ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 1. С. 93–98

УДК 511.37+511.336
MSC2000 11L05,(11Y16, 11A05,11A55,11J70)

© А. В. Устинов[1]

О статистиках Гаусса — Кузьмина в коротких интервалах

В статье исследуются статистики Гаусса — Кузьмина для рациональных чисел a/b, где b фиксировано, $1 \leqslant a \leqslant b$, $(a,b)=1$. Для среднего значения статистик Гаусса — Кузьмина доказывается асимптотическая формула, уточняющая ранее известный результат, аналогичный теореме Портера.

Ключевые слова: *алгоритм Евклида, цепные дроби, суммы Клостермана, статистики Гаусса — Кузьмина.*

1. Введение

Важными характеристиками рационального числа, записанного в виде конечной цепной дроби

$$\frac{a}{b} = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \ddots + \cfrac{1}{t_s + \cfrac{1}{1}}} = [t_0; t_1, \ldots, t_s, 1]$$

(t_0 — целое, $t_1, \ldots, t_s$ — натуральные), являются статистики Гаусса — Кузьмина, которые для действительного $x \in [0,1]$ задаются равенством

$$s_x(a/b) = \#\{j : 0 \leqslant j \leqslant s, [0; t_{j+1}, \ldots, t_s, 1] \leqslant x\}.$$

Например, через статистики Гаусса — Кузьмина выражается длина различных вариантов алгоритма Евклида, примененного к паре чисел (a,b) (см. [5, 6]). К статистическим свойствам конечных цепных дробей сводится задача Синая о траекториях частиц в двумерной кристаллической решетке (см. [2]) и исследование статистических свойств чисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [7]).

Для среднего значения статистик Гаусса — Кузьмина известна асимптотическая формула (см. [4]), обобщающая результат Портера [11]:

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^{b}{}^{*} s_x(a/b) = \frac{2\log b}{\zeta(2)} \log(1+x) + C_P(x) + O_{\varepsilon,x}(b^{-1/6+\varepsilon} b), \tag{1}$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `ustinov.alexey@gmail.com`

где

$$C_P(x) = \frac{2\log(1+x)}{\zeta(2)}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} + \log x - 1\right) + \\ + \frac{2}{\zeta(2)}(h_1(x)+h_2(x)) + \frac{x^2}{x+1},$$

а функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ задаются абсолютно сходящимися сингулярными рядами (первая из них известна как функция Лохса, см. [9, 10])

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right), \quad h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n}\frac{1}{m} - \log(1+x)\right).$$

При этом оценка остаточного члена становится равномерной по x в предположении, что $x \in [c,1]$ для некоторого фиксированного $c > 0$.

Рассмотрим статистики, которые отвечают за попадание в более узкие интервалы

$$s_{\alpha,\beta}(a/b) = s_\beta(a/b) - s_\alpha(a/b) \qquad (0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1).$$

Тогда при $0 < c \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ для суммы

$$\Psi^*_{\alpha,\beta}(b) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_{\alpha,\beta}(a/b)$$

из формулы (1), очевидно, следует равенство

$$\frac{\Psi^*_{\alpha,\beta}(b)}{\varphi(b)} = \frac{2\log b}{\zeta(2)}\log\frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_{\varepsilon,c}(b^{-1/6+\varepsilon}).$$

Оказывается, что если разность $\beta - \alpha$ достаточно мала, то остаточный член в последнем равенстве допускает уточнение.

Теорема. *Пусть $b \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, $\Delta = \beta - \alpha$. Тогда*

$$\frac{\Psi^*_{\alpha,\beta}(b)}{\varphi(b)} = \frac{2\log b}{\zeta(2)}\log\frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_\varepsilon(R(b;\alpha,\beta)b^\varepsilon),$$

где

$$R(b;\alpha,\beta) = b^{-1/6}\Delta^{1/2}\beta^{1/2} + b^{-1/4}(\Delta^{-5/4}\beta^{5/2} + \Delta^{5/4}\alpha^{-3/2}\beta^{-5/2}).$$

Применение этой теоремы позволяет подсчитывать статистики Гаусса — Кузьмина в коротких интервалах (и частоту появления больших неполных частных) с точностью большей, чем в формуле (1).

Следствие 1. *Пусть $b \geqslant 1$, $0 < c \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, $\Delta = \beta - \alpha$, $b^{-1/15+\varepsilon_0} \ll \Delta \ll b^{-\varepsilon_0}$ $(0 < \varepsilon_0 < 1/30)$. Тогда*

$$\frac{\Psi^*_{\alpha,\beta}(b)}{\varphi(b)} = \frac{2\log b}{\zeta(2)}\log\frac{1+\beta}{1+\alpha} + C_P(\beta) - C_P(\alpha) + O_{\varepsilon,c}(b^{-1/6+\varepsilon}\Delta^{1/2} + b^{-1/4+\varepsilon}\Delta^{-5/4}).$$

Следствие 2. *Пусть $b \geqslant 1$. Тогда для N_k — количества появлений неполного частного k в разложении чисел a/b $(1 \leqslant a \leqslant b,\ (a,b)=1)$ в цепные дроби — справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{N_k}{\varphi(b)} = \frac{2\log b}{\zeta(2)}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) + C_P\left(\frac{1}{k}\right) - C_P\left(\frac{1}{k+1}\right) + O_\varepsilon(b^{-1/6+\varepsilon}k^{-3/2} + b^{-1/4+\varepsilon}k^{3/2}),$$

которая уточняет равенство (1) при $b^{\varepsilon_0} \ll k \ll b^{1/18-\varepsilon_0}$ $(0 < \varepsilon_0 < 1/36)$.

2. Следствия из оценок сумм Клостермана

Пусть q — натуральное число, a — целое число и f — неотрицательная функция. Обозначим через $T[f]$ число решений сравнения $xy \equiv a \pmod q$, лежащих в области $P_1 < x \leqslant P_2$, $0 < y \leqslant f(x)$:

$$T[f] = \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \sum_{0 < y \leqslant f(x)} \delta_q(xy - a).$$

Здесь и далее $\delta_q(n)$ — характеристическая функция делимости на q:

$$\delta_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod q, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Как показано в статье Быковского [1], вычисление $T[f]$ сводится к нахождению суммы

$$S[f] = \frac{1}{q} \sum_{P_1 < x \leqslant P_2} \mu_{q,a}(x) f(x), \tag{2}$$

где $\mu_{q,a}(x)$ — число решений сравнения $xy \equiv a \pmod q$ относительно переменной y, лежащей в пределах $1 \leqslant y \leqslant q$.

Приведем упрощенный результат работы [4] (уточняющий теорему 1 из [1]). Он основан на оценках сумм Клостермана

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x,y=1}^{q} \delta_q(xy - l) e^{2\pi i \frac{mx+ny}{q}}$$

и методе ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм. Для них справедливо неравенство

$$|K_q(l, m, n)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot \sigma_0((l, m, n, q)) \cdot (lm, ln, mn, q)^{1/2} \cdot q^{1/2},$$

обобщающее результат Эстермана [8]

$$|K_q(\pm 1, m, n)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot (m, n, q)^{1/2} \cdot q^{1/2}.$$

Лемма. *Пусть P_1, P_2 — действительные числа, $P = P_2 - P_1 \geqslant 2$, на всем отрезке $[P_1, P_2]$ вещественная неотрицательная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для некоторых $A > 0$, $w \geqslant 1$*

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{w}{A}.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T[f] = S[f] + R[f],$$

где $S[f]$ определено равенством (2),

$$R[f] \ll_{w,\varepsilon} (PA^{-1/3} + A^{1/2} D + q^{1/2}) P^{\varepsilon} + P\delta_q(a)$$

и $D = (a, q)$.

3. Доказательства основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Будем предполагать, что $\varepsilon < 1/6$. Обозначим через $T_{\alpha,\beta}(b)$ число решений уравнения

$$m_1m_2 + n_1n_2 = b \tag{3}$$

относительно неизвестных m_1, m_2, n_1, n_2, связанных неравенствами

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad \alpha n_2 \leqslant m_2 \leqslant \beta n_2.$$

Через $T^*_{\alpha,\beta}(b)$ обозначим число решений уравнения (3), в котором

$$1 \leqslant m_1 \leqslant n_1, \qquad (m_1, n_1) = 1, \qquad \alpha n_2 \leqslant m_2 \leqslant \beta n_2.$$

Для суммы

$$\Psi_{\alpha,\beta}(b) = \sum_{a=1}^{b} s_{\alpha,\beta}(a/b)$$

справедливо равенство (см. доказательство леммы 3 в работе [3])

$$\Psi_{\alpha,\beta}(b) = 2T^*_{\alpha,\beta}(b) + b\left(\frac{\beta^2}{\beta+1} - \frac{\alpha^2}{\alpha+1}\right) + O(1). \tag{4}$$

Величины $\Psi_{\alpha,\beta}(b)$ и $T_{\alpha,\beta}(b)$ связаны с $\Psi^*_{\alpha,\beta}(b)$ и $T^*_{\alpha,\beta}(b)$ формулой обращения Мебиуса

$$\Psi^*_{\alpha,\beta}(b) = \sum_{d|b} \mu(d)\Psi_{\alpha,\beta}(b/d), \quad T^*_{\alpha,\beta}(b) = \sum_{d|b} \mu(d)T_{\alpha,\beta}(b/d). \tag{5}$$

Для вычисления $T_{\alpha,\beta}(b)$ введем параметр U предполагая, что $U \leqslant b^{1/2}$ и b/U — полуцелое число. Разобьем все решения уравнения (3) на две группы. К первой отнесем те, для которых $n_1 < U$, а ко второй — все остальные. Соответственно такому разбиению, $T_{\alpha,\beta}(b)$ представится в виде

$$T_{\alpha,\beta}(b) = T_1(b,U) + T_2(b,U). \tag{6}$$

Найдем сначала асимптотическую формулу для $T_1(b,U)$. Заметим, что при фиксированном $n_1 = q$ переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению $m_1m_2 \equiv b \pmod q$. Для известных n_1, m_1 и m_2 значение n_2 находится однозначно: $n_2 = \frac{b-m_1m_2}{q}$. Ограничения $\alpha n_2 < m_2 \leqslant \beta n_2$ равносильны неравенствам

$$\frac{\alpha b}{q+\alpha m_1} = g_q(m_1) < m_2 \leqslant \frac{\beta b}{q+\beta m_1} = f_q(m_1).$$

Таким образом, задача сводится к подсчету числа решений сравнения $m_1m_2 \equiv b \pmod q$, в котором переменные удовлетворяют ограничениям

$$0 < m_1 \leqslant q, \qquad g_q(m_1) < m_2 \leqslant f_q(m_1).$$

Применим лемму с $P_1 = 0$, $P_2 = q$, $f = f_q$. С учетом того, что

$$f''_q(m_1) \asymp \frac{\beta^3 b}{q^3}, \quad g''_q(m_1) \asymp \frac{\alpha^3 b}{q^3},$$

находим

$$T[f_q] - T[g_q] = S[f_q - g_q] + R[f_q] + R[g_q],$$

где
$$R[f_q]+R[g_q]\ll_\varepsilon (\beta b^{1/3}+q^{3/2}b^{-1/2}\alpha^{-3/2}(b,q)+q^{1/2})b^\varepsilon+q\delta_q(b).$$
Отсюда
$$T_1(b,U)=\sum_{q<U}(T[f_q]-T[g_q])=S_1(b,U)+R_1(b,U)+O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon}),\tag{7}$$
где
$$S_1(b,U)=\sum_{q<U}S[f_q-g_q]=\sum_{q<U}\frac{1}{q}\sum_{m_1\leqslant q}\mu_{q,b}(m_1)\left(f_q(m_1)-g_q(m_1)\right),$$
$$R_1(b,U)=\sum_{q<U}(R[f_q]+R[g_q])\ll_\varepsilon\left(\beta b^{1/3}U+U^{3/2}+U^{5/2}b^{-1/2}\alpha^{-3/2}\right)b^\varepsilon.\tag{8}$$

Для нахождения $T_2(b,U)$ воспользуемся тем, что при фиксированном $n_2=q$ переменные m_1 и m_2 удовлетворяют сравнению $m_1m_2\equiv b \pmod q$. Для известных $n_2=q$, m_1 и m_2 значение n_1 определяется однозначно: $n_1=\frac{b-m_1m_2}{q}$. Ограничение $\max\{m_1,U\}\leqslant n_1$ равносильно неравенству
$$m_1\leqslant\min\left\{\frac{b}{m_2+q},\ \frac{b-Uq}{m_2}\right\}=h_q(m_2).$$
Применим лемму к функции h_q на интервале $(\alpha q,\beta q]$. Тогда получим
$$T[h_q]=S[h_q]+R[h_q]+O\left(b^{1+\varepsilon}U^{-1}\right),$$
где
$$S[h_q]=\frac{1}{q}\sum_{\alpha q<m_2\leqslant\beta q}\mu_{q,b}(m_2)h_q(m_2),$$
$$R[h_q]\ll_\varepsilon\left(\Delta b^{1/3}+\Delta qU(b-Uq)^{-2/3}+q^{3/2}(b-Uq)^{-1/2}(b,q)+q^{1/2}\right)b^\varepsilon+q\delta_q(b).$$
Отсюда
$$T_2(b,U)=\sum_{q<b/U}T[h_q]=S_2(b,U)+R_2(b,U)+O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon}),\tag{9}$$
где
$$S_2(b,U)=\sum_{q<b/U}S[h_q]=\sum_{q<b/U}\frac{1}{q}\sum_{\alpha q<m_2\leqslant\beta q}\mu_{q,b}(m_1)h_q(m_1),$$
$$R_2(b,U)\ll\sum_{q<b/U}R[h_q]\ll_\varepsilon\left(b^{4/3}\Delta U^{-1}+b^2U^{-5/2}\right)b^\varepsilon.\tag{10}$$
Складывая равенства (7) и (9), с учетом оценок (8) и (10) получаем асимптотическую формулу
$$T_{\alpha,\beta}(b)=S_1(b,U)+S_2(b,U)+O_\varepsilon\left(\left(\beta b^{1/3}U+b^{4/3}\Delta U^{-1}+b^2U^{-5/2}+U^{5/2}b^{-1/2}\alpha^{-3/2}\right)b^\varepsilon\right).$$
При $U=\frac{b}{[\beta^{1/2}b^{1/2}\Delta^{-1/2}]+\frac12}$ она принимает вид
$$T_{\alpha,\beta}(b)=S_1(b,U)+S_2(b,U)+O_\varepsilon\left(\left(b^{5/6}\Delta^{1/2}\beta^{1/2}+b^{3/4}\Delta^{-5/4}\beta^{5/2}+b^{3/4}\Delta^{5/4}\alpha^{-3/2}\beta^{-5/2}\right)b^\varepsilon\right).$$
Утверждение теоремы получается подстановкой последней формулы в (4) и (5). Главный член вычисляется так же, как и в работе [4]. При этом получается остаток $O_\varepsilon(b^{1/2+\varepsilon})$, который не превосходит уже имеющегося остаточного члена.

Первое следствие непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

Для доказательства следствия 2 заметим, что $N_k=\Psi^*_{\alpha,\beta}(b)$ при $\alpha=1/(k+1)$ и $\beta=1/k$. Поэтому, подставляя эти параметры в утверждение теоремы ($\Delta=\frac{1}{k(k+1)}\asymp k^{-2}$), приходим к нужной асимптотической формуле.

Список литературы

[1] В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2), удовлетворяющих сравнению $a_1a_2 \equiv l \pmod q$”, *Записки научных семинаров ЛОМИ*, **112**, (1981), 5–25.

[2] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синая для двумерной решетки”, *Известия РАН*, **73**:4, (2009), 17—36.

[3] А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Записки научн. семин. ПОМИ*, **322**, (2005), 186–211.

[4] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5, (2008), 186–216.

[5] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка”, *Мат. заметки*, **85**:1, (2009), 153–156.

[6] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными”, *Мат. заметки*, **88**:4, (2010), 594–604.

[7] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Мат. сборник*, **200**:4, (2010), 131–160.

[8] T. Estermann, “On Kloosterman's sum”, *Mathematika*, **8**, (1961), 83–86.

[9] G. Lochs, “Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche”, *Monatsh. Math.*, **65**, (1961), 27–52.

[10] H. Petersson, “Über eine Funktion von G. Lochs und die Diskriminante der elliptischen Funktionen”, *Monatsh. Math.*, **67**, (1963), 243–258.

[11] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1, (1975), 20–28.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 01 ноября 2010 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда «Династия», фонда РФФИ, гранты № 09-01-12129офи-м, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а, проекта ДВО № 09-I-П4-03

Ustinov A. V. On Gauss — Kuz'min statistics in short intervals. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 1. P. 93–98.

ABSTRACT

The article is devoted to investigation of Gauss — Kuz'min statistics for rational numbers a/b, where b is fixed, $1 \leqslant a \leqslant b$, $(a, b) = 1$. New asymptotic formula for the mean value of Gauss — Kuz'min statistics is proved. It sharpens previous result which is similar to the Porter's theorem.

Key words: *Euclidean algorithm, continued fractions, Kloosterman sums, Gauss — Kuz'min statistics.*