УДК 517
MSC2000 42A70

© В. А. Макаричев[1]

Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора для некоторых классов бесконечно дифференцируемых функций

Доказано существование асимптотики базисных функций $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ обобщенного ряда Тейлора для функций неквазианалитического класса $H_{\rho,s}$. Получен первый член асимптотических разложений этих функций.

Ключевые слова: *неквазианалитический класс, обобщенный ряд Тейлора, базисные функции, атомарная функция.*

Введение

Пусть $H(M)$ — класс функций $f \in C^{\infty}_{[-1,1]}$ таких, что $\left\|f^{(n)}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \leq c(f) \cdot M_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $M = \{M_n\}$. Если каждая функция $f \in H(M)$ однозначно определяется по последовательности чисел $\left\{f^{(n)}(x_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$, где x_0 — некоторая точка отрезка $[-1, 1]$, то класс $H(M)$ называется квазианалитическим. В противном случае $H(M)$ называется неквазианалитическим.

В.А. Рвачев предложил и исследовал обобщенный ряд Тейлора для функций неквазианалитических классов

$$H_\alpha = \left\{ f \in C^{\infty}_{[-1,1]} : \ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq c(f) \cdot \alpha^n \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \right\}.$$

В [1, 2] доказано, что если функция $f(x)$ принадлежит классу H_α при $1 \leq \alpha < 2$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}\left(x_{n,k}\right) \cdot \varphi^{(l)}_{n,k}(x),$$

где ряд в правой части сходится равномерно на промежутке $[-1, 1]$ для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}\}$ при $n \neq 0$ и $N_0 = \{-1, 0, 1\}$; $x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}$ при $n \neq 0$ и $k \in N_n$; $x_{0,k} = k$ при $k \in N_0$. Базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ однозначно определяются из условий

$$\varphi_{n,k} \in H_1, \ \varphi^{(m)}_{n,k}\left(x_{m,j}\right) = \delta^m_n \cdot \delta^j_k,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots, k \in N_n$; $m = 0, 1, 2, \ldots, j \in N_m$ и δ^m_n — символ Кронекера. Функции $\varphi_{n,k}(x)$ играют роль функций $\frac{x^n}{n!}$ в обычных рядах Тейлора. Для их построения была использована атомарная функция $\mathrm{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{t}{2^k}}{\frac{t}{2^k}} dt$, которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения $y'(x) = 2 \cdot (y(2x+1) - y(2x-1))$ [2, 3].

[1]Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина, 61070, г. Харьков, ул. Чкалова, 17. Электронная почта: victor.makarichev@gmail.com

Исследования В.А. Рвачева в области построения обобщенных рядов Тейлора для более широких классов бесконечно дифференцируемых функций были продолжены его учениками Г.А. Старцем и В.М. Кузниченко [4, 5].

В 1986 г. была поставлена следующая задача ([6], задача 44, с. 59): исследовать поведение базисных функций $\varphi_{n,k}(x)$ с большими номерами n и найти удобные формулы для их вычисления.

Решению данной задачи посвящены статьи [7, 8]. В этих работах было доказано существование асимптотики функций $\varphi_{n,k}(x)$ при $n \to \infty$ и k таких, что $\frac{k}{2^{n-1}} = x^*$ — фиксированная точка отрезка $[-1,1]$, и получены для этих функций асимптотические разложения.

Настоящая работа посвящена изучению поведения при $n \to \infty$ базисных функций $\varphi_{s,n,k}$ и $\psi_{s,n,p}$ обобщенного ряда Тейлора для функций класса

$$H_{\alpha,s} = \left\{ f \in C^{\infty}_{[-1,1]} : \left| f^{(n)}(x) \right| \leq c(f) \cdot \alpha^n \cdot 2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}, n = 0,1,2,\ldots \right\},$$

где $s = 2,3,4,\ldots$.

Пусть $N_{s,n} = \left\{-s \cdot (2s)^{n-1}, -s \cdot (2s)^{n-1}+1, \ldots, s \cdot (2s)^{n-1}-1, s \cdot (2s)^{n-1}\right\}$ при $n \in N$ и $N_{s,0} = \{-1,0,1\}$; $x_{s,n,k} = \frac{k}{s \cdot (2s)^{n-1}}$ при $k \in N_{s,n}$ и $n > 0$, $x_{s,0,k} = k$ при $k \in N_{s,0}$; $D_{s,n} = \left\{1,2,3,\ldots,(2s)^{n+1}-1\right\} \setminus \{k \cdot s\}, k \in N$; $x^*_{s,n,p} = -1 + \frac{p}{s \cdot (2s)^n}$ при $p \in D_{s,n}$ и $n = 0,1,2,\ldots$. Положим $\triangle^2_h(f;x) = f(x+h) - 2 \cdot f(x) + f(x-h)$ — вторая разность функции f в точке x с шагом h.

Согласно [4, 9], если $f \in H_{\alpha,s}$ при $s = 2,3,4,\ldots$ и $1 < \alpha < 2s$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_{s,n}} f^{(n)}\left(x_{s,n,k}\right) \cdot \varphi^{(l)}_{s,n,k}(x) + \sum_{p \in D_{s,n}} \triangle^2_{\frac{1}{s \cdot (2s)^n}} \left(f^{(n)}; x^*_{s,n,p}\right) \cdot \psi^{(l)}_{s,n,p}(x) \right).$$

При этом ряд в правой части равенства сходится равномерно на отрезке $[-1,1]$ для любого $l = 0,1,2,\ldots$. Функции $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ однозначно определяются из следующих условий:

$$\varphi_{s,n,k} \in H_{1,s}, \;\; \psi_{s,n,p} \in H_{1,s},$$

$$\varphi^{(l)}_{s,n,k}\left(x_{s,l,m}\right) = \delta^l_n \cdot \delta^m_k, \;\; \psi^{(l)}_{s,n,k}\left(x_{s,l,m}\right) = 0,$$

$$\triangle^2_{\frac{1}{s \cdot (2s)^l}} \left(\varphi^{(l)}_{s,n,k}; x^*_{s,l,q}\right) = 0, \;\; \triangle^2_{\frac{1}{s \cdot (2s)^l}} \left(\psi^{(l)}_{s,n,p}; x^*_{s,l,q}\right) = \delta^l_n \cdot \delta^p_q,$$

где $n = 0,1,2,\ldots$, $k \in N_{s,n}$ и $p \in D_{s,n}$; $l = 0,1,2,\ldots$, $m \in N_{s,l}$ и $q \in D_{s,l}$.

Базисные функции $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ были построены с помощью атомарной функции $\mathrm{mup}_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{st}{(2s)^k}}{s^2 \cdot \frac{t}{(2s)^k} \cdot \sin \frac{t}{(2s)^k}} dt$ [4, 10], которая является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{s} \left(y(2sx + 2s - 2k + 1) - y(2sx - 2k + 1) \right). \tag{1}$$

Обобщенные ряды Тейлора для неквазианалитических классов H_α и $H_{\alpha,s}$ позволяют восстанавливать функции с использованием информации, которая задается в точках достаточно простых множеств, что делает данный математический аппарат удобным для исследования функций из вышеуказанных неквазианалитических классов. Так, например, с использованием обобщенных рядов Тейлора можно доказывать теоремы существования и единственности решений краевых задач нового типа для функционально-дифференциальных уравнений [2, 11, 12].

1. Вспомогательные результаты

Для решения поставленной задачи нами будут использованы следующие свойства функции $\mathrm{mup}_s(x)$ при $s = 2, 3, 4, \ldots$:

1°. $\mathrm{supp}\ \mathrm{mup}_s(x) = [-1, 1]$, $\mathrm{mup}_s(x)$ — четная функция [4].

2°. $\mathrm{mup}_s(x) \in C^\infty$ и $\left\| \mathrm{mup}_s^{(k)} \right\|_C = 2^k \cdot (2s)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ [4].

3°. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{mup}_s(x)dx = 1$, $\mathrm{mup}_s(0) = 1$ [4].

4°. Функция $\mathrm{mup}_s(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает, кроме того, функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является неотрицательной для любого x.

5°. Производная l-го порядка функции $\mathrm{mup}_s(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{mup}_s^{(l)}(x) = 2^l \cdot (2s)^{\frac{l(l-1)}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{(2s)^l} \delta_{s,l,k} \cdot \mathrm{mup}_s \left((2s)^l \cdot x + (2s)^l - 2k + 1 \right),$$

где коэффициенты $\delta_{s,l,k}$ могут быть найдены следующим образом:

а) $\delta_{s,1,1} = \ldots = \delta_{s,1,s} = 1$ и $\delta_{s,1,s+1} = \ldots = \delta_{s,1,2s} = -1$;

б) если $l \geq 2$, то $\delta_{s,l,i+j\cdot(2s)^{l-1}} = \delta_{s,l-1,i}$ и $\delta_{s,l,i+k\cdot(2s)^{l-1}} = -\delta_{s,l-1,i}$, где $i = 1, \ldots, (2s)^{l-1}$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$ и $k = s, \ldots, 2s-1$; отдельно отметим, что $\delta_{s,l,1} = 1$ для любого $l \in N$.

6°. $\mathrm{mup}_s(-1) = \mathrm{mup}_s(1) = 0$ и $\mathrm{mup}_s^{(l)}(x_{s,l,j}) = 0$ для всех $l \in N$ и $j \in N_{s,l}$.

7°. Для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ значения функции $\mathrm{mup}_s(x)$ в точках вида $-1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}$ и $-1 + \frac{1}{(2s)^k}$ вычисляются по формулам

$$\mathrm{mup}_s \left(-1 + \frac{1}{s \cdot (2s)^k} \right) = \frac{2^{k+1}}{(2s)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu_{s,j}}{j! \cdot (k-j)!}$$

и

$$\mathrm{mup}_s \left(-1 + \frac{1}{(2s)^k} \right) = \frac{2^k}{(k-1)! \cdot (2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}} \cdot \nu_{s,k-1},$$

где $\mu_{s,j} = \int\limits_{-1}^{1} x^j \cdot \mathrm{mup}_s(x)dx$ и $\nu_{s,k} = \int\limits_{0}^{1} x^k \cdot \mathrm{mup}_s(x)dx$.

8°. Величины $\mu_{s,k} = \int\limits_{-1}^{1} x^j \cdot \mathrm{mup}_s(x)dx$ и $\nu_{s,k} = \int\limits_{0}^{1} x^k \cdot \mathrm{mup}_s(x)dx$ определяются из соотношений:

а) $\mu_{s,0} = 1$, $\mu_{s,2n-1} = 0$ и $\mu_{s,2n} = \frac{(2n)!}{s\cdot((2s)^{2n}-1)} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sum_{l=1}^{s}(2l-1)^{2k+1}}{(2n-2k)!\cdot(2k+1)!} \cdot \mu_{s,2n-2k}$ для любого $n \in N$;

б) $\nu_{s,2n} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{s,2n}$ и $\nu_{s,2n-1} = \frac{1}{n\cdot(2s)^{2n+1}} \cdot \sum\limits_{l=0}^{n} C_{2n}^{2l} \cdot \sum\limits_{k=1}^{s} (2k-1)^{2l} \cdot \mu_{s,2n-2l}$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Свойства 4° – 8° получены в диссертации Г.А. Старца [13]. Их доказательство можно также найти в [14].

Введем в рассмотрение вспомогательные функции $\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,p}(x)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in N_{s,n}$ и $p \in D_{s,n}$. Забегая вперед, отметим, что эти функции отличаются от базисных функций $\varphi_{s,n,k}(x)$ и $\psi_{s,n,p}(x)$ только нормировкой.

Положим для любого $x \in [-1, 0]$

$$\widehat{\varphi}_{s,0,0}(x) = \mathrm{mup}_s(x)$$

и

$$\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)=\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+\sum_{j=0}^{n-1}x_{s,n-j-1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right)$$

для $n\in N$, где коэффициенты $\{x_{s,i}\}$ удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{2s}\right)+x_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^2}\right)+x_{s,1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)+x_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot 2s}\right)=0\\ \ldots\\ \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+x_{s,n-1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)+\\ +x_{s,n-2}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)+\ldots+x_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-1}}\right)=0\\ \ldots\end{cases}\qquad(2)$$

Из свойств 7°, 8° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$. Поэтому система уравнений (2) имеет единственное решение.

Функции $\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)$ с нечетными номерами n продолжим на промежуток $[0,1]$ нечетным образом, а с четными номерами n — четным образом. Это необходимо для того, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми на $[-1,1]$.

Далее пусть

$$\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)=\begin{cases}-\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)+\\ \quad+\sum\limits_{j=0}^{n-1}y_{s,n-j-1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right),\ x\le 0,\\ 0,\ x>0\end{cases}$$

для $n=0,1,2,\ldots$, где коэффициенты $\{y_{s,j}\}$ удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных уравнений

$$\begin{cases}-\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{2s}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)+y_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ -\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^2}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^2}\right)+\\ \quad+y_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)+y_{s,1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \ldots\\ -\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+s\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right)+\\ \quad+y_{s,0}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-1}}\right)+\ldots+y_{s,n-1}\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=0\\ \ldots\end{cases}\qquad(3)$$

Поскольку $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$, система уравнений (3) имеет единственное решение.

Остальные функции $\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,p}$ строим следующим образом:

а) $\widehat{\varphi}_{s,0,-1}(x)=\widehat{\varphi}_{s,0,0}(x+1)$, $\widehat{\varphi}_{s,0,1}(x)=\widehat{\varphi}_{s,0,0}(x-1)$;

б) $\widehat{\psi}_{s,0,s+1}(x)=\widehat{\psi}_{s,0,s-1}(-x)$;

в) если $s>2$, то $\widehat{\psi}_{s,0,1}(x)=\widehat{\psi}_{s,0,s-1}(-x-1)$ и для любого $p=2,\ldots,s-2$ положим

$$\widehat{\psi}_{s,0,p}(x)=\widehat{\psi}_{s,0,s-1}\left(-x-1+\frac{p-1}{s}\right)-\widehat{\varphi}_{s,0,0}(x)\cdot\widehat{\psi}_{s,0,s-1}\left(-1+\frac{p-1}{s}\right)-$$

$$-\widehat{\psi}_{s,0,p-1}(x)\cdot\triangle^2_{\frac{1}{s}}\left(\widehat{\psi}_{s,0,s-1};-x^*_{s,0,p-1}-1+\frac{p-1}{s}\right)-$$

$$-\widehat{\psi}_{s,0,s+p-1}(x)\cdot\triangle^2_{\frac{1}{s}}\left(\widehat{\psi}_{s,0,1};-x^*_{s,0,s+p-1}-1+\frac{p-1}{s}\right);$$

г) если $s>2$, то для всех $p=2,\dots,s-1$ положим $\widehat{\psi}_{s,0,p+s}(x)=\widehat{\psi}_{s,0,p}(x-1)$;

д) пусть $n\geq 1$ и для всех $m=1,\dots,n-1$, $j\in N_{s,m}$ и $q\in D_{s,m}$ функции $\widehat{\varphi}_{s,m,j}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,m,q}(x)$ уже построены, тогда:

— для любого $k\in N_{s,n}$ положим

$$\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)=\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x-x_{s,n,k})-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{j\in N_{s,l}}\widehat{\varphi}_{s,l,j}(x)\cdot\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}(x_{s,l,j}-x_{s,n,k})-$$

$$-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{p\in D_{s,l}}\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}}\left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0};x^*_{s,l,p}-x_{s,n,k}\right)\cdot\widehat{\psi}_{s,l,p}(x);$$

— $\widehat{\psi}_{s,n,1}(x)=\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(-x-1)$, $\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n+1}(x)=\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(-x)$;

— для любого $j=1,2,\dots,2\cdot(2s)^n-1$ положим

$$\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot j+1}(x)=\widehat{\psi}_{s,n,1}\left(x-\frac{j}{(2s)^n}\right)-\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{k\in N_{s,l}}\widehat{\varphi}_{s,l,k}(x)\cdot\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1}\left(x_{s,l,k}-\frac{j}{(2s)^n}\right)-$$

$$-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{q\in D_{s,l}}\widehat{\psi}_{s,l,q}(x)\cdot\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}}\left(\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1};x^*_{s,l,q}-\frac{j}{(2s)^n}\right);$$

— если $s>2$, то для любого $m=0,1,\dots,2\cdot(2s)^n-1$ и $p=2,\dots,s-1$ положим

$$\widehat{\psi}_{s,n,m\cdot s+p}(x)=\widehat{\psi}_{s,n,1}\left(x-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-$$

$$-\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{k\in N_{s,l}}\widehat{\varphi}_{s,l,k}(x)\cdot\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1}\left(x_{s,l,k}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-$$

$$-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}}\cdot\sum_{q\in D_{s,l}}\widehat{\psi}_{s,l,q}(x)\cdot\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}}\left(\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1};x^*_{s,l,q}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)-$$

$$-\sum_{j=0}^{2\cdot(2s)^n-1-m}\frac{\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot j+s\cdot m+p-1}(x)\cdot\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\left(\widehat{\psi}^{(n)}_{s,n,1};x^*_{s,l,s\cdot j+m\cdot s+p-1}-\frac{m\cdot s+p-1}{s\cdot(2s)^n}\right)}{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Связь между функциями $\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x),\widehat{\psi}_{s,n,p}(x)$ и $\varphi_{s,n,k}(x),\psi_{s,n,p}(x)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1 [14]. *Для всех $n=0,1,2,\dots$, $k\in N_{s,n}$ и $p\in D_{s,n}$ справедливы тождества*

$$\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)\equiv 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\varphi_{s,n,k}(x)$$

и

$$\widehat{\psi}_{s,n,p}(x)\equiv 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\psi_{s,n,p}(x).$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма 1 [14]. *Для любых* $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in N_{s,n}$, $m \in N_{s,l}$, $a \in D_{s,n}$ *и* $b \in D_{s,l}$ *выполняются следующие равенства:*

$$\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,k}(x_{s,l,m}) = 2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \delta^l_n \cdot \delta^m_k, \quad \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,k}; x^*_{s,l,b}\right) = 0,$$

$$\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,a}(x_{s,l,m}) = 0, \quad \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,a}; x^*_{s,l,b}\right) = 2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \delta^l_n \cdot \delta^b_a.$$

Таким образом, $\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,p}(x)$ также являются базисными функциями обобщенного ряда Тейлора для функций класса $H_{\alpha,s}$.

Покажем, что некоторые слагаемые в выражениях для функций $\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,p}(x)$ могут быть равными нулю.

Теорема 2. *Пусть n является натуральным и k принадлежит множеству $N_{s,n}$. Если k является числом вида $h \cdot (2s)^{n-1-q}$, где $q \le n-1$ и $h \ne 0(\mod 2s)$, то*

$$\widehat{\varphi}_{s,n,k}(x) = \widehat{\varphi}_{s,n,0}\left(x - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) - \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l \cdot (2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \cdot \sum_{j \in N_{s,l}} \widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(x_{s,l,j} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) \cdot \widehat{\varphi}_{s,l,j}(x) -$$

$$- \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l \cdot (2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \cdot \sum_{p \in D_{s,l}} \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}; x^*_{s,l,p} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) \cdot \widehat{\psi}_{s,l,p}(x).$$

Доказательство. Чтобы установить справедливость утверждения теоремы, достаточно показать, что для любого $l = q+1, \ldots, n-1$ справедливы равенства $\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(x_{s,l,j} - x_{s,n,k}\right) = 0$ и $\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}; x^*_{s,l,p} - x_{s,n,k}\right) = 0$.

Так как $k = h \cdot (2s)^{n-1-q}$, где $q \le n-1$ и $h \ne 0(\mod 2s)$, то $x_{s,n,k} = \frac{k}{s\cdot(2s)^{n-1}} = \frac{h}{s\cdot(2s)^q}$.

Если $l \ge q+1$ и $l \le n-1$, то для любого $j \in N_{s,l}$ можно записать $\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(x_{s,l,j} - x_{s,n,k}\right) = = \widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(\frac{j}{s\cdot(2s)^{l-1}} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) = \widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(\frac{j - h\cdot(2s)^{l-1-q}}{s\cdot(2s)^{l-1}}\right) = \widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}\left(x_{s,l,j-h\cdot(2s)^{l-1-q}}\right) = 0$, где последний переход вытекает из леммы 1.

Из леммы 1 также следует, что при $l \ge q+1$ справедливо равенство

$$\triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}; x^*_{s,l,p} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) = \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\varphi}^{(l)}_{s,n,0}; -1 + \frac{p - h\cdot(2s)^{l-q}}{s\cdot(2s)^l}\right) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть n является натуральным и $j = 1, 2, \ldots, 2\cdot(2s)^n - 1$. Если $j = (2s)^n + + 2 \cdot h \cdot (2s)^{n-1-q}$, где $q \le n-1$ и $h \ne 0(\mod 2s)$, то*

$$\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot j+1}(x) = \widehat{\psi}_{s,n,1}\left(x - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) -$$

$$- \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l \cdot (2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \cdot \sum_{k \in N_{s,l}} \widehat{\varphi}_{s,l,k}(x) \cdot \widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1}\left(x_{s,l,k} - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) -$$

$$- \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l \cdot (2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \cdot \sum_{p \in D_{s,l}} \widehat{\psi}_{s,l,p}(x) \cdot \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}} \left(\widehat{\psi}^{(l)}_{s,n,1}; x^*_{s,l,p} - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right).$$

Доказательство теоремы аналогично приведенному в теореме 2.

Итак, нами установлено, что число слагаемых в выражениях функций $\widehat{\varphi}_{s,n,h\cdot(2s)^{n-1-q}}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n+h\cdot(2s)^{n-q}+1}(x)$ не зависит от n.

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi_s(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)\cdot z^k, \\ \Lambda_s(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{k+1}}\right)\cdot z^k, \\ T_s(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{k+1}}\right)\cdot z^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Основным результатом, на котором базируется решение поставленной в данной статье задачи, является следующая теорема.

Теорема 4. *Для любого $s \ge 2$ функция $\Phi_s(z)$ в круге $G_s = \{z \in C: \ |z| < 4\cdot s^2\}$ имеет единственный корень λ_s, который является действительным числом и принадлежит интервалу $(-3s^2;-1)$, причем $\Lambda_s(\lambda_s) \ne 0$ и $\Lambda_s(\lambda_s) - s\cdot T_s(\lambda_s) \ne 0$.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Для всех $s \ge 2$ и $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо равенство*

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right) = \frac{2^{n+1}}{n!\cdot(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\int_{-1}^{1}(-\tau+1)^n\cdot\mathrm{mup}_s(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме: $\mathrm{mup}_s(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{mup}_s^{(k)}(-1)}{k!}\cdot(x+1)^k + \frac{1}{n!}\cdot\int\limits_{-1}^{x}\mathrm{mup}_s^{(n+1)}(t)\cdot\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n dt$. Из свойства 6° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\mathrm{mup}_s^{(k)}(-1) = 0$ для любого $k = 0,1,2,\ldots$. Значит,

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right) = \frac{1}{n!}\cdot\int_{-1}^{-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\mathrm{mup}_s^{(n+1)}(t)\cdot\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n dt.$$

Применяя свойство 5°, получаем

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right) = \frac{1}{n!}\cdot\int_{-1}^{-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}}\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}-t\right)^n\cdot 2^{n+1}\cdot(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^{n+1}}\delta_{s,n+1,k}\times$$

$$\times\mathrm{mup}_s\left((2s)^{n+1}\cdot t+(2s)^{n+1}-2k+1\right)dt = \frac{2^{n+1}}{n!\cdot(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^{n+1}}\delta_{s,n+1,k}\times$$

$$\times\int_{-2k+1}^{3-2k}(-\tau+3-2k)^n\cdot\mathrm{mup}_s(\tau)d\tau.$$

В последнем переходе сделана соответствующая замена переменной.

Из свойства 1° следует, что $\mathrm{mup}_s(\tau) = 0$ для любого $\tau \in [-2k+1,-2k+3]$ при всех $k = 2,3,\ldots,(2s)^{n+1}$. Поэтому, учитывая равенство $\delta_{s,n+1,1} = 1$ (свойство 5°), получаем

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right) = \frac{2^{n+1}}{n!\cdot(2s)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}\cdot\int_{-1}^{1}(-\tau+1)^n\cdot\mathrm{mup}_s(\tau)d\tau.$$

Итак, лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $f_s(z) = \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right) + z\cdot\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right)$ и $g_s(z) = \Phi_s(z) - f_s(z)$. Докажем, что при $s \geq 6$ на границе области G_s имеет место неравенство $|f_s(z)| > |g_s(z)|$.

Из свойств 7°, 8° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$ и $\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)}\right) =$

$= \frac{1}{2s^3}$. Значит, $f_s(z) = \frac{1}{s} + \frac{z}{2s^3}$ и $\min\limits_{|z|=4s^2} |f_s(z)| = \frac{1}{s}$, $\min\limits_{|z|=3s^2} |f_s(z)| = \frac{1}{2s}$.

Докажем, что $\max\limits_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| < \frac{1}{2s}$ при $s \geq 6$.

По построению $g_s(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} z^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)$. Из этого следует, что

$$\max_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} (2s)^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right).$$

Так как $|\mathrm{mup}_s(x)| \leq 1$ (свойство 2°), то, применяя лемму 2, получаем

$$\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) \leq \frac{2^{2(k+1)}}{(k+1)!\cdot(2s)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}.$$

Следовательно,

$$\max_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2(k+1)}}{(k+1)!\cdot(2s)^{\frac{k^2-k+2}{2}}} = \frac{1}{s^2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{(k+1)!\cdot(2s)^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{8}{3} + \frac{4^3}{4!\cdot(2s)^2} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{4^k}{(k+1)!\cdot(2s)^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}}\right) \leq \frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3s^2} + \left(\frac{2}{s}\right)^4\cdot\frac{1}{5!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{s}\right)^j}{j!}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3s^2} + \frac{2}{15s^4}\cdot e^{\frac{2}{s}}\right) < \frac{1}{2s} \text{ при } s \geq 6.$$

Таким образом, если $s \geq 6$, то

$$\max_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| < \min_{|z|=3s^2} |f_s(z)| \tag{5}$$

и

$$\max_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| < \min_{|z|=4s^2} |f_s(z)|. \tag{6}$$

Из теоремы Руше следует, что в круге G_s функция $f_s(z) + g_s(z)$ имеет столько корней, сколько их имеет $f_s(z)$. Функция $f_s(z)$ в круге G_s имеет один корень $z_s = -2s^2$. Значит, функция $\Phi_s(z) = f_s(z) + g_s(z)$ имеет в G_s единственный корень. Обозначим этот корень через λ_s.

Докажем, что λ_s является действительным числом и принадлежит интервалу $(-3s^2, -1)$.

По построению $\Phi_s(-1) = f_s(-1) + g_s(-1) \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^3} - |g_s(-1)|$. Выше нами было установлено, что $\max\limits_{|z|\leq 4s^2} |g_s(z)| < \frac{1}{2s}$. Поэтому $\Phi_s(-1) > \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s^3} > 0$ при $s \geq 6$.

Так как $\Phi_s(-3s^2) \leq f_s(-3s^2) + |g_s(-3s^2)|$ и $f_s(-3s^2) = \frac{1}{s} - \frac{3s^2}{2s^3} = -\frac{1}{2s}$, то используя (5) получаем $\Phi_s(-3s^2) < -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s} = 0$.

Таким образом, на концах промежутка $[-3s^2, -1]$ функция $\Phi_s(x)$ принимает различные по знаку значения. Следовательно, существует $x_s \in (-3s^2, -1)$ такое, что $\Phi_s(x_s) = 0$. Так как функция $\Phi_s(z)$ имеет в G_s единственный корень, то λ_s и x_s совпадают. Это доказывает, что $\lambda_s \in (-3s^2, -1)$.

Покажем, что $\Lambda_s(\lambda_s) \neq 0$ и $\Lambda_s(\lambda_s) - s \cdot T_s(\lambda_s) \neq 0$. Для этого достаточно установить, что $\Lambda_s(\lambda_s) > s \cdot T_s(\lambda_s) > 0$.

По построению $\Lambda_s(\lambda_s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot |\lambda_s|^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^{k+1}}\right) = \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{2s}\right) + R_0$, где $R_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot |\lambda_s|^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^{k+1}}\right)$. Из свойств 7°, 8° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{2s}\right) = \frac{1}{2s}$ и $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^2}\right) = \frac{\nu_{s,1}}{2s^3}$. Поэтому $|R_0| \leq |\lambda_s| \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^2}\right) \leq$ $\leq 3s^2 \cdot \frac{\nu_{s,1}}{2s^3} = \frac{3\nu_{s,1}}{2s}$. Применяя свойство 7°, получаем $\nu_{s,1} = \frac{1}{(2s)^3} \cdot \left(\mu_{s,2} \cdot s + \mu_{s,0} \cdot \frac{s \cdot (2s-1) \cdot (2s+1)}{3}\right)$. Так как $\mu_{s,0} = 1$ и $\mu_{s,2} = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \mathrm{mup}_s(x) dx \leq 1$ (это следует из свойства 3° функции $\mathrm{mup}_s(x)$), то $\nu_{s,1} \leq \frac{1}{8s^3} \cdot \left(s + s \cdot \frac{4s^2-1}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12s^2}$ и $|R_0| \leq \frac{1}{4s} + \frac{1}{8s^3}$.

Так как $T_s(\lambda_s) = \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{s \cdot (2s)}\right) + r_0$, где $r_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot |\lambda_s|^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{s \cdot (2s)^{k+1}}\right)$, и $|r_0| \leq |\lambda_s| \cdot \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{s \cdot (2s)^2}\right)$, то, учитывая лемму 2 и неравенство $|\lambda_s| \leq 2 \cdot s^2$, получаем $|r_0| \leq 3 \cdot s^2 \cdot \frac{2^3}{(2s)^6 \cdot 2!} \cdot \int\limits_{-1}^{1} (x+1)^2 \cdot \mathrm{mup}_s(x) dx$.

Поскольку $0 \leq \mathrm{mup}_s(x) \leq 1$ для любого x, то $\int\limits_{-1}^{1} (x+1)^2 \cdot \mathrm{mup}_s(x) dx \leq \frac{8}{3}$.

Следовательно, $|r_0| \leq \frac{1}{2s^4}$.

Тогда $T_s(\lambda_s) = \frac{1}{2s^3} + r_0 \geq \frac{1}{2s^3} - |r_0| \geq \frac{1}{2s^3} - \frac{1}{2s^4}$, откуда видно, что $T_s(\lambda_s) > 0$ для любого $s \geq 6$.

Кроме того, $\Lambda_s(\lambda_s) - s \cdot T_s(\lambda_s) = \frac{1}{2s} + R_0 - s \cdot \left(\frac{1}{2s^3} + r_0\right) \geq \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s^2} - |R_0| - s \cdot |r_0|$. Используя оценки для величин R_0 и r_0, получаем $\Lambda_s(\lambda_s) - s \cdot T_s(\lambda_s) \geq \frac{1}{4s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{8s^3}$. Из этого следует, что при $s \geq 6$ справедливо неравенство $\Lambda_s(\lambda_s) - s \cdot T_s(\lambda_s) > 0$.

Значит, если $s \geq 6$, то $\Lambda_s(\lambda_s) > s \cdot T_s(\lambda_s) > 0$.

Итак, остается проверить справедливость утверждения теоремы для $s = 2, 3, 4, 5$.

Из свойств 7°, 8° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\Lambda_s(z)$, $T_s(z)$ и $\Phi_s(z)$ можно вычислять с произвольной точностью для любого $s = 2, 3, 4, \ldots$. Если обозначить через $z_{s,1}, z_{s,2}, \ldots$ корни функции $\Phi_s(z)$, расположенные в порядке возрастания модулей, то вычисления с точностью 10^{-6} дают:

$\lambda_2 = z_{2,1} = -9,617232$, $z_{2,2} = -58,870525$ и $z_{2,3} = -311,828551$ при $s = 2$;

$\lambda_3 = z_{3,1} = -20.156633$, $z_{3,2} = -191.896997$ и $z_{3,3} = -2072.153602$ при $s = 3$;

$\lambda_4 = z_{4,1} = -34.72097$, $z_{4,2} = -449.593323$ и $z_{4,3} = -8894.242515 + i \cdot 1578.373083$ при $s = 4$;

$\lambda_5 = z_{5,1} = -53.293749$, $z_{5,2} = -872.818348$ и $z_{5,3} = -18561.691892 + i \cdot 8644.253491$ при $s = 5$.

Кроме того, с точностью 10^{-6} получаем $\Lambda_s(\lambda_s) \neq 0$ и $\Lambda_s(\lambda_s) - s \cdot T_s(\lambda_s) \neq 0$ для всех $s = 2, 3, 4, 5$.

Полученные результаты показывают справедливость утверждения теоремы для случая, когда $s = 2, 3, 4, 5$.

Итак, теорема доказана.

2. Асимптотика базисных функций

Пусть $V_s(z) = -\frac{\Lambda_s(z)}{\Phi_s(z)}$ и $W_s(z) = \frac{\Lambda_s(z) - s \cdot T_s(z)}{\Phi_s(z)}$, где, напомним, функции $\Lambda_s(z)$, $T_s(z)$ и $\Phi_s(z)$ были введены в предыдущем разделе соотношениями (4).

Разложим функции $V_s(z)$ и $W_s(z)$ в ряд Маклорена:

$$V_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{s,k} \cdot z^k \text{ и } W_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{s,k} \cdot z^k.$$

Тогда из равенств $\Lambda_s(z) + \Phi_s(z) \cdot V_s(z) = 0$ и $W_s(z) \cdot \Phi_s(z) = \Lambda_s(z) - s \cdot T_s(z)$ следует, что коэффициенты $x_{s,n}$ разложения $V_s(z)$ будут удовлетворять системе (2), а коэффициенты $y_{s,n}$ разложения $W_s(z)$ — системе (3).

Из теоремы 4 следует, что функции $V_s(z)$ и $W_s(z)$ имеют единственный полюс λ_s. С использованием обозначений $d_s = Res_{\lambda_s} V_s(z)$ и $\ell_s = Res_{\lambda_s} W_s(z)$ мы получаем, что функции $\eta_s(z) = V_s(z) - \frac{d_s}{z-\lambda_s}$ и $\xi_s(z) = W_s(z) - \frac{\ell_s}{z-\lambda_s}$ являются аналитическими для $|z| < 4s^2$:

$$\eta_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{s,k} \cdot z^k \text{ и } \xi_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{s,k} \cdot z^k,$$

причем для любого $\rho \in (0, 4s^2)$ справедливы неравенства

$$|v_{s,k}| \le \frac{M_s(\rho)}{\rho^k}, \text{ где } M_s(\rho) = \max_{|z|=\rho} |\eta(z)|;$$

$$|w_{s,k}| \le \frac{B_s(\rho)}{\rho^k}, \text{ где } B_s(\rho) = \max_{|z|=\rho} |\xi_s(z)|.$$

В круге $|z| < |\lambda_s|$

$$\frac{d_s}{z-\lambda_s} = -\frac{d_s}{\lambda_s} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\lambda_s}} = -\frac{d_s}{\lambda_s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_s}\right)^k.$$

Так как $V_s(z) = \eta_s(z) + \frac{d_s}{z-\lambda_s}$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_{s,k} \cdot z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{d_s}{\lambda_s^{k+1}} + v_{s,k}\right) \cdot z^k$ при $|z| < |\lambda_s|$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_{s,k} \cdot z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\ell_s}{\lambda_s^{k+1}} + w_{s,k}\right) \cdot z^k$ при $|z| < |\lambda_s|$.

Значит, асимптотика для коэффициентов $x_{s,k}$ и $y_{s,k}$ имеет следующий вид:

$$x_{s,k} = -\frac{d_s}{\lambda_s^{k+1}} + v_{s,k}, \ |v_{s,k}| \le \frac{M_s(\rho)}{\rho^k} \tag{7}$$

и

$$y_{s,k} = -\frac{\ell_s}{\lambda_s^{k+1}} + w_{s,k}, \ |w_{s,k}| \le \frac{B_s(\rho)}{\rho^k} \tag{8}$$

для любого $\rho \in (0, 4s^2)$. Эти асимптотические разложения нам понадобятся для того, чтобы исследовать поведение функций $\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)$ при $n \to \infty$.

Введем в рассмотрение функцию $ab_s(x)$, которую на промежутке $(-\infty, 0]$ определим формулой

$$ab_s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_s^j \cdot \mathrm{mup}_s \left(x - 1 + \frac{1}{s \cdot (2s)^j}\right).$$

Пусть $\Phi_{s,0,0}(x)$ есть функция $ab_s(x)$, четно продолженная на всю числовую ось, а $\Phi_{s,1,0}(x)$ — $ab_s(x)$, продолженная на $(-\infty, \infty)$ нечетно. Кроме того, положим

$$\Psi_{s,0}(x) = \begin{cases} ab_s(x), \ x \le 0 \\ 0, \ x > 0 \end{cases}.$$

Используя функции $\Phi_{s,0,0}(x)$, $\Phi_{s,1,0}(x)$ и $\Psi_{s,0}$ мы можем сформулировать основной результат в терминах базисных функций $\varphi_{s,n,0}(x)$ и $\psi_{s,n,s(2s)^n-1}(x)$.

Положим $c_{s,n} = -\frac{d_s}{\lambda_s^n}$ и $b_{s,n} = -\frac{\ell_s}{\lambda_s^n}$.

Теорема 5. *Для любого $s = 2, 3, 4, \ldots$ функции*

$$\frac{2^{2n} \cdot (2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}} \cdot \varphi_{s,2n,0}(x), \quad \frac{2^{2n-1} \cdot (2s)^{(2n-1)(n-1)}}{c_{s,2n-1}} \cdot \varphi_{s,2n-1,0}(x), \quad \frac{2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}} \cdot \psi_{s,n,s(2s)^n-1}(x)$$

при $n \to \infty$ сходятся равномерно на отрезке $[-1; 1]$ к функциям $\Phi_{s,0,0}(x)$, $\Phi_{s,1,0}(x)$ и $\Psi_{s,0}(x)$ соответственно, причем справедливы следующие оценки:

$$\left\| \frac{2^{2n} \cdot (2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}} \cdot \varphi_{s,2n,0}(x) - \Phi_{s,0,0}(x) \right\|_{C_{[-1,1]}} \leq M_1(s, \rho) \cdot \frac{2n \cdot |\lambda_s|^{2n}}{\rho^{2n}}, \tag{9}$$

$$\left\| \frac{2^{2n-1} \cdot (2s)^{(2n-1)(n-1)}}{c_{s,2n-1}} \cdot \varphi_{s,2n-1,0}(x) - \Phi_{s,1,0}(x) \right\|_{C_{[-1,1]}} \leq M_2(s, \rho) \cdot \frac{(2n-1) \cdot |\lambda_s|^{2n-1}}{\rho^{2n-1}} \tag{10}$$

и

$$\left\| \frac{2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}} \cdot \psi_{s,n,s(2s)^n-1}(x) - \Psi_{s,0}(x) \right\|_{C_{[-1,1]}} \leq M_3(s, \rho) \cdot \frac{n \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n} \tag{11}$$

для любого $\rho \in \left[3s^2, 4s^2\right)$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 3. *Для любого натурального n и любого $x \in \left[-1; -\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$ выполняются неравенства*

$$\left| ab_s(x) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x) \right| \leq \frac{n \cdot c_1(s, \rho) \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

$$\left| ab_s(x) - \frac{1}{b_{s,n}} \cdot \widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x) \right| \leq \frac{n \cdot c_2(s, \rho) \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

где $s \geq 2$ и $\rho \in \left[3s^2, 4s^2\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \left[-1; -\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$. Если $k \geq n$, то $x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k} \leq -1$, откуда в силу свойства 1° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует $\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) = 0$. Поэтому на указанном промежутке справедлива формула $ab_s(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_s^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)$. Тогда, используя (7), получаем

$$ab_s(x) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_s^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) -$$

$$-\frac{1}{c_{s,n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x_{s,n-j-1} \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right) = -\frac{1}{c_{s,n}} \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_s^k \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) + \frac{\lambda_s^n}{d_s} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{d_s}{\lambda_s^{n-j}} + v_{s,n-j-1}\right) \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c_{s,n}} \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v_{s,n-1-k} \cdot \mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right).$$

Так как $|v_{s,j}| \le \frac{M(\rho)}{\rho^j}$ (см. (7)), то, с учетом того, что функция $\mathrm{mup}_s(x)$ является неотрицательной при любом x, получаем

$$\left|ab_s(x) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right)}{|c_{s,n}|} + \frac{M_s(\rho)}{|c_{s,n}|} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)}{\rho^{n-k-1}}.$$

Оценим величины $\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)$ и $\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right)$.

Поскольку функция $\mathrm{mup}_s(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает (свойство 4°), то $\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) \le \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^k}\right)$ и $\mathrm{mup}_s\left(x - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) \le \mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^n}\right)$.

Если $k = 0$, то $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^k}\right) = \mathrm{mup}_s(0) = 1$, что следует из свойства 3°.

Пусть $k > 0$. Используя свойство 7°, получаем $\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^k}\right) = \frac{2^k \cdot \nu_{s,k-1}}{(k-1)!\cdot(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}$.

Из свойства 2° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что величина $\nu_{s,k-1}$ не превышает 1. Значит,

$$\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^k}\right) \le \frac{2^k}{(k-1)! \cdot (2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}} \le \frac{2^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

В частности, при $k = n$

$$\mathrm{mup}_s\left(-1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) \le \frac{2^n}{(n-1)! \cdot (2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Следовательно,

$$\left|ab_s(x) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{2^n}{|c_{s,n}| \cdot (n-1)! \cdot (2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}} + \frac{M_s(\rho)}{|c_{s,n}| \cdot \rho^{n-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2\rho)^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}} \le$$

$$\le \frac{n}{|c_{s,n}| \cdot \rho^n} + \frac{M_s(\rho)}{|c_{s,n}| \cdot \rho^{n-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2\rho)^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

Обозначим $f(k) = \frac{(2\rho)^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}$. Максимум функции $f(k)$ достигается при $k = -\frac{1}{2} + \frac{\ln 2\rho}{\ln 2s}$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(2\rho)^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}} \le f\left(-\frac{1}{2} + \frac{\ln 2\rho}{\ln 2s}\right) \cdot n$, из чего получаем оценку

$$\left|ab_s(x) - \frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{c_1(\rho, s) \cdot n \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

где $c_1(\rho, s) = \frac{1 + M_s(\rho) \cdot f\left(-\frac{1}{2} + \frac{\ln 2\rho}{\ln 2s}\right) \cdot \rho}{|d_s|}$.

Аналогичным образом можно доказать, что для любого $x \in \left[-1; -\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$ справедливо неравенство

$$\left|ab_s(x) - \frac{1}{b_{s,n}} \cdot \widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)\right| \le \frac{n \cdot c_2(s, \rho) \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого натурального n и любого $x \in \left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}; 0\right]$ справедливы оценки*

$$\left|\frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{c_3(\rho, s) \cdot 2^n \cdot |\lambda_s|^n}{n! \cdot s^n \cdot (2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

$$\left|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)\right|\leq\frac{c_4(\rho,s)\cdot 2^n\cdot|\lambda_s|^n}{n!\cdot s^n\cdot(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

$$|ab_s(x)|\leq\frac{c(s)}{(2s)^{3n}},$$

где $s\geq 2$ *и* $\rho\in\left[3s^2,4s^2\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения первой оценки воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме: $\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int\limits_0^x(x-t)^{n-1}\cdot\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(n)}(t)dt$.

Из леммы 1 следует, что $\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(k)}(0)=0$ при $k<n$. Поэтому

$$\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int\limits_0^x(x-t)^{n-1}\cdot\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(n)}(t)dt.$$

Исходя из (7), имеем $|x_{s,k}|\leq\left|\frac{d_s}{\lambda_s^{k+1}}\right|+\frac{M_s(\rho)}{\rho^k}$. Тогда, учитывая то, что $\lambda_s<-1$ (это следует из теоремы 4), получаем $1+|x_{s,0}|+|x_{s,1}|+\ldots+|x_{s,n-1}|\leq 1+\left|\frac{d_s}{\lambda_s}\right|\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_s|^k}+M_s(\rho)\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^k}=$ $=1+\frac{|d_s|}{|\lambda_s|-1}+\frac{M_s(\rho)\cdot\rho}{\rho-1}=C_0(s,\rho)$.

Значит, $\left|\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(n)}(x)\right|\leq\left|\operatorname{mup}_s^{(n)}\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)+\sum\limits_{j=0}^{n-1}x_{s,n-j-1}\cdot\operatorname{mup}_s^{(n)}\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right)\right|\leq$ $\leq\left\|\operatorname{mup}_s^{(n)}\right\|_C\cdot(1+|x_{s,0}|+|x_{s,1}|+\ldots+|x_{s,n-1}|)\leq C_0(s,\rho)\cdot\left\|\operatorname{mup}_s^{(n)}\right\|_C$, откуда с учетом свойства 2° функции $\operatorname{mup}_s(x)$ следует справедливость оценки

$$\left|\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(n)}(x)\right|\leq C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Тогда

$$|\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)|\leq\frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}\cdot\int\limits_x^0(t-x)^{n-1}dt=\frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}\cdot\frac{(-x)^n}{n}\leq$$

$$\leq\frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\cdot\frac{1}{s^n\cdot(2s)^{n^2}}=\frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n}{n!\cdot s^n\cdot(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}},$$

откуда следует справедливость неравенства

$$\left|\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\widehat{\varphi}_{s,n,0}(x)\right|\leq\frac{c_3(\rho,s)\cdot 2^n\cdot|\lambda_s|^n}{n!\cdot s^n\cdot(2s)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

для любого $x\in\left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n};0\right]$.

Итак, первая оценка получена.

Аналогичным образом можно установить справедливость второй оценки.

Приступим к доказательству третьей оценки. Для этого представим функцию $ab_s(x)$ в следующем виде: $ab_s(x)=\operatorname{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s}\right)+\lambda_s\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_s^{k-1}\cdot\operatorname{mup}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)$.

Продифференцируем функцию $ab_s(x)$. Из свойства 5° функции $\operatorname{mup}_s(x)$ следует, что $\operatorname{mup}_s'\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right)=2\cdot\sum\limits_{j=1}^{2s}\delta_{s,1,j}\cdot\operatorname{mup}_s\left(2sx-2j+1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{k-1}}\right)$. Так как $x\in\left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n},0\right]$, то при $j > 1$ точка $2sx - 2j + 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^{k-1}}$ будет лежать вне интервала $(-1,1)$, тогда в силу свойства 1° следует, что $\mathrm{mup}_s'\left(x - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^k}\right) = 2\cdot \mathrm{mup}_s\left(2sx - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^{k-1}}\right)$. Значит, производная функции $ab_s(x)$ может быть найдена по формуле

$$ab_s'(x) = \mathrm{mup}_s'\left(x - 1 + \frac{1}{s}\right) + 2\cdot\lambda_s\cdot ab_s(2sx).$$

Далее

$$ab_s''(x) = \mathrm{mup}_s''\left(x - 1 + \frac{1}{s}\right) + 2\cdot 2s\cdot\lambda_s\cdot \mathrm{mup}_s'\left(2sx - 1 + \frac{1}{s}\right) + (2s)^2\cdot\lambda_s^2\cdot ab_s\left((2s)^2 x\right)$$

и

$$ab_s'''(x) = \mathrm{mup}_s'''\left(x - 1 + \frac{1}{s}\right) + 2\cdot(2s)^2\cdot\lambda_s\cdot \mathrm{mup}_s''\left(2sx - 1 + \frac{1}{s}\right) +$$

$$+(2s)^3\cdot\lambda_s^2\cdot \mathrm{mup}_s'\left((2s)^2x - 1 + \frac{1}{s}\right) + 2\cdot(2s)^3\cdot\lambda_s^3\cdot ab_s\left((2s)^3\cdot x\right).$$

Так как λ_s является корнем функции $\Phi_s(z)$, то $ab_s(\lambda_s) = \Phi_s(\lambda_s) = 0$. Кроме того, из свойства 6° следует, что $\mathrm{mup}_s'\left(-1+\frac{1}{s}\right) = \mathrm{mup}_s''\left(-1+\frac{1}{s}\right) = \mathrm{mup}_s'''\left(-1+\frac{1}{s}\right) = 0$.

Значит, $ab_s'(0) = ab_s''(0) = ab_s'''(0) = 0$, и формула Тейлора с остатком в интегральной форме дает равенство $ab_s(x) = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^x ab'''(t)(x-t)^2dt$. Полагая $\widehat{c}(s) = \max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n};0\right]} |ab_s'''(x)|$, получаем $|ab_s(x)| \le \frac{\widehat{c}(s)}{2}\cdot\int\limits_x^0(x-t)^2dt = -\widetilde{c}(s)\cdot x^3 \le \frac{c(s)}{(2s)^{3n}}$ при $x\in\left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n};0\right]$.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о. теоремы 5. Следствием лемм 3 и 4 являются неравенства

$$\left\|\frac{1}{c_{s,2n}}\cdot\widehat{\varphi}_{s,2n,0}(x) - \Phi_{s,0,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_1(s,\rho)\cdot\frac{2n\cdot|\lambda_s|^{2n}}{\rho^{2n}},$$

$$\left\|\frac{1}{c_{s,2n-1}}\cdot\widehat{\varphi}_{s,2n-1,0}(x) - \Phi_{s,1,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_2(s,\rho)\cdot\frac{(2n-1)\cdot|\lambda_s|^{2n-1}}{\rho^{2n-1}}$$

и

$$\left\|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s(2s)^n-1}(x) - \Psi_{s,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_3(s,\rho)\cdot\frac{n\cdot|\lambda_s|^{n}}{\rho^{n}}$$

для любого $x\in[-1,1]$ и любого $\rho\in\left[3s^2,4s^2\right)$. Тогда в силу теоремы 1 следует справедливость оценок (9), (10) и (11). Так как $|\lambda_s| < 3s^2$ (по теореме 4), то при $n\to\infty$ правые части неравенств (9)–(11) стремятся к нулю, что обеспечивает равномерную сходимость функций $\frac{2^{2n}\cdot(2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}}\cdot\varphi_{s,2n,0}(x)$, $\frac{2^{2n-1}\cdot(2s)^{(2n-1)(n-1)}}{c_{s,2n-1}}\cdot\varphi_{s,2n-1,0}(x)$ и $\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,s(2s)^n-1}(x)$ соответственно к $\Phi_{s,0,0}(x)$, $\Phi_{s,1,0}(x)$ и $\Psi_{s,0}(x)$ на отрезке $[-1,1]$ при $n\to\infty$.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Для любого $s = 2,3,4,\ldots$ и любого натурального числа i функции*

$$\frac{2^{2n}\cdot(2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}}\cdot\varphi^{(i)}_{s,2n,0}(x),\ \ \frac{2^{2n-1}\cdot(2s)^{(2n-1)(n-1)}}{c_{s,2n-1}}\cdot\varphi^{(i)}_{s,2n-1,0}(x),\ \ \frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi^{(i)}_{s,n,s(2s)^n-1}(x)$$

при $n\to\infty$ сходятся равномерно на отрезке $[-1;1]$ соответственно к $\Phi^{(i)}_{s,0,0}(x)$, $\Phi^{(i)}_{s,1,0}(x)$ и $\Psi^{(i)}_{s,0}(x)$, при этом для любого $\rho\in\left[3s^2,4s^2\right)$ выполняются такие оценки:

$$\left\|\frac{2^{2n}\cdot(2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}}\cdot\varphi^{(i)}_{s,2n,0}(x) - \Phi^{(i)}_{s,0,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(2n-i)\cdot|\lambda_s|^{2n}}{\rho^{2n}}\ \ \textit{при } i<2n,$$

$$\left\|\frac{2^{2n-1}\cdot(2s)^{(2n-1)(n-1)}}{c_{s,2n-1}}\cdot\varphi^{(i)}_{s,2n-1,0}(x)-\Phi^{(i)}_{s,1,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}}\leq M_2(s,\rho,i)\cdot\frac{(2n-1-i)\cdot|\lambda_s|^{2n-1}}{\rho^{2n-1}}$$

при $i<2n-1$,

$$\left\|\frac{2^{n}\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi^{(i)}_{s,n,s(2s)^n-1}(x)-\Psi^{(i)}_{s,0}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}}\leq M_3(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^{n}}{\rho^{n}}\ \text{при}\ i<n.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5 с тем отличием, что вместо лемм 3, 4 используются следующие два утверждения.

Лемма 5. *Для любых натуральных* i,n *и любого* $x\in\left[-1,-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$ *при* $i<n$ *справедливы следующие оценки:*

$$\left|ab^{(i)}_s(x)-\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x)\right|\leq c_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

$$\left|ab^{(i)}_s(x)-\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}^{(i)}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)\right|\leq c_2(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

где $s\geq 2$ *и* $\rho\in\left[3s^2,4s^2\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i,n\in N$, $i<n$ и $x\in\left[-1,-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$.

Используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3, получаем

$$\left|ab^{(i)}_s(x)-\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x)\right|\leq\left|\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{|c_{s,n}|}\cdot\left|\sum_{m=0}^{n-1}v_{s,m}\cdot\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right)\right|\leq\left|\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{|c_{s,n}|}\cdot\sum_{m=0}^{n-i-1}\left|v_{s,m}\cdot\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{|c_{s,n}|}\cdot\sum_{m=n-i}^{n-1}\left|v_{s,m}\cdot\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right)\right|=A_0+A_1+A_2.$$

Оценим каждую из величин A_0,A_1 и A_2.

Из свойства 5° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что

$$\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{(2s)^i}\delta_{s,i,k}\cdot\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x+\frac{1}{(2s)^{n-i}}-2k+1\right).$$

Так как при $i<n$, $k>1$ и $x\in\left[-1,-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$ точка $(2s)^i\cdot x+\frac{1}{(2s)^{n-i}}-2k+1$ лежит вне интервала $(-1,1)$, то учитывая свойства 1° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ получаем $\mathrm{mup}^{(i)}_s\left(x-1+\frac{1}{(2s)^n}\right)=$ $=2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x-1+\frac{1}{(2s)^{n-i}}\right)$ (здесь мы воспользовались тем, что $\delta_{s,i,1}=1$). Поскольку функция $\mathrm{mup}_s(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[-1,0]$, то

$$\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x-1+\frac{1}{(2s)^{n-i}}\right)\leq\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-i}}\right),$$

откуда учитывая свойства 7° и оценки $\nu_{s,n-i-1} \le 1$ следует

$$A_0 \le m_0(s,\rho,i) \cdot \frac{2^n \cdot |\lambda_s|^n}{(n-i)! \cdot (2s)^{\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}}}. \qquad (12)$$

Далее оценим величину A_1. Используя свойство 5° функции $\mathrm{mup}_s(x)$, получаем равенство
$\mathrm{mup}_s^{(i)}\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right) = 2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot\sum\limits_{j=1}^{(2s)^i}\delta_{s,i,j}\cdot\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x+\frac{(2s)^i}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}-2k+1\right).$
Поскольку $m \le n-i-1$ и $x\in\left[-1;-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}\right]$, то при $j>1$ точка $(2s)^i\cdot x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-i-m-1}}$ лежит вне интервала $(-1,1)$, из чего вместе со свойством 1° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что $\mathrm{mup}_s^{(i)}\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right) = 2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-i-m-1}}\right)$. В силу того, что на промежутке $[-1,0]$ функция $\mathrm{mup}_s(x)$ монотонно возрастает, справедливы неравенства $\mathrm{mup}_s\left((2s)^i\cdot x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-i-m-1}}\right)\le\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-i-m-1}}\right)\le\mathrm{mup}_s\left(-1+\frac{1}{(2s)^{n-m-i-1}}\right)$. Из них, свойства 7° и оценки $\nu_{s,n-i-1}\le 1$ следует, что

$$\mathrm{mup}_s^{(i)}\left(x-1+\frac{1}{s\cdot(2s)^{n-m-1}}\right)\le\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot 2^{n-i-m-1}}{(2s)^{\frac{(n-i-m-1)(n-i-m)}{2}}}.$$

С учетом последнего неравенства и (7) получаем

$$A_1 \le \frac{1}{|c_{s,n}|}\cdot\left|\sum_{m=0}^{n-i-1}\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot 2^{n-i-m-1}}{(2s)^{\frac{(n-i-m-1)(n-m-i)}{2}}}\cdot v_{s,m}\right|\le\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot M_s(\rho)}{|c_{s,n}|}\times$$

$$\times\left|\sum_{m=0}^{n-i-1}\frac{2^{n-i-m-1}}{\rho^m\cdot(2s)^{\frac{(n-i-m-1)(n-i-m)}{2}}}\right| = \frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot M_s(\rho)}{|c_{s,n}|}\cdot\sum_{k=0}^{n-i-1}\frac{2^k}{\rho^{n-i-k-1}\cdot(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}\le$$

$$\le\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot M_s(\rho)\cdot\rho^{i+1}}{|c_{s,n}|\cdot\rho^n}\cdot\sum_{k=0}^{n-i-1}\frac{2^k\cdot\rho^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}\le m_1(s,\rho,i)\cdot\frac{|\lambda_s|^n\cdot(n-i)}{\rho^n},$$

где $m_1(s,\rho,i)=\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot M_s(\rho)\cdot\rho^{i+1}\cdot B}{|d_s|}$ и $B=\max\limits_k\frac{2^k\cdot\rho^k}{(2s)^{\frac{k(k+1)}{2}}}$. Следовательно,

$$A_1\le m_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n}. \qquad (13)$$

Из свойства 2° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ и оценки (7) следует

$$A_2\le\frac{1}{|c_{s,n}|}\cdot\sum_{m=n-i}^{n-1}\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot M_s(\rho)}{\rho^m}\le\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot i\cdot M_s(\rho)}{|c_{s,n}|\cdot\rho^{n-i}}=m_2(s,\rho,i)\cdot\frac{|\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

где $m_2(s,\rho,i)=\frac{2^i\cdot(2s)^{\frac{i(i-1)}{2}}\cdot i\cdot M_s(\rho)\cdot\rho^i}{|d_s|}$. Из последнего неравенства вместе с оценками (12) и (13) следует, что

$$\left|ab_s^{(i)}(x)-\frac{1}{c_{s,n}}\cdot\widehat{\varphi}_{s,n,0}^{(i)}(x)\right|\le c_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n}.$$

Итак, справедливость первой оценки установлена.

Аналогичным образом можно доказать справедливость второй оценки.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* $i, n \in N$ *и всякого* $x \in \left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n}; 0\right]$ *при* $i < n$ *выполняются следующие оценки:*

$$\left|\frac{1}{c_{s,n}} \cdot \widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{M_0(s,\rho,i)\cdot|\lambda_s|^n\cdot 2^n}{(n-i)!\cdot s^n\cdot(2s)^{\frac{n(n+1-2i)}{2}}},$$

$$\left|\frac{1}{b_{s,n}} \cdot \widehat{\psi}^{(i)}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)\right| \le \frac{M_1(s,\rho,i)\cdot|\lambda_s|^n\cdot 2^n}{(n-i)!\cdot s^n\cdot(2s)^{\frac{n(n+1-2i)}{2}}},$$

$$\left|ab^{(i)}_s(x)\right| \le \frac{M_2(s,i)}{(2s)^{3n}},$$

где $s \ge 2$ *и* $\rho \in \left[3s^2, 4s^2\right)$.

Доказательство. Чтобы доказать первую оценку, разложим функцию $\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x)$ по формуле Тейлора до $(n-(i+1))$-го порядка:

$$\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \frac{\widehat{\varphi}^{(i+j)}_{s,n,0}(0)}{j!}\cdot x^j + \frac{1}{(n-i-1)!}\cdot\int\limits_0^x (x-t)^{n-i-1}\cdot\widehat{\varphi}^{(n)}_{s,n,0}(t)dt.$$

Из леммы 1 следует, что $\widehat{\varphi}^{(k)}_{s,n,0}(0) = 0$ при $k < n$. Поэтому

$$\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x) = \frac{1}{(n-i-1)!}\cdot\int\limits_0^x (x-t)^{n-i-1}\cdot\widehat{\varphi}^{(n)}_{s,n,0}(t)dt.$$

При доказательстве леммы 4 было установлено, что $\left|\widehat{\varphi}^{(n)}_{s,n,0}(x)\right| \le C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где $C_0(s,\rho) = 1 + \frac{|d_s|}{|\lambda_s|-1} + \frac{\rho\cdot M_s(\rho)}{\rho-1}$.

Значит,

$$\left|\widehat{\varphi}^{(i)}_{s,n,0}(x)\right| \le \frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-i-1)!}\cdot\frac{(-x)^{n-i}}{n-i} \le$$

$$\le \frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-i)!}\cdot\frac{1}{s^{n-i}\cdot(2s)^{n\cdot(n-i)}} = \frac{C_0(s,\rho)\cdot 2^n\cdot s^i}{(n-i)!\cdot(2s)^{\frac{n(n+1-2i)}{2}}},$$

из чего и следует справедливость первой оценки.

Аналогичным образом можно доказать вторую оценку.

Для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняется равенство $ab^{(k)}_s(0) = 0$ (это можно установить тем же способом, что и в лемме 4). Значит, разложив $ab^{(i)}_s(x)$ по формуле Тейлора до 2-го порядка, получаем $ab^{(i)}_s(x) = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^x (x-t)^2\cdot ab^{(i+3)}_s(t)dt$, откуда с использованием обозначения $c(s,i) = \max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{s\cdot(2s)^n};0\right]} |ab_s(x)|$ получаем $|ab_s(x)| \le \frac{c(s,i)}{6}\cdot(-x)^3 \le \frac{M_2(s,i)}{(2s)^{3n}}$, где справедливость последнего перехода следует из того, что $(-x) \le \frac{1}{s\cdot(2s)^n}$.

Лемма доказана.

Теперь, когда поведение базисных функций $\varphi_{s,n,0}(x)$ и $\psi_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(x)$ при $n\to\infty$ изучено, мы можем исследовать поведение остальных базисных функций. Для этого введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Psi_{s,1}(x) = \Psi_{s,0}(-x-1),\ \Psi_{s,2}(x) = \Psi_{s,0}(-x),$$

$$\Phi_{s,i,\frac{h}{s(2s)^q}}(x) = \Phi_{s,i,0}\left(x - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) - \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \sum_{j\in N_{s,l}} \Phi_{s,i,0}^{(l)}\left(x_{s,l,j} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right)\cdot\widehat{\varphi}_{s,l,j}(x) -$$

$$-\sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \sum_{p\in D_{s,l}} \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}}\left(\Phi_{s,i,0}^{(l)}; x^*_{s,l,p} - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right)\cdot\widehat{\psi}_{s,l,p}(x)$$

и

$$\Omega_{s,\frac{h}{s(2s)^q}}(x) = \Psi_{s,1}\left(x - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right) - \sum_{l=0}^{q} \frac{\sum\limits_{k\in N_{s,l}} \Psi_{s,1}^{(l)}\left(x_{s,l,k} - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right)\cdot\widehat{\varphi}_{s,l,k}(x)}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} -$$

$$-\sum_{l=0}^{q} \frac{1}{2^l\cdot(2s)^{\frac{l(l-1)}{2}}} \cdot \sum_{p\in D_{s,l}} \triangle^2_{\frac{1}{s\cdot(2s)^l}}\left(\Psi_{s,1}^{(l)}; x^*_{s,l,p} - 1 - \frac{h}{s\cdot(2s)^q}\right)\cdot\widehat{\psi}_{s,l,p}(x).$$

Теорема 7. *Для любого $s = 2, 3, 4, \ldots$ и любого целого неотрицательного числа i функции $\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}^{(i)}(x)$ при $n\to\infty$ сходятся равномерно на отрезке $[-1;1]$ к $\Psi_{s,1}^{(i)}(x)$, при этом для любого $\rho\in\left[3s^2, 4s^2\right)$ и любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ справедлива оценка*

$$\left\|\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}^{(i)}(x) - \Psi_{s,1}^{(i)}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n}.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\widehat{\psi}_{s,n,1}(x) \equiv \frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}(x)$. Так как по построению $\Psi_{s,1}(x) = \Psi_{s,0}(-x-1)$ и $\widehat{\psi}_{s,n,1}(x) = \widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(-x-1)$, то $\left\|\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}^{(i)}(x) - \Psi_{s,1}^{(i)}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} = \left\|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}^{(i)}(-x-1) - \Psi_{s,0}^{(i)}(-x-1)\right\|_{C_{[-1,1]}} =$ $= \max\limits_{t\in[-2,0]}\left|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}^{(i)}(t) - \Psi_{s,0}^{(i)}(t)\right|$.

Из свойства 1° функции $\mathrm{mup}_s(x)$ следует, что при $t < -1$ имеют место равенства $\mathrm{mup}_s\left(t - 1 + \frac{1}{(2s)^n}\right) = 0$ и $\mathrm{mup}_s\left(t - 1 + \frac{1}{s\cdot(2s)^j}\right) = 0$ для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$. Значит, на промежутке $[-2,-1)$ функции $\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}(t)$ и $\Psi_{s,0}(t)$ тождественно равны нулю. Поэтому $\max\limits_{t\in[-2,0]}\left|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}^{(i)}(t) - \Psi_{s,0}^{(i)}(t)\right| = \max\limits_{t\in[-1,0]}\left|\frac{1}{b_{s,n}}\cdot\widehat{\psi}_{s,n,s\cdot(2s)^n-1}^{(i)}(t) - \Psi_{s,0}^{(i)}(t)\right|$. Из этого, используя теоремы 5 и 6, следует, что для любого $\rho\in\left[3s^2, 4s^2\right)$ и любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}^{(i)}(x) - \Psi_{s,1}^{(i)}(x)\right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_1(s,\rho,i)\cdot\frac{(n-i)\cdot|\lambda_s|^n}{\rho^n},$$

причем правая часть этого неравенства при $n\to\infty$ стремится к нулю. Последнее является результатом того, что $\rho\ge 3s^2$ и $|\lambda_s| < 3s^2$ (теорема 4).

Таким образом, для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ функции $\frac{2^n\cdot(2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}}\cdot\psi_{s,n,1}^{(i)}(x)$ при $n\to\infty$ сходятся равномерно на отрезке $[-1;1]$ к $\Psi_{s,1}^{(i)}(x)$.

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Для любого* $s = 2, 3, 4, \dots$ *и любого* $i = 0, 1, 2, \dots$ *функции* $\frac{2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}} \times$ $\times \psi^{(i)}_{s,n,s(2s)^n+1}(x)$ *при* $n \to \infty$ *сходятся равномерно на отрезке* $[-1; 1]$ *к* $\Psi^{(i)}_{s,2}(x)$, *при этом для любого* $\rho \in \left[3s^2, 4s^2\right)$ *и любого* $i = 0, 1, \dots, n-1$ *справедлива оценка*

$$\left\| \frac{2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}} \cdot \psi^{(i)}_{s,n,s(2s)^n+1}(x) - \Psi^{(i)}_{s,2}(x) \right\|_{C_{[-1,1]}} \le M_2(s, \rho, i) \cdot \frac{(n-i) \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n}.$$

Следствием теорем 1 – 7 является теорема 9.

Теорема 9. *Пусть* $s = 2, 3, 4, \dots$ *и* $x^* = \frac{h}{s \cdot (2s)^q} \in [-1, 1]$, *где* $h \ne 0(\mod 2s)$. *Тогда:*

— *если* $\frac{k}{s \cdot (2s)^{2n-1}} = x^*$ *и* $2n - 1 \ge q$, *то*

$$\frac{2^{2n} \cdot (2s)^{n(2n-1)}}{c_{s,2n}} \cdot \varphi_{s,2n,k}(x) = \Phi_{s,0,\frac{h}{s(2s)^q}}(x) + R_{s,2n,q}(x),$$

— *если* $\frac{k}{s \cdot (2s)^{2n-2}} = x^*$ *и* $2n - 2 \ge q$, *то*

$$\frac{2^{2n-1} \cdot (2s)^{(n-1)(2n-1)}}{c_{s,2n-1}} \cdot \varphi_{s,2n-1,k}(x) = \Phi_{s,1,\frac{h}{s(2s)^q}}(x) + R_{s,2n-1,q}(x),$$

— *если* $-1 + \frac{s \cdot j + 1}{s \cdot (2s)^n} = x^* + \frac{1}{s \cdot (2s)^n}$ *и* $n - 1 \ge q$, *то*

$$\frac{2^n \cdot (2s)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{b_{s,n}} \cdot \psi_{s,n,s \cdot j+1}(x) = \Omega_{s,\frac{h}{s(2s)^q}}(x) + r_{s,n,q}(x),$$

где $c_{s,n} = -\frac{d_s}{\lambda_s^n}$, $b_{s,n} = -\frac{\ell_s}{\lambda_s^n}$, *причем для остатков* $R_{s,n,q}(x)$ *и* $r_{s,n,q}(x)$ *справедливы оценки*

$$|R_{s,n,q}(x)| \le M_1(s, \rho, q) \cdot \frac{n \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n} \text{ и } |r_{s,n,q}(x)| \le M_2(s, \rho, q) \cdot \frac{n \cdot |\lambda_s|^n}{\rho^n}$$

для любого $\rho \in \left[3s^2, 4s^2\right)$.

Список литературы

[1] В. А. Рвачев, "Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций", *Матем. методы анализа динамических систем*, **6**, (1982), 99–102.

[2] В. А. Рвачев, "Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения", *УМН*, **45**:1 (271), (1990), 77–103.

[3] В. Л. Рвачев, В. А. Рвачев, "Об одной финитной функции", *Докл. АН УССР, сер. А*, **8**, (1971), 705–707.

[4] В. А. Рвачев, Г. А. Старец, "Некоторые атомарные функции и их применение", *Докл. АН УССР, сер. А.*, **11**, (1983), 22–24.

[5] В. М. Кузниченко, "Обобщенные ряды Тейлора для класса функций $H(\overline{\rho}, \overline{m}, r)$", *Матем. заметки*, **46**:4, (1989), 120–122.

[6] *Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики*, Наукова думка, К., 1986.

[7] Т. В. Рвачева, "Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора", *Докл. НАН Украины*, **5**, (2003), 37–41.

[8] Т. В. Рвачева, "Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора", *Вестник Харьковского национального ун-та, Серия "Математика, прикладная математика и механика"*, **602**, (2003), 94–104.

[9] Г. А. Старец, "Сходимость обобщенных рядов Тейлора классов $H_{\rho,m}$", *Матем. методы анализа динамических систем*, **9**, (1985), 37–39.

[10] Г. А. Старец, “Построение базисных функций для обобщенных рядов Тейлора”, *Матем. методы анализа динамических систем*, **8**, (1984), 16–19.

[11] Е. П. Томилова, “Применение обобщенных рядов Тейлора для решения некоторых дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. методы анализа динамических систем*, **8**, (1984), 33–35.

[12] И. И. Малицкий, “Применение обобщенных рядов Тейлора в теории дифференциально-функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом”, *Докл. АН УССР, сер. А*, **10**, (1985), 17–18.

[13] Г. А. Старец, *Один класс атомарных функций и его применение*, дисс. ... канд. физ.-мат. наук, ХГУ, Харьков, 1985.

[14] В. А. Макаричев, “О базисных функциях обобщенного ряда Тейлора”, *Радиоэлектронные и компьютерные системы*, **3(44)**, (2010), 27–37, http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Rks/index.html.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 17 января 2011 г.

Makarichev V. A. On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series for some classes of infinitely differentiable functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 56–75.

ABSTRACT

The existence of the asymptotics of the basic functions $\varphi_{s,n,k}(x)$ and $\psi_{s,n,p}(x)$ of a generalized Taylor series for nonquasianalytic function class $H_{\rho,2}$ is proved. The first term of the asymptotic expansions of these functions is obtained.

Key words: *nonquasianalytic class, generalized Taylor series, basic functions, atomic function.*