1]

О количестве вершин многогранников Клейна целочисленных решеток в среднем

Рассматриваются многогранники Клейна целочисленных s-мерных решеток определителя N. Выводится нижняя оценка для среднего значения количества вершин таких полиэдров, которая совпадает с известной верхней с точностью до константы, зависящей только от s. Из полученного результата, в частности, вытекает нижняя оценка для количества относительных минимумов.

Ключевые слова: *многомерная непрерывная дробь, относительный минимум, многогранник Клейна.*

Введение

Полной s–мерной целочисленной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{ n_1 m^{(1)} + \ldots + n_s m^{(s)} : \ n_i \in \mathbb{Z}, \ i = \overline{1, s} \right\},$$

где $m^{(i)}$ – заданные линейно независимые векторы из $\mathbb{Z}^s$ (базис Γ). Модуль определителя матрицы, составленной из базисных векторов, называется определителем решетки Γ.

Многогранником (полиэдром) Клейна решетки Γ называется множество $K_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s), \ \theta_i = \pm 1$, которое определяется как выпуклая оболочка ненулевых узлов Γ, лежащих в s–гранном угле

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^s : \ x_i \theta_i \geq 0, \ i = \overline{1, s} \right\}.$$

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется относительным минимумом решетки Γ, если не существует другого ненулевого узла $\eta \in \Gamma$, удовлетворяющего условиям

$$|\eta_i| \leq |\gamma_i|, \ i = \overline{1, s}, \ \sum_{i=1}^{s} |\eta_i| < \sum_{i=1}^{s} |\gamma_i|.$$

Понятие относительного минимума впервые появилось в работах Г. Ф. Вороного [1] и – независимо от него – Г. Минковского [2], а многогранники Клейна – в работе Ф. Клейна [3]. Обе конструкции связаны с обобщением классического алгоритма нахождения непрерывных дробей на многомерный случай.

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного Отделения РАН, 680000 г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `illar_a@list.ru`, `slinkind@gmail.com`

Относительные минимумы и многогранники Клейна имеют приложения в самых разных областях математики (см. [4, 5, 6, 7]).

Будем использовать следующие обозначения:
$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ – множество полных s–мерных целочисленных решеток;
$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$ – множество решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ определителя N;
$\mathfrak{M}(\Gamma)$ – множество относительных минимумов решетки Γ;
$\mathcal{V}(\Gamma)$ – множество вершин многогранников Клейна решетки Γ;
$\#S$ – количество элементов конечного множества S;
$\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел;
$\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел;
$R_s(N) = \#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$;

$$E_s(N;\mathfrak{M}) = \frac{1}{R_s(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

– среднее значение количества относительных минимумов решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$;

$$E_s(N;\mathcal{V}) = \frac{1}{R_s(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \#\mathcal{V}(\Gamma)$$

– среднее значение количества вершин многогранников Клейна решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$.

Есть основания полагать, что справедлива следующая гипотеза.

Гипотеза. *Существуют положительные постоянные $C_s(\mathfrak{M})$, $C_s(\mathcal{V})$ такие, что*

$$E_s(N;\mathfrak{M}) \sim C_s(\mathfrak{M})\cdot\ln^{s-1}N,\ \ E_s(N;\mathcal{V}) \sim C_s(\mathcal{V})\cdot\ln^{s-1}N \ \textit{при}\ N\to\infty. \tag{1}$$

Для двумерных решеток асимптотики (1) вытекают из классического результата Хейльбронна [8] о средней длине конечной цепной дроби (подробности см. в [9]). При $s = 3$ формулы (1) доказаны в [10].

Основным результатом настоящей работы является следующая нижняя оценка

$$E_s(N,\mathcal{V}) \underset{s}{\gg} \ln^{s-1}N \tag{2}$$

при всех $N\in\mathbb{Z}$, $N\geq 2$. Доказательство основано на идеях, изложенных в работе [11].

Из оценки (2), вложения, доказанного в работе [4],

$$\mathcal{V}(\Gamma)\subset\mathfrak{M}(\Gamma)$$

и известной оценки (см. [7, 12])

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) \underset{s}{\ll} \ln^{s-1}N \text{ при } N\geq 2,$$

вытекают двухсторонние оценки

$$E_s(N;\mathfrak{M}) \underset{s}{\asymp} \ln^{s-1}N, \tag{3}$$

$$E_s(N;\mathcal{V}) \underset{s}{\asymp} \ln^{s-1}N. \tag{4}$$

Неравенства (3), (4) являются частичным подтверждением гипотезы (1).

Авторы благодарны А. В. Устинову за ценные замечания.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Для любого $x \in \mathbb{Z}^s$ существует целочисленная матрица M размера $s \times s$ и определителем ± 1 такая, что*

$$M \cdot x = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $r = \text{НОД}(x_1, \ldots, x_s)$.

Доказательство см., например, в [13, глава I].

Матрицу, столбцы которой образуют базис решетки Γ, будем называть базисной.

Лемма 2. *Для любой решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ существует единственная базисная матрица вида*

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1s} \\ 0 & d_2 & d_{23} & \cdots & d_{2s} \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & d_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_s \end{pmatrix},$$

где $0 < d_{ij} \le d_i$, $i = \overline{1,s}$, $j = \overline{(i+1),s}$.

Существование базисной матрицы требуемого вида доказано в [13, глава I]. Её единственность проверяется непосредственно (см., например, [9]).

Из леммы 2, в частности, вытекает, что

$$R_s(N) = \sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_s \in \mathbb{N}, \\ d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_s = N}} d_1^{s-1} \cdot d_2^{s-2} \cdot \ldots \cdot d_{s-1}.$$

Для фиксированного $x \in \mathbb{Z}^s$ обозначим

$$T_s(N, x) = \#\{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N) : \ x \in \Gamma\}$$

— количество решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$, содержащих узел x.

Лемма 3. *Для любых $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^s$ выполняется равенство*

$$T_s(N, x) = \sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_s \in \mathbb{N}, \ d_1 | r, \\ d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_s = N}} d_1^{s-1} \cdot d_2^{s-2} \cdot \ldots \cdot d_{s-1},$$

где $r = \text{НОД}(x_1, \ldots, x_s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что $T_s(N, x)$ равно количеству решеток $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$, которые содержат узел $(r, 0, \ldots, 0)$, где $r = \text{НОД}(x_1, \ldots, x_s)$. Применяя лемму 2, получаем требуемую формулу. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $a = (a_1, \ldots, a_s) \in [1, +\infty)^s$, $\hat{a} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_s$. Тогда*

$$\sum_{\substack{|x_i| \le a_i, \\ i = \overline{1,s}}} T_s(N, x) \le 3^s \cdot \zeta(s) \cdot \hat{a} \cdot \frac{R_s(N)}{N},$$

где ζ – дзета-функция Римана.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $r(x) = \text{НОД}(x_1, \ldots, x_s)$ для $x \in \mathbb{Z}^s$. Используя лемму 3, получаем

$$\sum_{\substack{|x_i|\le a_i\\ i=\overline{1,s}}} T_s(N,x) = \sum_{\substack{|x_i|\le a_i\\ i=\overline{1,s}}} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\ d_1|r(x),\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\min\{a_1,\ldots,a_s\}} \left(\sum_{\substack{|x_i|\le a_i\\ \text{НОД}(x_1,\ldots,x_s)=r}} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\ d_1|r,\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} \right) \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{\min\{a_1,\ldots,a_s\}} \left(\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{2a_i}{r}+1\right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\ d_1|r,\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} \right) \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{\min\{a_1,\ldots,a_s\}} \left(\frac{3^s\cdot\hat{a}}{r^s} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\ d_1|r,\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} \right) =$$

$$= 3^s\cdot\hat{a} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} \left(d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} \sum_{\substack{1\le r\le\min\{a_1,\ldots,a_s\}\\ r\equiv 0 \pmod{d_1}}} \frac{1}{r^s} \right) =$$

$$= 3^s\cdot\hat{a} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} d_1^{s-1}\cdot d_2^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_{s-1} \sum_{1\le r'\le\min\{a_1,\ldots,a_s\}} \frac{1}{d_1^s\cdot r'^s} \le$$

$$\le 3^s\cdot\hat{a}\cdot\zeta(s) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_s\in\mathbb{N},\\ d_1\cdot\ldots\cdot d_s=N}} \frac{d_2^{s-1}\cdot d_3^{s-2}\cdot\ldots\cdot d_s}{N} = 3^s\cdot\hat{a}\cdot\zeta(s)\cdot\frac{R_s(N)}{N}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$, $\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}$. *Тогда существует вершина* $\nu\in\mathcal{V}(\Gamma)$ *такая, что*

$$|\nu_i|\le s\cdot|\gamma_i|,\ i=\overline{1,s}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что достаточно ограничиться случаем, когда $\gamma\in[0,+\infty)^s$. Пусть x – точка пересечения отрезка $[0,\gamma]$ и границы многогранника Клейна решетки Γ. Согласно теореме Каратеодори [14] точку x можно представить в виде

$$x=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\nu^{(i)},$$

где $\lambda_i\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i=1$, $\nu^{(i)}\in\mathcal{V}(\Gamma)\cap[0,+\infty)^s$. Пусть $\lambda_k=\max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}$. Тогда $\lambda_k\ge\dfrac{1}{s}$ и, следовательно,

$$x_i\ge\lambda_k\cdot\nu_i^{(k)}\ge\frac{1}{s}\nu_i^{(k)},\ i=\overline{1,s}.$$

Вершина $\nu=\nu^{(k)}\in\mathcal{V}(\Gamma)$ удовлетворяет требуемым условиям. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$, $y\in\mathbb{R}^s_+$ *и*

$$y_1\cdot\ldots\cdot y_s\ge s^s\cdot N.$$

Тогда существует вершина $\nu\in\mathcal{V}(\Gamma)$ *такая, что*

$$|\nu_i|\le y_i,\ i=\overline{1,s}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Минковского о линейных формах найдется ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ такой, что

$$|\gamma_i| \leq \frac{y_i}{s},\ i = \overline{1, s}.$$

Осталось воспользоваться леммой 5. Следствие доказано.

Для любого натурального t определим множество

$$\mathbb{Z}_+^s(t) = \{n \in \mathbb{Z}_+^s : n_1 + \ldots + n_s = t\}.$$

Зафиксируем вещественные $\lambda, \xi \in (1; \infty)$ и обозначим через $\mathcal{P}(k) = \mathcal{P}_{\lambda,\xi}(k)$ параллелепипед в $\mathbb{R}^s$, состоящий из всех точек $x = (x_1, \ldots, x_s)$, для которых $|x_1| \leq \xi{\cdot}\lambda^{k_1}$ и $|x_j| \leq \lambda^{k_j}$ при $j = \overline{2, s}$. Также определим множества

$$\mathcal{S}_t = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t)} \mathcal{P}(k),\ t \in \mathbb{N}.$$

Из [11, лемма 2] вытекает следующий результат.

Лемма 6. *Пусть X – конечное множество из $\mathbb{R}^s$. Тогда для любого натурального t*

$$\#(X \cap \mathcal{S}_t) \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t)} X \cap P_{\lambda,\xi}(k) - \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t-l)} \#(X \cap P_{\lambda,\xi}(k)).$$

2. Доказательство оценки (2)

Пусть $c \in \mathbb{R}_+$, $X_s(c)$ – множество отображений X, которые каждой решетке $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ ставят в соответствие множество $X(\Gamma) \subset \Gamma \backslash \{0\}$ и удовлетворяют условию: если $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$, $X \in X_s(c)$, $y \in \mathbb{R}_+^s$, $y_1 \cdot \ldots \cdot y_s \geq c \cdot N$, то существует узел $\gamma \in X(\Gamma)$ такой, что

$$|\gamma_i| \leq y_i,\ i = \overline{1, s}.$$

Замечание 1. Из теоремы Минковского о линейных формах вытекает, что отображение $\mathfrak{M} : \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}) \to \mathfrak{M}(\Gamma)$ принадлежит $X_s(1)$. Согласно следствию 1, отображение $\mathcal{V} : \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}) \to \mathcal{V}(\Gamma)$ принадлежит $X_s(s^s)$.

Теорема. *Пусть $c \in [1, +\infty)$, $X \in X_s(c)$. Тогда при всех целых $N \geq 2$*

$$\frac{1}{R_s(N)} \cdot \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)} \#X(\Gamma) \underset{c,s}{\gg} \ln^{s-1} N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ–достаточно большое число, которое не зависит от N и удовлетворяет условиям

$$1 + 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{s-1}\right) > 0, \qquad \lambda > 1. \tag{5}$$

Положим

$$t = [\log_\lambda N],\ \xi = \frac{cN}{\lambda^t}.$$

Так как λ не зависит от N, считаем что, $t \geq 1$. Тогда

$$\begin{gathered}\xi \cdot \lambda^{k_1} \cdot \lambda^{k_2} \cdot \ldots \cdot \lambda^{k_s} = c \cdot N \text{ при } k \in \mathbb{Z}_+^s(t), \\ \xi \cdot \lambda^{k_1} \geq 1, \ \lambda^{k_i} \geq 1, \ i = \overline{2, s}.\end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим

$$Q_s(N) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \# X(\Gamma).$$

Используя лемму 6, получаем

$$Q_s(N) \geq \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \# \left(X(\Gamma) \cap \mathcal{S}_t\right) \geq Q_s'(N) - Q_s''(N),$$

где

$$Q_s'(N) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t)} \# \left(X(\Gamma) \cap P_{\lambda,\xi}(k)\right),$$

$$Q_s''(N) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t-l)} \# \left(X(\Gamma) \cap P_{\lambda,\xi}(k)\right).$$

Из (6) и условия $X \in X_s(c)$ вытекает, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+^s(t)$, $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)$ найдется узел $\gamma \in X(\Gamma)$ такой, что

$$|\gamma_1| \leq \xi \cdot \lambda^{k_1}, \ |\gamma_j| \leq \lambda^{k_j} \text{ при } j = \overline{2, s}.$$

Поэтому

$$Q_s'(N) \geq \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t)} 1 = R_s(N) \cdot \# \mathbb{Z}_+^s(t) = R_s(N) \cdot C_{t+s-1}^{s-1} \geq \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \cdot R_s(N)$$

Используя лемму 4 и соотношения (6), получаем

$$\begin{gathered}Q_s''(N) \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z};N)} \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t-l)} \# \left(\Gamma \cap P_{\lambda,\xi}(k)\right) \leq \\ \leq \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t-l)} 3^s \cdot \zeta(s) \cdot \frac{R_s(N)}{N} \cdot \xi \cdot \lambda^{k_1} \cdot \lambda^{k_2} \cdot \ldots \cdot \lambda^{k_s} = \\ = 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c \cdot \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s(t-l)} \frac{R_s(N)}{\lambda^l} = \\ = 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c \cdot R_s(N) \cdot \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \cdot \frac{C_{t+s-l-1}^{s-1}}{\lambda^l} \leq \\ \leq 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c \cdot R_s(N) \cdot \frac{(t+s)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l \frac{1}{\lambda^l} = \\ = 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c \cdot R_s(N) \cdot \frac{(t+s)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{s-1} - 1\right).\end{gathered}$$

Из последнего соотношения и очевидной формулы

$$(t+s)^{s-1} = t^{s-1} + O_s(t^{s-2}),$$

вытекает, что

$$Q''_s(N) \le \frac{R_s(N)}{(s-1)!} \cdot C(s) \cdot t^{s-1} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{s-1} - 1 \right) + O_{\xi,\lambda}\left(R_s(N) \cdot t^{s-2}\right),$$

где $C(s) = 3^s \cdot \zeta(s) \cdot c$. Следовательно,

$$Q_s(N) \ge Q'_s(N) - Q''_s(N) =$$

$$= \frac{R_s(N) \cdot t^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + C(s) - C(s) \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{s-1} \right) + O_{\xi,\lambda}\left(R_s(N) \cdot t^{s-2}\right).$$

Учитывая условие (5), получаем

$$Q_s(N) \underset{c,s}{\gg} R_s(N) \cdot \ln^{s-1} N.$$

Теорема доказана.
Следствие 2. *Для любого $N \ge 2$ выполнена оценка (2).*
Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой и замечанием 1.

Список литературы

[1] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах*, АН УССР, Киев, 1952.
[2] H. Minkowski, “Generalisation de la theorie des fraction continues”, *Ann. Sei. Ecole Norm. Sup.*, 1896, № 2, 41–60.
[3] F. Klein, “Uber eine geometrische Auffassung der gewohlichen Kettenbruchentwichlung”, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingem.*, 1895, № 3, 357–359.
[4] В. А. Быковский, “Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:1, (2006), 69–71.
[5] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2001.
[6] V. I. Arnold, “Higher dimensional continued fractions”, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingem.*, 1998, № 3, 10–17.
[7] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Чебышевский сборник*, 2002, № 2, 27–33.
[8] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions, Number Theory and Analysis”, *Paper in Honor of Edmund Landau, Plenum, New York*, 1969, 87–96.
[9] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ. Т. 23*, 2011, (в печати).
[10] А. А. Илларионов, “Статистические свойства многомерных аналогов непрерывных дробей”, *Материалы XXII краевого конкурса молодых ученых*, 2010, 5–16, 32 с.
[11] М. О. Авдеева, “О нижних оценках количества локальных минимумов целочисленных решёток”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6, (2005), 9–14.
[12] А. А. Илларионов, “Оценки количества относительных минимумов неполных целочисленных решеток произвольного ранга”, *ДАН*, **418**:2, (2008).
[13] Дж. Касселс, *Геометрия чисел*, Мир, М., 1965, 211 с.
[14] Л. Даунер,Б. Грюнбаум,В. Кли, *Теорема Хелли*, Мир, М., 1968, 160 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 02 сентября 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-98002-р_сибирь_а), ДВО РАН (проекты 11-III-В-01М-002, 09-I-П4-03) и гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1

Illarionov A.A, Slinkin D.A The average number of vertexes of Klein polyhedrons for integer lattices. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 48–55.

ABSTRACT

Low estimate for the average number for vertices of Klein polyhedron of integer lattices with given determinant is derived. The low estimate coincides with the high estimate up to a constant. The constant depends on dimension of lattices. High-low estimates for the number of relative minima of integer lattices with given determinant is derived from this fact. Key words: *high dimension continued fraction, relative minimum, Klein polyhedron.*