УДК 519.1
MSC2010 05E45

© А. А. Айзенберг[1]

Связь инвариантов Бухштабера и обобщённых хроматических чисел

Пусть K — комбинаторный симплициальный комплекс. В работе исследуются $s(K)$ и $s_{\mathbb{R}}(K)$ — комплексное и вещественное числа Бухштабера, являющиеся комбинаторными инвариантами комплекса K. При изучении этих чисел важную роль играет понятие характеристической функции, которое можно рассматривать как аналог правильной раскраски в теории графов. Эта аналогия позволяет доказать оценки, связывающие числа Бухштабера с хроматическим числом. Показано, что вещественное и комплексное числа Бухштабера являются различными инвариантами на классе симплициальных комплексов. Также приведен пример симплициальных комплексов K и L таких, что $s(K * L) \neq s(K) + s(L)$. Сходство вещественного числа Бухштабера и хроматического числа позволило определить характеристический многочлен симплициального комплекса. Этот многочлен принимает значения, равные количеству вещественных характеристических функций и обладает свойствами, аналогичными свойствам классического хроматического многочлена графа.

Основные результаты статьи доложены на секционном докладе Международной конференции «Торическая топология и автоморфные функции» (5-10 сентября 2011 г., г. Хабаровск, Россия).

Ключевые слова: *симплициальный комплекс, инвариант Бухштабера, характеристическая функция, линейно-независимая раскраска, хроматическое число, хроматический многочлен, бинарный матроид.*

1. Введение

Рассмотрим топологическое пространство X с заданным на нем действием тора T^m (или группы $\mathbb{Z}_p^m$, где p — простое число). Допустим, что действие тора не является свободным. Тогда возникает вопрос: какие подгруппы $G \subset T^m$ тора (или "дискретного тора" $\mathbb{Z}_p^m$) действуют на пространстве X свободно. Величиной, измеряющей степень отклонения действия от свободного, является инвариант Бухштабера. Инвариантом Бухштабера пространства X с действием компактного или дискретного тора назовем максимальный ранг подгрупп тора T^m (или группы $\mathbb{Z}_p^m$), свободно действующих на пространстве X.

Торическая топология предоставляет широкий класс примеров пространств с несвободным действием тора. Пусть K — комбинаторный симплициальный комплекс на m вершинах. С комплексом K ассоциированы два пространства, определенные в работе [4] и впоследствии изучавшиеся в работах [2], [3]: момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ и вещественный момент-угол комплекс ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$ (см. определение 2.5). На пространстве $\mathcal{Z}_K$ определено естественное действие тора T^m, а на пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$ действует вещественный аналог тора — группа

[1]Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы, 1. Электронная почта: ayzenberga@gmail.com

$\mathbb{Z}_2^m$. Оба этих действия не являются свободными, так что определены инварианты Бухштабера пространств $\mathcal{Z}_K$ и ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$. Эти инварианты можно рассматривать как характеристики исходного симплициального комплекса K.

В.М.Бухштабер в 2002 году сформулировал общую задачу:

Проблема.

1) Изучить свойства инвариантов Бухштабера на категории момент-угол комплексов и вещественных момент-угол комплексов.

2) Найти комбинаторное описание этих инвариантов в случае момент-угол комплексов и описать условия, при которых эти инварианты можно явно вычислить.

В этой работе мы исследуем исключительно инварианты Бухштабера момент-угол комплексов. Для этого введем обозначения. Пусть K — симплициальный комплекс. Числом Бухштабера (комплексным) $s(K)$ называется максимальный ранг торических подгрупп тора T^m, действующих свободно на пространстве $\mathcal{Z}_K$. Вещественным числом Бухштабера $s_{\mathbb{R}}(K)$ называется максимальный ранг подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, действующих свободно на ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$. Вещественное число Бухштабера в некоторых частных случаях посчитать проще, поскольку существует лишь конечное число подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, так что задача, по крайней мере, допускает полный перебор.

Существует явная взаимосвязь между числами Бухштабера и хроматическими инвариантами симплициальных комплексов. Пусть l — неотрицательное целое число. l-раскраской комплекса K называется отображение $c\colon V(K) \to [l]$ из множества вершин комплекса K в множество красок. l-раскраска называется правильной, если для каждых двух различных вершин $i_1, i_2 \in V(K)$ таких, что $\{i_1, i_2\} \in K$, выполнено $c(i_1) \neq c(i_2)$. Хроматическим числом $\gamma(K)$ симплициального комплекса K называется наименьшее такое число l, для которого существует хотя бы одна правильная l-раскраска комплекса K.

В работе [9] было показано, что $m - \gamma(K) \leqslant s(K) \leqslant m - n$, где m — число вершин комплекса K, а $n = \dim K + 1$. Аналогичное неравенство выполнено и для вещественного числа $m - \gamma(K) \leqslant s_{\mathbb{R}}(K) \leqslant m - n$. Комбинируя этот факт с неравенством $s(K) \leqslant s_{\mathbb{R}}(K)$, отмеченным в [7], получаем

$$m - \gamma(K) \leqslant s(K) \leqslant s_{\mathbb{R}}(K) \leqslant m - n. \tag{1.1}$$

Для симплициальных комплексов K, отличных от симплекса, выполнена более сильная оценка [6]:

$$m - \gamma(K) + 1 \leqslant s(K). \tag{1.2}$$

В этой работе мы оценим число Бухштабера сверху, используя хроматическое число:

$$s_{\mathbb{R}}(K) \leqslant m - \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil. \tag{1.3}$$

Кроме того, для одномерных симплициальных комплексов (простых графов) Γ верны равенства:

$$s(\Gamma) = s_{\mathbb{R}}(\Gamma) = m - \lceil \log_2(\gamma(\Gamma) + 1) \rceil. \tag{1.4}$$

При исследовании числа Бухштабера возник вопрос: верно ли, что вещественное и комплексное числа Бухштабера всегда равны. Существует много примеров симплициальных комплексов, для которых это так. В случае, когда K — двумерная сфера, оба числа равны $m - 3$, что следует из оценок (1.1), (1.2) и теоремы о четырех красках. В более общей ситуации, если $s(K) = m - n$, то согласно (1.1) $s(K) = s_{\mathbb{R}}(K)$. Случай $s(K) = m - n$ является наиболее важным для торической топологии. Например, равенство $s(K) = m - n$ выполнено, если $K = \partial P^*$, где P — многогранник Дельзанта, а ∂P^* — граница двойственного к нему симплициального многогранника.

Также известно, что $s(K) = s_{\mathbb{R}}(K)$, если $m-n \leqslant 3$, где m — количество вершин комплекса K, а $n = \dim K+1$. Этот факт доказан в [6] для границ симплициальных многогранников, но доказательство применимо и в общем случае.

В §3 мы покажем, что $s(K) = s_{\mathbb{R}}(K)$ для произвольных двумерных и одномерных симплициальных комплексов. Тем не менее, как показано в §4, существует трехмерный симплициальный комплекс U на 15 вершинах, для которого $s(U) \neq s_{\mathbb{R}}(U)$. В качестве такого комплекса мы используем вещественный универсальный комплекс размерности 3, определенный в работе [4]. Доказательство неравенства $s(U) < s_{\mathbb{R}}(U)$ проведено отчасти машинным перебором с использованием среды GAP [8], [15]. Доказательство, не использующее длительный перебор и разбор большого числа однотипных случаев, автору не известно.

Построенный комплекс U обладает некоторыми хорошими свойствами. Он является комплексом Коэна-Маколея, как показали Дэвис и Янушкиевич в работе [4], используя результат работы [10] и теорему Райснера [13]. Но этот симплициальный комплекс не является ни симплициальной сферой, ни остовом симплекса. Так что вопрос, совпадают ли вещественное и комплексное числа Бухштабера на классе симплициальных сфер, либо остовов симплексов, пока остается открытым.

В §5 исследуются аддитивные свойства числа Бухштабера. Более конкретно, исследуется вопрос: верно ли, что для двух симплициальных комплексов K и N выполнено равенство $s(K*N) = s(K)+s(N)$? Это равенство выполнено на широком классе симплициальных комплексов, но в общем случае не выполняется. Приведены два одномерных симплициальных комплекса Γ_1 и Γ_2 таких, что $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ и $s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1) + s_{\mathbb{R}}(\Gamma_2)$.

При работе с числами Бухштабера оказалось удобно использовать понятие характеристической функции произвольной размерности (определение 2.12). Эти отображения можно считать своего рода раскрасками вершин комплекса K векторами из решетки $\mathbb{Z}^l$ или конечного векторного пространства $\mathbb{Z}_2^l$. В случае $l = \dim K + 1$ характеристическая функция является классическим понятием, восходящим к работе Дэвиса и Янушкиевича [4]. Характеристические функции впоследствии трактовались как раскраски в работе [12], где они были названы *линейно независимыми раскрасками*.

Можно определить число $r(K)$ (соответственно $r_{\mathbb{R}}(K)$) как наименьшее целое l, для которого существует линейно независимая раскраска вершин комплекса K векторами из решетки $\mathbb{Z}^l$ (соответственно $\mathbb{Z}_2^l$). В таком случае $s(K) = m - r(K)$ и $s_{\mathbb{R}}(K) = m - r_{\mathbb{R}}(K)$. Такое определение позволяет увидеть явную аналогию чисел Бухштабера и хроматических инвариантов.

В §6 эта аналогия в вещественном случае расширена до понятия характеристического многочлена. В теории графов существует средство для работы с хроматическим числом — хроматический многочлен. Этот многочлен был введен Биркгофом [1] в 1912 году в попытке доказать гипотезу четырех красок. Хроматический многочлен графа Γ определяется следующим образом. Пусть $n_{\Gamma,k}$ — количество правильных раскрасок графа Γ не более, чем в k цветов. Тогда существует такой многочлен $\chi_\Gamma(t)$ с целыми коэффициентами, что $\chi_\Gamma(k) = n_{\Gamma,k}$ при всех неотрицательных целых k. Этот многочлен называется характеристическим многочленом графа. Зная многочлен $\chi_\Gamma(k)$, можно определить хроматическое число $\gamma(\Gamma)$ из выражения $\gamma(\Gamma) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \chi_\Gamma(k) \neq 0\}$. Хроматический многочлен позволяет применить аппарат анализа к решению комбинаторных задач теории графов.

В §6 мы применяем аналогичную идею к исследованию линейно независимых раскрасок симплициального комплекса. Для фиксированного комплекса K и произвольного натурального числа l обозначим через $\tilde{n}_{K,l}$ количество характеристических функций из K в $\mathbb{Z}_2^l$. Тогда (теорема 6.6) существует единственный многочлен $P_K(t)$ такой, что $\tilde{n}_{K,l} = P_K(2^l)$ при всех $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant}$. Этот многочлен обладает свойствами, аналогичными свойствам хроматического многочлена графов, более того, в случае, когда K — одномерен, имеется очень простая формула, связывающая этот новый многочлен с хроматическим: $P_K(t) = \chi_K(t-1)$.

Многочлен $P_K(t)$ строится как характеристический многочлен бинарного матроида $M(K)$, ассоциированного с симплициальным комплексом K. Детали конструкции матроида $M(K)$ и общие сведения о матроидах приведены в §6. Более подробное изложение теории матроидов можно найти в [1], [16], [14],[5].

Автор благодарен своему научному руководителю Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку задач и стимулирующие обсуждения, а также Николаю Ероховцу за внимание к этой работе и высказанные им замечания по одной из ранних версий текста.

2. Определения и конструкции

Определение 2.1. *Пусть V — некоторое множество, а K — система его конечных подмножеств такая, что*

1) Если $\sigma \in K$ и $\tau \subset \sigma \subseteq V$, то $\tau \in K$.

2) Каждое одноэлементное подмножество принадлежит системе K.

Система K называется симплициальным комплексом на множестве вершин V. Элементы $\sigma \in K$ называются симплексами. Размерность симплекса $\dim \sigma = |\sigma| - 1$. Размерность симплициального комплекса $\dim K = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$.

Большинство рассматриваемых нами симплициальных комплексов имеет конечное множество вершин. Обычно предполагается, что вершины занумерованы, то есть $V = [m]$.

Определение 2.2. *Пусть K и N — симплициальные комплексы на множествах вершин V_K и V_N соответственно. Симплициальным отображением $f\colon K \to N$ называется такое отображение $f\colon V_K \to V_N$, что $f(\sigma) \in N$, если $\sigma \in K$. Невырожденным (симплициальным) отображением называется такое симплициальное отображение $f\colon K \to N$, что $|f(\sigma)| = |\sigma|$, если $\sigma \in K$.*

Иными словами, невырожденное отображение переводит симплексы в симплексы той же размерности.

Определение 2.3. *Пусть K и N — симплициальные комплексы на множествах вершин V_K и V_N соответственно. Джойном $K * N$ называется симплициальный комплекс на множестве $V_K \sqcup V_N$, симплексы которого имеют вид $\sigma \sqcup \tau$, где $\sigma \in K$, $\tau \in N$.*

Каждому симплициальному комплексу K и паре топологических пространств $Y \subseteq X$ можно сопоставить новое топологическое пространство $(X, Y)^K$. В литературе можно встретить различные названия этого пространства: K-степень, обобщенный момент-угол комплекс, полиэдральная степень.

Определение 2.4. *Пусть (X, Y) — топологическая пара, $Y \subseteq X$, а K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ определим подмножество $(X, Y)^\sigma = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_m \subseteq X^m$, где $Z_i = X$, если $i \in \sigma$, и $Z_i = Y$, если $i \notin \sigma$. Тогда полиэдральной степенью пары (X, Y) называется пространство*

$$(X, Y)^K = \bigcup_{\sigma \in K} (X, Y)^\sigma.$$

Частными, но очень важными для торической топологии примерами полиэдральных степеней являются момент-угол комплексы.

Определение 2.5. *Момент-угол комплексом симплициального комплекса K называется пространство $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K$. Вещественным момент-угол комплексом симплициального комплекса K называется пространство ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K = (D^1, S^0)^K = (I, \partial I)^K$.*

Пример 2.6. Пусть симплициальный комплекс $K = \partial\Delta_2$ — граница треугольника. Тогда $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^{\partial\Delta_2} = D^2 \times D^2 \times S^1 \cup D^2 \times S^1 \times D^2 \cup S^1 \times D^2 \times D^2 = \partial(D^2 \times D^2 \times D^2) \cong S^5$. Аналогично, ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K = (D^1, S^0)^{\partial\Delta_2} = \partial(D^1 \times D^1 \times D^1) \cong S^2$.

На топологической паре (D^2, S^1) естественным образом определено действие окружности. Также определено покоординатное действие тора T^m на полидиске $(D^2)^m$. Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K \subseteq (D^2)^m$ инвариантно относительно этого покоординатного действия. Таким образом определено действие ω тора T^m на пространстве $\mathcal{Z}_K$. Действие ω имеет нетривиальные стабилизаторы.

Пример 2.7. Пусть как и ранее $K = \partial\Delta_2$. Поскольку пара точек $\{1, 2\}$ является симплексом комплекса K, то точка $(0, 0, 1) \in D^2 \times D^2 \times S^1$ лежит в пространстве $\mathcal{Z}_K$. С другой стороны, стабилизатором этой точки относительно покоординатного действия тора T^3 является подгруппа $T^1 \times T^1 \times \{1\} \subset T^1 \times T^1 \times T^1 = T^3$.

Аналогично определяется действие группы $\mathbb{Z}_2^m$ на вещественном момент-угол комплексе. Группа $\mathbb{Z}_2^m$ действует покоординатными инволюциями на кубе $(D^1)^m$, при этом подмножество ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K \subseteq (D^1)^m$ инвариантно относительно этого действия. Значит, определено действие $\omega_{\mathbb{R}}$ группы $\mathbb{Z}_2^m$ на пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$. Это действие также не является свободным.

Определение 2.8. *Пусть $s(K)$ — максимальный ранг подгрупп тора T^m, действующих свободно на пространстве $\mathcal{Z}_K$, а $s_{\mathbb{R}}(K)$ — максимальный ранг подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, действующих свободно на пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$. Числа $s(K)$ и $s_{\mathbb{R}}(K)$ называются комплексным и вещественным числами Бухштабера.*

Замечание 2.9. Часто мы будем называть комплексное число Бухштабера просто числом Бухштабера.

Важность числа Бухштабера для торической топологии выражена в следующем утверждении.

Предложение 2.10. *Пусть P — n-мерный простой многогранник с m гипергранями, а $K_P = \partial P^*$ — граница двойственного к нему симплициального многогранника. Таким образом, K_P является симплициальным комплексом размерности $n-1$ с m вершинами. Над многогранником P существует квазиторическое многообразие в том и только том случае, когда $s(K_P) = m - n$. Если квазиторические многообразия существуют, то они являются факторами момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{K_P}$ по свободному действию торических подгрупп ранга $m - n$ тора T^m.*

Подробное изложение данной темы содержится в монографии [3].

Если задано действие тора T^m на пространстве $\mathcal{Z}_K$, то индуцированное действие подгруппы $K \subseteq T^m$ является свободным тогда и только тогда, когда K тривиально пересекается со всеми стабилизаторами действия. Стабилизаторы стандартного действия тора на пространстве $\mathcal{Z}_K$ описываются простым утверждением.

Утверждение 2.11. *Стабилизаторами действия ω являются координатные подгруппы T^σ тора T^m, соответствующие симплексам σ комплекса K. По определению $T^\sigma = \{(t_1, \ldots, t_m) \in T^m \mid t_i = 1,$ если $i \notin \sigma\}$. Аналогично стационарными подгруппами действия $\omega_{\mathbb{R}}$ являются координатные подгруппы $\mathbb{Z}_2^\sigma \subseteq \mathbb{Z}_2^m$.*

Этот факт доказывается явным предъявлением точек момент-угол комплекса, стационарных относительно указанных подгрупп (см. также пример 2.7).

Ключевой для исследования числа Бухштабера и свободно действующих на момент-угол комплексах подгрупп тора является следующая конструкция.

Пусть $S \subset T^m$ — некоторая подгруппа ранга s, действующая свободно на $\mathcal{Z}_K$. Определена проекция на факторгруппу $q\colon T^m \to T^m/S$. Группа T^m/S является тором ранга $r = m - s$. Зафиксируем его произвольное координатное представление $T^m/S \cong T^r$. Значит, отображение проекции $q\colon T^m \to T^r$ задано следующим образом: $q\colon (t_1, \ldots, t_m) \mapsto (t_1^{\lambda_1^1} \ldots t_m^{\lambda_1^m}, \ldots, t_1^{\lambda_r^1} \ldots t_m^{\lambda_r^m})$, где $\lambda_i^j \in \mathbb{Z}$. Матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_r^1 & \dots & \lambda_r^m \end{pmatrix}$$

называется характеристической матрицей подгруппы S. Подгруппа S по условию действует свободно на $\mathcal{Z}_K$, значит ее пересечение со стабилизаторами действия тривиально. Следовательно, проекция q отображает каждую стационарную подгруппу T^σ изоморфно на ее образ. В терминах характеристической матрицы это означает, что выполнено условие $(*)$:

Если $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$, то столбцы характеристической матрицы A с номерами $i_1, \dots, i_k$ образуют часть базиса целочисленной решетки $\mathbb{Z}^s$ (мы будем такие наборы целочисленных векторов называть унимодулярными).

И наоборот, если задана характеристическая матрица $Q\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^r$, удовлетворяющая условию $(*)$, то можно определить гомоморфизм торов $Q \otimes_{\mathbb{Z}} T^1\colon T^m \to T^r$. Его ядро $\mathrm{Ker}(Q \otimes_{\mathbb{Z}} T^1)$ является торической подгруппой ранга $s \geqslant m - r$, действующей свободно на пространстве $\mathcal{Z}_K$.

Таким образом, имеется соответствие свободно действующих на пространстве $\mathcal{Z}_K$ торических подгрупп и характеристических матриц. Это соответствие не является однозначным, поскольку одну подгруппу могут задавать разные характеристические матрицы (неоднозначность заключается в выборе координатного представления тора T^m/S).

Все изложенные выше рассуждения верны и в случае действия группы $\mathbb{Z}_2^m$ на пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$. Свободно действующая на ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_K$ подгруппа $S \subseteq \mathbb{Z}_2^m$ ранга s задает характеристическую матрицу

$$Q_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_r^1 & \dots & \lambda_r^m \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i^j \in \mathbb{Z}_2$, $r = m - s$. Условие свободности действия эквивалентно условию $(*)_{\mathbb{R}}$:

Если $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$, то столбцы характеристической матрицы Λ с номерами $i_1, \dots, i_k$ линейно независимы над полем $\mathbb{Z}_2$. Эти рассуждения приводят к следующему определению, удобному для последующего изложения.

Определение 2.12. *Характеристической функцией из симплициального комплекса K в решетку $\mathbb{Z}^l$ (соответственно $\mathbb{Z}_2^l$) называется отображение $\Lambda : V(K) \to \mathbb{Z}^l$ (соответственно $\Lambda : V(K) \to \mathbb{Z}_2^l$) такое, что для каждого симплекса $\sigma \in K$ множество векторов $\{\Lambda(i), i \in \sigma\}$ унимодулярно (соответственно линейно независимо).*

Из предыдущих рассуждений немедленно следует

Предложение 2.13. *Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах. Определим $r(K)$ как наименьшее число l, для которого существует характеристическая функция из K в $\mathbb{Z}^l$, а $r_{\mathbb{R}}(K)$ — наименьшее число l, для которого существует характеристическая функция из K в $\mathbb{Z}_2^l$. Тогда $s(K) = m - r(K)$ и $s_{\mathbb{R}}(K) = m - r_{\mathbb{R}}(K)$.*

В дальнейшем мы будем изучать свойства инвариантов $r(K)$ и $r_{\mathbb{R}}(K)$, имея в виду простую связь этих чисел с числами Бухштабера.

Характеристические функции можно трактовать с геометрической точки зрения. Для этого идеально подходит понятие универсальных комплексов, введенное Дэвисом и Янушкиевичем в работе [4].

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Построим *универсальный симплициальный комплекс U_l*, вершинами которого будут все примитивные целочисленные векторы размерности l. Примитивность вектора означает, что его координаты взаимно просты в совокупности. Объявим набор вершин $\{v_1, \dots, v_k\}$ симплексом комплекса U_l, если соответствующие векторы $\{v_1, \dots, v_k\}$ образуют унимодулярный набор (часть базиса целочисленной решетки). Тогда максимальные симплексы комплекса U_l соответствуют базисам решетки $\mathbb{Z}^l$, следовательно, $\dim U_l = l-1$. При таком определении, характеристическую функцию из комплекса K в $\mathbb{Z}^l$ можно трактовать как невырожденное симплициальное отображение из комплекса K в универсальный комплекс U_l.

Определим также вещественный универсальный комплекс ${}_{\mathbb{R}}U_l$. Его вершинами объявим ненулевые векторы конечного векторного пространства $\mathbb{Z}_2^l$, а симплексами — линейно независимые наборы векторов. Максимальными симплексами являются базисы пространства $\mathbb{Z}_2^l$, следовательно, $\dim {}_{\mathbb{R}}U_l = l-1$. Тогда вещественную характеристическую функцию из комплекса K в $\mathbb{Z}_2^l$ можно понимать как невырожденное симплициальное отображение из K в ${}_{\mathbb{R}}U_l$.

Заметим, что в комплексном случае определено антиподальное отображение комплекса U_l, переводящее вектор $v \in \mathbb{Z}^l$ в вектор $-v \in \mathbb{Z}^l$. В работе [4] характеристические функции рассматриваются по модулю этой инволюции и определение универсальных комплексов немного отличается от данного выше (необходимо дополнительно склеить антиподальные точки). Но в последующем тексте это расхождение не будет иметь значения.

3. Возрастающие серии

В этом разделе мы используем общую технику возрастающих серий для доказательства некоторых оценок числа Бухштабера. Некоторые из этих результатов известны (см. работы [6], [9]).

Пусть $\{L_i\}, i = 1, 2, \ldots$ — последовательность симплициальных комплексов такая, что существует невырожденное отображение из L_i в L_j, если $i < j$. Такую последовательность мы будем называть *возрастающей серией*. Рассмотрим произвольный симплициальный комплекс K. Каждая возрастающая серия $\{L_i\}, i = 1, 2, \ldots$ определяет инвариант $\mathcal{L}(K)$ комплекса K следующим образом: $\mathcal{L}(K)$ есть наименьшее число l, для которого существует невырожденное отображение из комплекса K в комплекс L_l. Если такого числа не существует, положим $\mathcal{L}(K) = \infty$.

Пример 3.1. В предыдущем параграфе мы видели, что серии универсальных комплексов $\{U_i\}, i = 1, 2, \ldots$ и $\{{}_{\mathbb{R}}U_i\}, i = 1, 2, \ldots$ определяют инварианты $r(K)$ и $r_{\mathbb{R}}(K)$ соответственно.

Пример 3.2. Рассмотрим серию симплексов $\{L_i = \Delta_{i-1}\}, i = 1, 2, \ldots$. Эта серия определяет инвариант $\gamma(K)$ — хроматическое число комплекса K. Действительно, невырожденное отображение из комплекса K в комплекс Δ_{i-1} задает правильную раскраску вершин комплекса K в i цветов такую, что вершины одного симплекса покрашены в различные цвета.

Пример 3.3. Рассмотрим серию $\{L_i = \Delta_\infty^{(i-1)}\}, i = 1, 2, \ldots$. Комплекс $\Delta_\infty^{(i-1)}$ имеет бесконечно много вершин, и каждое множество вершин мощности не больше i определяет симплекс. Такая возрастающая серия задает инвариант, равный $\dim K + 1$.

Предложение 3.4. *Пусть $\{L_i^1\}$ и $\{L_i^2\}$ — возрастающие серии комплексов, а $\mathcal{L}^1(K)$ и $\mathcal{L}^2(K)$ — определяемые ими инварианты комплекса K. Предположим, что существует невырожденное отображение $g_i \colon L_i^1 \to L_i^2$ при всех $i \geqslant 0$. Тогда для каждого симплициального комплекса K выполнено неравенство $\mathcal{L}^1(K) \geqslant \mathcal{L}^2(K)$.*

Доказательство. Пусть f — невырожденное отображение из K в L_i^1. Тогда $g_i \circ f$ — невырожденное отображение из K в L_i^2. Подставляя $i = \mathcal{L}^1(K)$, получаем требуемую оценку. □

Из предложения 3.4 следуют известные оценки, описывающие связь числа Бухштабера и хроматического числа [9] и связь вещественного и комплексного чисел Бухштабера [7].

Следствие 3.5. *Для каждого симплициального комплекса K выполнены неравенства*

$$\dim K + 1 \leqslant r_{\mathbb{R}}(K) \leqslant r(K) \leqslant \gamma(K).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для произвольного i существуют невырожденные отображения

$$\Delta_{i-1} \to U_i \to {}_{\mathbb{R}}U_i \to \Delta_{\infty}^{(i-1)}.$$

В качестве первого отображения достаточно взять включение произвольного максимального симплекса. Существование последнего отображения также очевидно, поскольку размерность ${}_{\mathbb{R}}U_i$ равна $i-1$. Осталось построить отображение посередине. Напомним, что вершинами комплекса U_i являются ненулевые примитивные векторы решетки $\mathbb{Z}^i$, а вершинами ${}_{\mathbb{R}}U_i$ являются ненулевые векторы $\mathbb{Z}_2^i$. Определим отображение $p_{mod}\colon U_i \to {}_{\mathbb{R}}U_i$ на вершинах при помощи приведения по модулю 2. Ясно, что максимальные симплексы комплекса U_i (базисы целочисленной решетки) переходят в максимальные симплексы комплекса ${}_{\mathbb{R}}U_i$ (базисы векторного пространства над $\mathbb{Z}_2$). Таким образом, построенное отображение p_{mod} симплициально и невырождено. Утверждение теперь следует из предложения 3.4. $\square$

Следующий факт, применительно к числу Бухштабера, был замечен Н.Ю.Ероховцом в работе [6].

Предложение 3.6. *Пусть $\mathcal{L}$ — инвариант, определенный некоторой возрастающей серией $\{L_i\}$. Пусть K и N — такие симплициальные комплексы, что существует невырожденное отображение из K в N. Тогда $\mathcal{L}(K) \leqslant \mathcal{L}(N)$.*
Доказательство аналогично предложению 3.4 и поэтому не приведено.

Пример 3.7. Для любого симплициального комплекса K существует невырожденное отображение из K в $\Delta_{\gamma-1}$, где $\gamma = \gamma(K)$. Заметим, что это отображение можно рассматривать как невырожденное отображение из K в $\Delta_{\gamma-1}^{(\dim K)}$ — остов симплекса $\Delta_{\gamma-1}$ размерности $\dim K$. Следовательно, выполнены неравенства $r(K) \leqslant r(\Delta_{\gamma-1}^{(\dim K)})$ и $r_{\mathbb{R}}(K) \leqslant r_{\mathbb{R}}\left(\Delta_{\gamma-1}^{(\dim K)}\right)$ согласно предложению 3.6. В этих оценках фигурирует число Бухштабера остовов симплексов. Даже в этом частном случае подсчет числа Бухштабера является непростой задачей. Вещественное число Бухштабера остовов симплексов вычислено в [7].

Теперь применим предложение 3.6 к другой возрастающей серии. Пусть K — произвольный (конечный) симплициальный комплекс. По определению существуют невырожденное отображение из K в $U_{r(K)}$ и невырожденное отображение из K в ${}_{\mathbb{R}}U_{r_{\mathbb{R}}(K)}$. Таким образом, имеются неравенства на хроматические числа:

$$\begin{aligned} \gamma(K) &\leqslant \gamma(U_{r(K)}), \\ \gamma(K) &\leqslant \gamma({}_{\mathbb{R}}U_{r_{\mathbb{R}}(K)}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

согласно предложению 3.6. Чтобы получить более прозрачные формулы, следует явно вычислить хроматические числа комплексов U_l и ${}_{\mathbb{R}}U_l$. Вначале сформулируем несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

Назовем симплициальные комплексы K и N *эквивалентными*, если существуют невырожденные отображения из K в N и из N в K. Пусть $\mathcal{L}(\cdot)$ — инвариант, определенный возрастающей серией $\{L_i\}$, и $K \sim N$. Тогда $\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}(N)$, согласно предложению 3.6, то есть $\mathcal{L}(\cdot)$ — инвариант класса эквивалентности.

Лемма 3.8. *Для любого числа $l \geqslant 1$ симплициальный комплекс $U_l^{(2)}$ эквивалентен симплициальному комплексу ${}_{\mathbb{R}}U_l^{(2)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Невырожденное отображение $p_{mod}\colon U_l \to {}_{\mathbb{R}}U_l$ было построено в доказательстве следствия 3.5 (приведение $\mod 2$). Достаточно ограничить это отображение на 2-остовы рассматриваемых комплексов.

Теперь построим невырожденное отображение $f_{lift}\colon {}_{\mathbb{R}}U_l^{(2)} \to U_l^{(2)}$. Пусть $v \in \mathbb{Z}_2^l$, $v = (\delta_1, \dots, \delta_l)$, где $\delta_i = 0$ или $1 \mod 2$. Положим $f_{lift}(v) = (\delta_1, \dots, \delta_l)$ — тот же вектор из 0 и 1, рассматриваемых как целые числа. Теперь надо проверить, что двумерный симплекс комплекса ${}_{\mathbb{R}}U_l$ переходит в двумерный симплекс комплекса U_l при отображении f_{lift}. Всякий двумерный симплекс комплекса ${}_{\mathbb{R}}U_l$ задается тремя линейно независимыми в $\mathbb{Z}_2^l$ векторами. Запишем их координаты в $3 \times l$-матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} & \dots & \varepsilon_{1,i_1} & \dots & \varepsilon_{1,i_2} & \dots & \varepsilon_{1,i_3} & \dots & \varepsilon_{1,l} \\ \varepsilon_{2,1} & \dots & \varepsilon_{2,i_1} & \dots & \varepsilon_{2,i_2} & \dots & \varepsilon_{2,i_3} & \dots & \varepsilon_{2,l} \\ \varepsilon_{3,1} & \dots & \varepsilon_{3,i_1} & \dots & \varepsilon_{3,i_2} & \dots & \varepsilon_{3,i_3} & \dots & \varepsilon_{3,l} \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы есть ненулевой над $\mathbb{Z}_2$ минор порядка 3. Пусть M — соответствующая этому минору матрица. Значит целочисленная 3×3-матрица $f_{lift}(M)$ имеет нечетный определитель. Заметим простой факт: каждая целочисленная 3×3-матрица, составленная из 0 и 1, удовлетворяет условию $|\det M| < 3$. Следовательно, $\det f_{lift}(M) = \pm 1$. Значит матрица $f_{lift}(A)$ имеет минор равный ± 1. Это означает, что строки $f_{lift}(A)$ образуют часть некоторого базиса решетки $\mathbb{Z}^l$. Таким образом, доказано, что $f_{lift}(\sigma) \in U_l$ для каждого 2-мерного симплекса $\sigma \in {}_{\mathbb{R}}U_l$. $\square$

Следствие 3.9. *Комплексы $U_l^{(1)}$, ${}_{\mathbb{R}}U_l^{(1)}$ и полный граф K_{2^l-1} на $2^l - 1$ вершинах эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3.8 выполнено $U_l^{(1)} \sim {}_{\mathbb{R}}U_l^{(1)}$. Но ${}_{\mathbb{R}}U_l^{(1)} = K_{2^l-1}$, поскольку любые два различных ненулевых вектора в пространстве $\mathbb{Z}_2^l$ линейно независимы, а значит образуют 1-симплекс комплекса ${}_{\mathbb{R}}U_l$. $\square$

Теперь можно без труда найти хроматическое число универсального комплекса.

Следствие 3.10. *Для каждого числа $l \geqslant 1$ выполнено равенство*

$$\gamma(U_l) = \gamma({}_{\mathbb{R}}U_l) = 2^l - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хроматическое число определяется 1-остовом симплициального комплекса. Более того, оно является инвариантом, построенным по возрастающей серии, значит является инвариантом отношения эквивалентности. Наконец, используя предыдущее следствие, находим $\gamma(U_l) = \gamma({}_{\mathbb{R}}U_l) = \gamma(U_l^{(1)}) = \gamma({}_{\mathbb{R}}U_l^{(1)}) = \gamma(K_{2^l-1}) = 2^l - 1$. $\square$

Перепишем оценки (3.1) в виде

$$\gamma(K) \leqslant 2^{r(K)} - 1, \tag{3.2}$$
$$\gamma(K) \leqslant 2^{r_{\mathbb{R}}(K)} - 1 \tag{3.3}$$

и получим оценку для чисел r и $r_{\mathbb{R}}$

$$r(K) \geqslant \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil, \tag{3.4}$$
$$r_{\mathbb{R}}(K) \geqslant \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil. \tag{3.5}$$

Здесь $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число не меньшее x. Теперь докажем, что эта оценка точна для простых графов (одномерных симплициальных комплексов).

Предложение 3.11. *Для всякого простого графа Γ выполнено равенство*

$$r_{\mathbb{R}}(\Gamma) = r(\Gamma) = \lceil \log_2(\gamma(\Gamma) + 1) \rceil, \tag{3.6}$$

Доказательство. Всякая правильная раскраска графа Γ в a цветов определяет невырожденное отображение из Γ в полный граф K_a. Следовательно, существует невырожденное отображение из Γ в $K_{\gamma(\Gamma)}$. Пусть $p = \lceil \log_2(\gamma(\Gamma)+1) \rceil$. Тогда $2^p - 1 \geqslant \gamma(\Gamma)$ и, следовательно, существует невырожденное отображение из графа Γ в K_{2^p-1}. Но $K_{2^p-1} \sim U_p^{(1)}$ согласно следствию 3.9. Значит существует невырожденное отображение из Γ в U_p где $p = \lceil \log_2(\gamma(\Gamma)+1) \rceil$. Это показывает, что $r(\Gamma) \leqslant \lceil \log_2(\gamma(\Gamma)+1) \rceil$. Это неравенство вкупе с оценкой $r(\Gamma) \geqslant \lceil \log_2(\gamma(\Gamma)+1) \rceil$, полученной ранее, завершает доказательство. Рассуждения в случае вещественного числа Бухштабера полностью аналогичны. $\square$

Из леммы 3.8 следует, что вещественное и комплексное числа Бухштабера совпадают для всех 2-мерных комплексов. Действительно, из существования невырожденного отображения из K в ${}_{\mathbb{R}}U_l^{(2)}$ следует существование невырожденного отображения из K в $U_l^{(2)}$ и наоборот. Но в размерности 3 вещественное и комплексное числа симплициальных комплексов могут не совпадать. Доказательству этого факта посвящен следующий параграф.

4. Различие комплексного и вещественного чисел Бухштабера

Теорема 4.1. *Не существует невырожденного отображения из симплициального комплекса ${}_{\mathbb{R}}U_4$ в комплекс U_4.*

Следствие 4.2. *Существует 3-мерный симплициальный комплекс U, такой что*

$$s(U) \neq s_{\mathbb{R}}(U).$$

Доказательство следствия. Возьмем в качестве U симплициальный комплекс ${}_{\mathbb{R}}U_4$. Имеем $r_{\mathbb{R}}(U) = 4$, поскольку существует невырожденное отображение из U в ${}_{\mathbb{R}}U_4$ (например, тождественное). С другой стороны, если бы $r(U) \leqslant 4$, то существовало бы невырожденное отображение из U в U_4, что противоречит теореме 4.1. Значит, $r(U) > r_{\mathbb{R}}(U)$, следовательно, $s(U) < s_{\mathbb{R}}(U)$. $\square$

Доказательство теоремы. Везде в этом параграфе приняты обозначения: $U = {}_{\mathbb{R}}U_4$, а $p = p_{mod}\colon U_4 \to U$ отображение приведения $\mod 2$, определенное в доказательстве следствия 3.5. Как уже было указано, p является невырожденным симплициальным отображением.

Лемма 4.3. *Пусть $f\colon U \to N$ — невырожденное отображение. Тогда f инъективно на множестве вершин.*

Доказательство. Согласно следствию 3.9, $U^{(1)} = K_{15}$ — полный граф на 15 вершинах. Пусть v_1 и v_2 — произвольные вершины комплекса U. Тогда множество $\{f(v_1), f(v_2)\}$ является одномерным симплексом комплекса N по определению невырожденного отображения. Значит $f(v_1) \neq f(v_2)$. $\square$

Замечание 4.4. В условиях леммы 4.3 отображение f индуцирует инъективное отображение симплексов.

Лемма 4.5. *Если существует некоторое невырожденное отображение $\tilde{\nu}\colon U \to U_4$, то существует такое невырожденное отображение $\nu\colon U \to U_4$, что $p \circ \nu = \mathrm{id}_U\colon U \to U$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f = p \circ \tilde{\nu}\colon U \to U$. Отображение f невырождено, значит по лемме 4.3 оно инъективно на вершинах комплекса U. Следовательно, отображение f определяет перестановку ρ на множестве вершин $V(U)$. Существует такое число $n \geqslant 1$, что $\rho^n = \mathrm{id}$. Значит $f^n = \mathrm{id}_U\colon U \to U$. Положим $\nu = \tilde{\nu} \circ f^{n-1}\colon U \to U_4$. Имеем $f \circ \nu = f^n = \mathrm{id}_U$ и ν невырождено. $\square$

Если мы докажем, что не существует невырожденного отображения $\nu\colon U \to U_4$ такого, что $p \circ \nu = \mathrm{id}_U$, то из этого будет следовать теорема 4.1 согласно лемме 4.5.

Попробуем построить характеристическую функцию из U в $\mathbb{Z}^4$. Мы перечислим все вершины комплекса U и начнем ставить им в соответствие целочисленные 4-векторы таким образом, что вершинам 3-симплекса комплекса U, соответствуют базисы решетки $\mathbb{Z}^4$. Как только мы докажем, что такое построение невозможно, теорема будет доказана.

Предположим, что характеристическая функция Λ из U в $\mathbb{Z}^4$ существует. Вершинами комплекса U являются ненулевые векторы пространства $\mathbb{Z}_2^4$. Их перечень приведен ниже. Векторы справа являются значениями характеристической функции Λ. Каждый вектор справа является примитивным целочисленным вектором. Символом $\mathbf{1}$ обозначена единица поля $\mathbb{Z}_2$. Для удобства векторы записываются вектор-строками.

$$\begin{aligned}
v_1 &= (\mathbf{1},0,0,0) \longmapsto (a_1,b_1,b_2,b_3),\\
v_2 &= (0,\mathbf{1},0,0) \longmapsto (b_4,a_2,b_5,b_6),\\
v_3 &= (0,0,\mathbf{1},0) \longmapsto (b_7,b_8,a_3,b_9),\\
v_4 &= (0,0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (b_{10},b_{11},b_{12},a_4),\\
v_5 &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,0) \longmapsto (a_5,a_6,b_{13},b_{14}),\\
v_6 &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},0) \longmapsto (a_7,b_{15},a_8,b_{16}),\\
v_7 &= (\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (a_9,b_{17},b_{18},a_{10}),\\
v_8 &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (b_{19},a_{11},a_{12},b_{20}),\\
v_9 &= (0,\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (b_{21},a_{13},b_{22},a_{14}),\\
v_{10} &= (0,0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (b_{23},b_{24},a_{15},a_{16}),\\
v_{11} &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (b_{25},a_{17},a_{18},a_{19}),\\
v_{12} &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (a_{20},b_{26},a_{21},a_{22}),\\
v_{13} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (a_{23},a_{24},b_{27},a_{25}),\\
v_{14} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (a_{26},a_{27},a_{28},b_{28}),\\
v_{15} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (a_{29},a_{30},a_{31},a_{32}).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Согласно лемме 4.5 можно считать, что все числа a_i — нечетные, а b_i — четные (их приведение $\mod 2$ должно давать соответствующий вектор слева). Выполнение условия $(*)$ для характеристической функции означает следующее:

$$\begin{aligned}
&\text{Если } v_{i_1},v_{i_2},v_{i_3},v_{i_4} \in \mathbb{Z}_2^4 \text{ и } \det(v_{i_1},v_{i_2},v_{i_3},v_{i_4}) = e \in \mathbb{Z}_2, \text{ то}\\
&\det(\Lambda(v_{i_1}),\Lambda(v_{i_2}),\Lambda(v_{i_3}),\Lambda(v_{i_4})) = \pm 1 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Утверждение 4.6. *Изменение знака любого вектора в правой колонке в (4.1) не влияет на выполнение условия $(*)$.*

Доказательство очевидно. Без ограничения общности предположим, что $\Lambda(v_1) = (1,0,0,0)$, $\Lambda(v_2) = (0,1,0,0)$, $\Lambda(v_3) = (0,0,1,0)$, $\Lambda(v_4) = (0,0,0,1)$. Действительно, $\det(v_1,v_2,v_3,v_4) = \mathbf{1}$, следовательно, согласно условию $(*)$ $\Lambda(v_i)_{i=1,2,3,4}$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^4$. Записывая все целочисленные векторы правого столбца в базисе $\Lambda(v_i)_{i=1,2,3,4}$, получаем, в частности,

$$\begin{aligned}
\Lambda(v_1) &= (1,0,0,0), & \Lambda(v_3) &= (0,0,1,0),\\
\Lambda(v_2) &= (0,1,0,0), & \Lambda(v_4) &= (0,0,0,1).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В дальнейшем предполагается, что эти равенства выполнены.

Лемма 4.7. *В обозначениях (4.1) имеем $a_i = \pm 1$ при всех $i = 1,\ldots,32$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу над $\mathbb{Z}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ * & * & * & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(A) = \mathbf{1}$, согласно условию $(*)$ и (4.3) имеем

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & a_i \end{pmatrix} = \pm 1.$$

Значит, $a_i = \pm 1$, если a_i стоит на последней позиции. Рассуждения в остальных случаях аналогичны. □

Из леммы 4.7 следует, что $\Lambda(v_{15}) = \Lambda((\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Без ограничения общности можно считать $\Lambda(v_{15}) = (1, 1, 1, 1)$. Действительно, если $\Lambda(v_{15}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, где $\epsilon_i = \pm 1$, то можно выбрать новый базис решетки $\mathbb{Z}^4$ следующим образом: $e'_1 = \varepsilon_1 e_1, e'_2 = \varepsilon_2 e_2, e'_3 = \varepsilon_3 e_3, e'_4 = \varepsilon_4 e_4$. В базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ вектор $\Lambda(v_{15})$ имеет координаты $(1, 1, 1, 1)$. Но в новом базисе целочисленные вектор-строки $\Lambda(v_1), \Lambda(v_2), \Lambda(v_3), \Lambda(v_4)$ могут поменять знак. Используя утверждение 4.6, можно вернуть эти строки в положение (4.3). Так же легко заметить, что изменение знака базисных векторов не влияет на утверждение леммы 4.7. Все эти соображения собраны воедино в следующей лемме.

Лемма 4.8. *Предположим, что существует характеристическая функция* Λ *из* U *в* $\mathbb{Z}^4$. *Тогда без потери общности можно считать:* $\Lambda(v_1) = (1, 0, 0, 0)$, $\Lambda(v_2) = (0, 1, 0, 0)$, $\Lambda(v_3) = (0, 0, 1, 0)$, $\Lambda(v_4) = (0, 0, 0, 1)$, $\Lambda(v_{15}) = (1, 1, 1, 1)$ *и* $a_i = \pm 1$ *при* $i = 5, \ldots, 28$.

Исследуем теперь вопрос, чему могут равняться b_i в выражении (4.1). Но вначале введем некоторые обозначения. С этого момента базисы пространств $\mathbb{Z}_2^4$ и $\mathbb{Z}^4$ считаются фиксированными. *Длиной* вектора $v \in \mathbb{Z}_2^4$ будем называть количество координат равных $\mathbf{1}$ в его координатной записи в зафиксированном базисе. Таким образом, векторы $v_5, \ldots, v_{10}$ имеют длину 2 а векторы $v_{11}, \ldots, v_{14}$ имеют длину 3. *Носителем* $\operatorname{supp}(v)$ вектора $v \in \mathbb{Z}_2^4$ будем называть множество позиций в его координатной записи, на которых стоят элементы $\mathbf{1}$. Например, $\operatorname{supp}(v_5) = \{1, 2\}$. Целые числа, стоящие в $\Lambda(v)$ на позициях из $\operatorname{supp}(v)$, назовем *нечетными компонентами* вектора v, а целые числа, стоящие на прочих позициях — *четными компонентами*. Таким образом, нечетные компоненты вектора v_5 — это a_5 и a_6, а четные компоненты — b_{13} и b_{14}. Согласно лемме 4.5 четные компоненты являются четными числами, а нечетные компоненты равны ± 1. Вектор $v \in \mathbb{Z}_2^4$ называется альтернированным, если в записи $\Lambda(v)$ в качестве нечетных компонент встречаются как $+1$, так и -1.

Лемма 4.9. *Если* $v \in \mathbb{Z}_2^4$ *— альтернированный, то все его четные компоненты равны* 0. *Без ограничения общности его первая нечетная компонента равна* 1. *Если вектор* $v \in \mathbb{Z}_2^4$ *не альтернированный, то можно считать, что все его нечетные компоненты равны* 1. *В этом случае каждая четная компонента равна* 0 *или* 2.

Доказательство. Первая нечетная компонента любого вектора может быть $+1$ или -1 согласно лемме 4.7. Если она равна -1, применим утверждение 4.7 (изменим знак целочисленного вектора), чтобы сделать первую компоненту равной $+1$. Если вектор не альтернированный, то все остальные нечетные компоненты равны $+1$ по определению. Рассмотрим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ * & * & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\det(A) = \mathbf{1}$ и согласно условию $(*)$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & b_j & a_i \end{pmatrix} = \pm 1.$$

Следовательно, $a_i - b_j = \pm 1$. Если $a_i = 1$, то $b_j = 0$ или 2. Если $a_i = -1$, то $b_j = 0$ или -2. Если v — не альтернированный и все его нечетные компоненты равны $+1$, то $b_j = 0$ или 2, что составляет первую часть утверждения. Если v альтернированный, то в качестве a_i можно выбрать как $+1$ так и -1. В этом случае b_j может равняться только 0. □

Лемма 4.9 сводит задачу поиска характеристической функции из U в $\mathbb{Z}^4$ к перебору конечного числа случаев. Каждое число a_i может быть 1 или -1, а числа b_i могут равняться 0 или 2 (с некоторыми более сильными ограничениями). Но для применения компьютерного перебора остается по-прежнему слишком много вариантов.

Лемма 4.10. *Пусть $v, w \in \mathbb{Z}_2^4$ — два альтернированных вектора длины* 2. *Тогда* $\mathrm{supp}(v) \cap \mathrm{supp}(w) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Без потери общности $v = v_5$, $w = v_8$ (любая другая возможность сводится к этой перенумерацией базисных векторов). В этом случае $\Lambda(v_5) = (1, -1, 0, 0)$ и $\Lambda(v_8) = (0, 1, -1, 0)$ согласно лемме 4.9. Тогда

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Но условие $(*)$ нарушено:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

что опровергает предположение. □

Объединяя все эти результаты, мы имеем три возможности для векторов длины 2.

Случай 1. Не существует ни одного альтернированного вектора длины 2. Тогда

$$\begin{aligned} v_5 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0) \longmapsto (1, 1, b_{13}, b_{14}), \\ v_6 &= (\mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (1, b_{15}, 1, b_{16}), \\ v_7 &= (\mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (1, b_{17}, b_{18}, 1), \\ v_8 &= (0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (b_{19}, 1, 1, b_{20}), \\ v_9 &= (0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (b_{21}, 1, b_{22}, 1), \\ v_{10} &= (0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \longmapsto (b_{23}, b_{24}, 1, 1), \end{aligned}$$

где каждое число b_i, $i = 13, \ldots, 24$ равно 0 или 2. Запуская компьютерный перебор с использованием среды GAP ([8], [15]), мы нашли при каких значениях b_i условие $(*)$ выполнено на множестве $\{v_1, \ldots, v_{10}, v_{15}\}$. Оказывается, единственной возможностью в этом случае является следующая:

$$\begin{aligned}
v_5 &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,0) \longmapsto (1,1,0,0),\\
v_6 &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},0) \longmapsto (1,0,1,0),\\
v_7 &= (\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,0,0,1),\\
v_8 &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (0,1,1,0),\\
v_9 &= (0,\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (0,1,0,1),\\
v_{10} &= (0,0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (0,0,1,1).
\end{aligned}$$

Осталось проверить все возможности для чисел $b_{25},\dots,b_{28}$, каждое из которых может равняться 0 или 2, и чисел $a_{18},\dots,a_{28}$, каждое из которых может равняться 1 или -1, в следующем выражении:

$$\begin{aligned}
v_{11} &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (b_{25},1,a_{18},a_{19}),\\
v_{12} &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (1,b_{26},a_{21},a_{22}),\\
v_{13} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,a_{24},b_{27},a_{25}),\\
v_{14} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (1,a_{27},a_{28},b_{28}).
\end{aligned}$$

Перебор показывает, что условие $(*)$ не выполнено ни при каких значениях a_i и b_j.

Случай 2. Есть только один альтернированный вектор длины 2. Без потери общности это вектор v_5. Тогда

$$\begin{aligned}
v_5 &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,0) \longmapsto (1,-1,0,0),\\
v_6 &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},0) \longmapsto (1,b_{15},1,b_{16}),\\
v_7 &= (\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,b_{17},b_{18},1),\\
v_8 &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (b_{19},1,1,b_{20}),\\
v_9 &= (0,\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (b_{21},1,b_{22},1),\\
v_{10} &= (0,0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (b_{23},b_{24},1,1),
\end{aligned}$$

где каждое число b_i, $i = 15,\dots,24$ равно 0 или 2. Как и в предыдущем случае при помощи перебора мы ищем те значения b_i, при которых условие $(*)$ выполнено на множестве $\{v_1,\dots,v_{10},v_{15}\}$. В этом случае имеется две возможности:

$$\begin{aligned}
v_5 &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,0) \longmapsto (1,-1,0,0), & v_5 &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,0) \longmapsto (1,-1,0,0),\\
v_6 &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},0) \longmapsto (1,0,1,0), & v_6 &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},0) \longmapsto (1,0,1,0),\\
v_7 &= (\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,0,0,1), & v_7 &= (\mathbf{1},0,0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,0,0,1),\\
v_8 &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (0,1,1,0), & v_8 &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (0,1,1,0),\\
v_9 &= (0,\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (0,1,0,1), & v_9 &= (0,\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (0,1,0,1),\\
v_{10} &= (0,0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (0,0,1,1), & v_{10} &= (0,0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (0,2,1,1).
\end{aligned}$$

В обоих случаях можно проверить все оставшиеся возможности для чисел $b_{25},\dots,b_{28}$, каждое из которых может быть равно 0 или 2, и чисел $a_{18},\dots,a_{28}$, каждое из которых может быть равно 1 или -1, в следующем выражении.

$$\begin{aligned}
v_{11} &= (0,\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (b_{25},1,a_{18},a_{19}),\\
v_{12} &= (\mathbf{1},0,\mathbf{1},\mathbf{1}) \longmapsto (1,b_{26},a_{21},a_{22}),\\
v_{13} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},0,\mathbf{1}) \longmapsto (1,a_{24},b_{27},a_{25}),\\
v_{14} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},0) \longmapsto (1,a_{27},a_{28},b_{28}).
\end{aligned}$$

В этом случае также условие $(*)$ не выполнено ни при каких значениях параметров.

Случай 3. Имеется ровно два альтернированных вектора длины 2 с непересекающимися носителями. Без потери общности это — векторы v_5 и v_{10}. Нужно проверить следующую конфигурацию:

$$\begin{aligned}
v_5 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0) \longmapsto (1, -1, 0, 0),\\
v_6 &= (\mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (1, b_{15}, 1, b_{16}),\\
v_7 &= (\mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (1, b_{17}, b_{18}, 1),\\
v_8 &= (0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (b_{19}, 1, 1, b_{20}),\\
v_9 &= (0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (b_{21}, 1, b_{22}, 1),\\
v_{10} &= (0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \longmapsto (0, 0, 1, -1),
\end{aligned}$$

где каждое число b_i, $i = 15, \ldots, 22$ равно 0 или 2. Полный перебор в этом случае выделяет единственную возможность, при которой выполнено условие $(*)$:

$$\begin{aligned}
v_5 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0) \longmapsto (1, -1, 0, 0),\\
v_6 &= (\mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (1, 0, 1, 0),\\
v_7 &= (\mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (1, 0, 0, 1),\\
v_8 &= (0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (0, 1, 1, 0),\\
v_9 &= (0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (0, 1, 0, 1),\\
v_{10} &= (0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \longmapsto (0, 0, 1, -1).
\end{aligned}$$

Как и в предыдущих случаях необходимо осуществить перебор оставшихся параметров a_i и b_i в выражении:

$$\begin{aligned}
v_{11} &= (0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \longmapsto (b_{25}, 1, a_{18}, a_{19}),\\
v_{12} &= (\mathbf{1}, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \longmapsto (1, b_{26}, a_{21}, a_{22}),\\
v_{13} &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, \mathbf{1}) \longmapsto (1, a_{24}, b_{27}, a_{25}),\\
v_{14} &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \longmapsto (1, a_{27}, a_{28}, b_{28}).
\end{aligned}$$

В этом случае условие $(*)$ также не выполнено ни при каких значениях параметров.

Полное исследование всех трех случаев завершает доказательство несуществования характеристической функции из $U = {}_{\mathbb{R}}U_4$ в $\mathbb{Z}^4$. $\square$

5. Аддитивные свойства

В этом параграфе мы рассмотрим аддитивные свойства чисел Бухштабера. Часть утверждений следует из геометрических свойств универсальных комплексов.

Предложение 5.1.

1) Пусть $\sigma \in U_l$, $|\sigma| = k$. Тогда $\operatorname{link}_{U_l} \sigma \sim U_{l-k}$.

2) Существует невырожденное отображение из $U_l * U_k$ в U_{l+k}.

Аналогичные свойства выполнены для вещественных универсальных комплексов.

Доказательство. Доказательство приведено только в комплексном случае. Вещественный случай полностью ему аналогичен.

1) Каждый автоморфизм решетки $\mathbb{Z}^l$ определяет автоморфизм симплициального комплекса U_l. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что симплекс σ образован первыми k векторами стандартного координатного базиса.

Построим невырожденное отображение $f\colon U_{l-k} \to \operatorname{link}_{U_l}\sigma$. Для вершины $v=(v_1,\dots,v_{l-k})\in U_{l-k}$ положим $f(v)=(0,\dots,0,v_1,\dots,v_{l-k})\in U_l$. Это отображение симплициально и невырождено. Более того, его образ лежит в $\operatorname{link}_{U_l}\sigma$.

Теперь построим невырожденное отображение $g:\operatorname{link}_{U_l}\sigma\to U_{l-k}$. Пусть D — подгруппа решетки, порожденная вершинами симплекса σ. Поскольку D является прямым слагаемым, существует сюръективное отображение проекции на фактор-группу: $g:\mathbb{Z}^l\to\mathbb{Z}^l/D\cong\mathbb{Z}^{l-k}$. Покажем, что это отображение индуцирует невырожденное отображение $g\colon \operatorname{link}_{U_l}\sigma\to U_{l-k}$. Пусть $\tau\in\operatorname{link}_{U_l}\sigma$ или, другими словами, $\tau\sqcup\sigma$ — часть некоторого базиса решетки $\mathbb{Z}^l$. Если τ — максимальный симплекс комплекса $\operatorname{link}_{U_l}\sigma$, то $\tau\sqcup\sigma$ является базисом решетки. Тогда векторы $g(\tau\sqcup\sigma)=g(\tau)\sqcup g(\sigma)=g(\tau)\sqcup\{0\}$ порождают $\mathbb{Z}^{l-k}$. Поскольку $|g(\tau)|\leqslant|\tau|=l-k$, множество $g(\tau)$ является базисом решетки $\mathbb{Z}^{l-k}$, следовательно, $g(\tau)$ — симплекс U_{l-k}, удовлетворяющий условию $|g(\tau)|=|\tau|$. Это завершает доказательство первого утверждения.

2) Рассмотрим разложение $\mathbb{Z}^{l+k}=\mathbb{Z}^l\oplus\mathbb{Z}^k$. Пусть $h:U_l*U_k\to U_{l+k}$ — отображение, определенное правилом: U_l отображается на первое прямое слагаемое, а U_k — на второе прямое слагаемое очевидным образом. Непосредственно проверяется, что отображение h симплициально и невырождено. □

Это позволяет оценить r-числа джойна симплициальных комплексов (алгебраическое объяснение этих неравенств можно найти в [6]).

Предложение 5.2.

$$r(K*N)\leqslant r(K)+r(N), \tag{5.1}$$
$$r(K*N)\geqslant r(K)+\dim N+1, \tag{5.2}$$

$$r_{\mathbb{R}}(K*N)\leqslant r_{\mathbb{R}}(K)+r_{\mathbb{R}}(N),$$
$$r_{\mathbb{R}}(K*N)\geqslant r_{\mathbb{R}}(K)+\dim N+1.$$

Доказательство. Рассмотрим только комплексный случай (неравенства (5.1) и (5.2)). Существуют невырожденные отображения $f_1:K\to U_{l_1}$ и $f_2:N\to U_{l_2}$, где $l_1=r(K)$, $l_2=r(N)$. Значит существует невырожденное отображение $f_1*f_2:K*N\to U_{l_1}*U_{l_2}$. Композиция отображения f_1*f_2 с невырожденным отображением $h\colon U_{l_1}*U_{l_2}\to U_{l_1+l_2}$ дает невырожденное отображение из $K*N$ в $U_{l_1+l_2}$. Это завершает доказательство формулы 5.1.

Докажем теперь формулу 5.2. Пусть $l=r(K*N)$ и $\imath\colon K*N\to U_l$ — невырожденное отображение. Пусть σ — симплекс максимальной размерности комплекса N. Тогда определено невырожденное отображение из комплекса $\operatorname{link}_{K*N}\sigma=\operatorname{link}_N\sigma*K=K$ в комплекс $\operatorname{link}_{U_l}\Delta$, где $\Delta=\imath(\sigma)$, $|\Delta|=\dim N+1$. Но $\operatorname{link}_{U_l}\Delta\sim U_{l-\dim N-1}$, следовательно определено невырожденное отображение комплекса $\operatorname{link}_{K*N}\sigma=K$ в комплекс $U_{l-\dim N-1}$. Значит $r(K)\leqslant l-\dim N-1=r(K*N)-\dim N-1$. □

Замечание 5.3. Назовем комплекс K *комплексом максимального действия* (МД-комплексом), если $r(K)=\dim K+1$. Из предыдущего утверждения следует, что $r(K*N)=r(K)+r(N)$, если хотя бы один из комплексов K или N — МД-комплекс.

Замечание 5.4. Если P — простой многогранник и ∂P^* — МД-комплекс, то над P существует квазиторическое многообразие (см. предложение 2.10, а также работы [4], [3]).

В связи с предложением 5.2 возникает вопрос: верно ли, что для любых симплициальных комплексов K и N выполнены равенства $r(K*N)=r(K)+r(N)$, $r_{\mathbb{R}}(K*N)=r_{\mathbb{R}}(K)+r_{\mathbb{R}}(N)$? Это утверждение оказывается неверным, как будет показано ниже в этом параграфе.

Тем не менее, мы покажем, что эта формула верна для полных графов, даже если ни один из них не является МД-комплексом.

Предложение 5.5.

$$r_{\mathbb{R}}(K_a*K_b)=r_{\mathbb{R}}(K_a)+r_{\mathbb{R}}(K_b),$$
$$r(K_a*K_b)=r(K_a)+r(K_b).$$

Покажем, что из первой формулы следует вторая. Действительно, предположим, что $r(K_a * K_b) < r(K_a) + r(K_b)$. Тогда, согласно утверждениям 3.5, 3.11,

$$r_{\mathbb{R}}(K_a * K_b) \leqslant r(K_a * K_b) < r(K_a) + r(K_b) = r_{\mathbb{R}}(K_a) + r_{\mathbb{R}}(K_b).$$

Так что необходимо доказать только вещественный случай.

Рассмотрим невырожденное отображение $f\colon K * N \to {}_{\mathbb{R}}U_l$. Образы вершин комплекса K обозначим $x_i, i = 1, \ldots, m_K$, а образы вершин комплекса N обозначим $y_j, j = 1, \ldots, m_N$. Все эти образы можно рассматривать как ненулевые векторы пространства $\mathbb{Z}_2^l$. Из условия $(*)_{\mathbb{R}}$ следует, что $\{x_i\}_{i\in\sigma} \sqcup \{y_j\}_{j\in\tau}$ является линейно независимым множеством векторов, если $\sigma \in K$ и $\tau \in N$. Эквивалентно: $\{x_i\}_{i\in\sigma}$ — линейно независимы, $\{y_j\}_{j\in\tau}$ — линейно независимы и множества сумм $A = \{\sum\limits_{i\in\sigma} x_i \mid \sigma \in K, \sigma \neq \varnothing\}$ и $B = \{\sum\limits_{j\in\tau} y_j \mid \tau \in N, \tau \neq \varnothing\}$ не пересекаются.

Для частного случая полных графов $K = K_a, N = K_b$ условие невырожденности имеет вид: все векторы x_i различны при $i = 1, \ldots, a$, все векторы y_j различны при $j = 1, \ldots, b$, и множества $A = \{x_i\} \cup \{x_\alpha + x_\beta\}_{\alpha\neq\beta}$ и $B = \{y_j\} \cup \{x_\gamma + x_\delta\}_{\gamma\neq\delta}$ не пересекаются. Если это условие выполнено, назовем пару множеств $(\{x_i\}_{i=1,\ldots,p}, \{y_j\}_{j=1,\ldots,q})$ *хорошей парой*. Следующая лемма показывает, как можно строить новые хорошие пары из данной.

Лемма 5.6. *Если* $(\{x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_a\}, \{y_1, \ldots, y_\gamma, \ldots, y_b\})$ — *хорошая пара, то пара* $(\{x_1+y_\gamma, \ldots, x_{\alpha-1}+y_\gamma, x_\alpha, x_{\alpha+1}+y_\gamma, \ldots, x_a+y_\gamma\}, \{y_1+x_\alpha, \ldots, y_{\gamma-1}+x_\alpha, y_\gamma, y_{\gamma+1}+x_\alpha, \ldots, y_b+x_\alpha\})$ *является хорошей. Пара* $(\{x_1+x_\alpha, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_a+x_\alpha\}, \{y_1, \ldots, y_\gamma, \ldots, y_q\})$ *также является хорошей.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке. Заметим, что первое преобразование изменяет оба множества из пары, а второе преобразование меняет только одно из множеств. Обозначим через $t_{\alpha\gamma}$ первое преобразование, а через t^1_α — второе преобразование. Индекс 1 означает, что преобразование применено к первому множеству. Оба преобразования $t_{\alpha\gamma}$ и t^1_α идемпотентны. Следующая лемма показывает, что определенная композиция этих элементарных преобразований выглядит крайне просто, если ограничить рассмотрение лишь одним множеством.

Лемма 5.7. *Применение преобразования* ${}^1\Phi^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = t_{\alpha\delta} \circ t_{\beta\gamma} \circ t_{\beta\delta} \circ t_{\alpha\gamma}$ *к хорошей паре* $(\{x_i\}_{i=1,\ldots,a}, \{y_j\}_{j=1,\ldots,b})$ *при* $\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$ *дает новую хорошую пару, первое множество которой имеет вид* $\{x_1, \ldots, x_\alpha + y_\delta, \ldots, x_\beta + y_\delta, \ldots, x_a\}$.

Доказательство состоит в последовательном применении преобразований. Таким образом, преобразование ${}^1\Phi^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ преобразует первое множество, прибавляя заданный элемент второго множества к двум его элементам. При этом второе множество преобразуется достаточно сложно. Аналогично можно определить преобразование ${}^2\Phi^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$, прибавляющее элемент первого множества к двум элементам второго.

Лемма 5.8. *Пусть* $a, b > 1$ *и* b — *четное число. Если существует хорошая пара* $(S = \{x_i\}_{i=1,\ldots,a}, T = \{y_j\}_{j=1,\ldots,b})$ *в пространстве* $\mathbb{Z}_2^l$, *то существует также и хорошая пара* $(\{\tilde{x}_i\}_{i=1,\ldots,a}, \{\tilde{y}_j\}_{j=1,\ldots,b})$ *в пространстве* $\mathbb{Z}_2^l$, *у которой одно из множеств лежит в гиперплоскости.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную гиперплоскость. Например, в качестве гиперплоскости можно взять гиперплоскость Π, заданную уравнением $v_1 = 0$. Теперь наша цель — трансформировать заданную хорошую пару таким образом, чтобы множество T попало в гиперплоскость Π. Допустим существует ровно k элементов множества T, которые не лежат в гиперплоскости Π.

1) Покажем, что число k можно считать четным. Действительно, допустим k — нечетно. Так как b четно по условию, внутри гиперплоскости Π также лежит нечетное число векторов из множества T. Выберем произвольный вектор $y_\gamma \in T$, который не лежит в Π, и

применим к множеству T преобразование t_γ^2. Теперь векторами из T, лежащими вне плоскости, являются: вектор y_γ и все те векторы из множества T, которые лежали в плоскости Π до преобразования. Таким образом, после преобразования вне плоскости осталось четное число векторов.

2) Теперь используем индукцию по четному числу k. Если $k = 0$, то лемма доказана. Предположим, $k > 0$. Выберем любой вектор $x_\beta \in S$, $x_\beta \notin \Pi$. Если такого вектора не существует, то лемма доказана, поскольку $S \subseteq \Pi$. Выберем теперь другой вектор x_α из множества S (он существует в силу условия $a > 1$). Наконец, возьмем два вектора $y_\gamma, y_\delta \in T$, не лежащих в плоскости Π, и применим преобразование ${}^2\Phi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$. Оно добавляет вектор x_β к векторам y_γ и y_δ, тем самым помещая их в гиперплоскость Π, но не меняет остальные элементы множества T. Таким образом, число элементов множества T вне плоскости Π уменьшилось на 2 и можно применить предположение индукции. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 5.5.

Даны два полных графа K_a и K_b. Пусть k и n — наибольшие целые числа такие, что $2^k \leqslant a$ и $2^n \leqslant b$. Тогда $r_{\mathbb{R}}(K_a) = r_{\mathbb{R}}(K_{2^k}) = k+1$ и $r_{\mathbb{R}}(K_b) = r_{\mathbb{R}}(K_{2^n}) = n+1$. Предположим, что $r_{\mathbb{R}}(K_a * K_b) < r_{\mathbb{R}}(K_a) + r_{\mathbb{R}}(K_b)$. Тогда

$$r_{\mathbb{R}}(K_{2^k} * K_{2^n}) \leqslant r_{\mathbb{R}}(K_a * K_b) < r_{\mathbb{R}}(K_a) + r_{\mathbb{R}}(K_b) = r_{\mathbb{R}}(K_{2^k}) + r_{\mathbb{R}}(K_{2^n}).$$

Поэтому единственным случаем, требующим рассмотрения, является случай, когда оба числа a и b являются степенями двойки. С этого момента $a = 2^k$, $b = 2^n$.

Утверждается, что не существует невырожденного отображения из $K_{2^k} * K_{2^n}$ в ${}_{\mathbb{R}}U_{k+n+1}$. Докажем это утверждение индукцией по $k+n$. Предположим, что существует невырожденное отображение из $K_a * K_b$ в ${}_{\mathbb{R}}U_{k+n+1}$. Это означает, что существует хорошая пара (S, T), $|S| = a$, $|T| = b$ в пространстве $\mathbb{Z}_2^{k+n+1}$. Есть две возможности:

1) Одно из чисел a, b равно 1. Тогда один из рассматриваемых симплициальных комплексов является МД-комплексом, и предложение следует из замечания 5.3.

2) Ни одно из чисел a, b не равно 1. Тогда, согласно лемме 5.8, можно считать, что T лежит в некоторой гиперплоскости $\Pi \cong \mathbb{Z}_2^{k+n}$. Пусть $S_\Pi = S \cap \Pi$, а $s_\Pi = |S_\Pi|$. Существуют две возможности:

1') $s_\Pi \geqslant 2^{k-1}$. Тогда пара (S_Π, T) является хорошей парой в пространстве $\Pi \cong \mathbb{Z}_2^{k+n}$. Тогда существует невырожденное отображение из $K_{2^{k-1}} * K_{2^n}$ в ${}_{\mathbb{R}}U_{k+n}$. Это противоречит индуктивному предположению.

2') $s_\Pi < 2^{k-1}$. Тогда существует по меньшей мере $2^{k-1} + 1$ элементов S, которые не лежат в Π. Возьмем один из них, скажем, x_α и применим преобразование t_α^1 к паре. Это преобразование перемещает в Π все векторы множества S, которые были снаружи Π, кроме вектора x_α. После преобразования уже как минимум 2^{k-1} векторов множества S лежат в плоскости Π. Это сводит рассмотрение к случаю (1'). $\square$

Теперь мы приведем пример симплициальных комплексов, для которых аддитивность числа Бухштабера не выполняется.

Предложение 5.9. *Существуют два графа* Γ_1 *и* Γ_2 *такие, что* $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ *и* $s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1) + s_{\mathbb{R}}(\Gamma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим графы Γ_1 и Γ_2, изображенные на рис. 1 и 2. Граф Γ_1 называется графом Гретча. Граф Γ_2 является полным графом на 4 вершинах. Можно убедиться, что хроматическое число обоих графов равно 4. Согласно формуле (4):

$$r(\Gamma_1) = r(\Gamma_2) = r_{\mathbb{R}}(\Gamma_1) = r_{\mathbb{R}}(\Gamma_2) = 3.$$

Теперь мы покажем, что $r_{\mathbb{R}}(\Gamma_1 * \Gamma_2) \leqslant 5$. Для этого построим характеристическую функцию из $\Gamma_1 * \Gamma_2$ в ${}_{\mathbb{R}}U_5$. Требуется сопоставить ненулевой бинарный вектор $x_i \in \mathbb{Z}_2^5$ каждой вершине i графа Γ_1 и вектор y_j вершине j графа Γ_2. Как уже отмечалось ранее, условие $(*)_{\mathbb{R}}$ на характеристическую функцию эквивалентно следующему:

Смежным вершинам графа Γ_1 соответствуют различные векторы. Смежным вершинам графа Γ_2 соответствуют различные векторы. Пусть $A = \{x_i\} \cup \{x_{i_1} + x_{i_2}$ для всех ребер $\{i_1, i_2\}$ графа $\Gamma_1\}$ и $B = \{y_j\} \cup \{y_{j_1} + y_{j_2}$ для всех ребер $\{j_1, j_2\}$ графа $\Gamma_2\}$. Тогда A и B не пересекаются.

На рисунках 1 и 2 показано, как приписать векторы вершинам графов так, чтобы условие $(*)_{\mathbb{R}}$ выполнялось. Все векторы, приписанные вершинам графа Γ_1, имеют **1** в качестве последней координаты. Их попарные суммы, соответствующие ребрам, имеют 3 или 4 единицы в координатной записи. Но все векторы, приписанные вершинам графа Γ_2, и их попарные суммы имеют последнюю координату 0 и не более двух единиц в координатной записи. Поэтому множества A и B векторов, построенные по графам Γ_1 и Γ_2, не пересекаются.

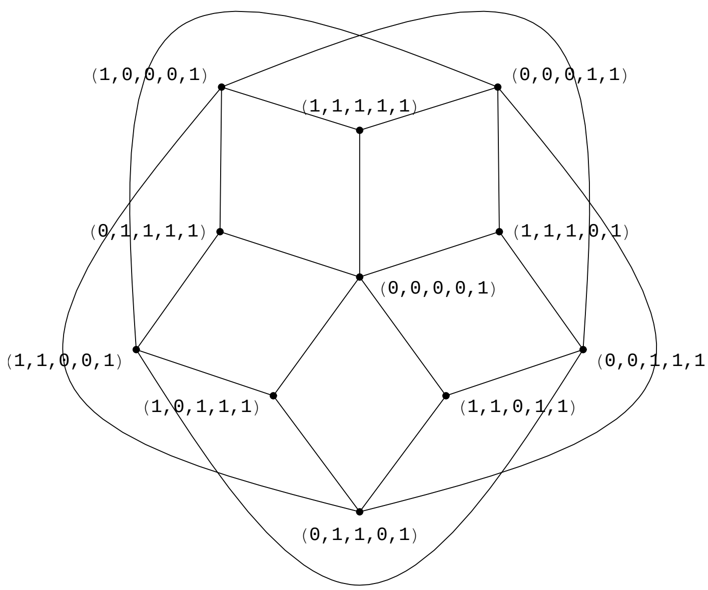

Рис. 1. Граф Гретча Γ_1

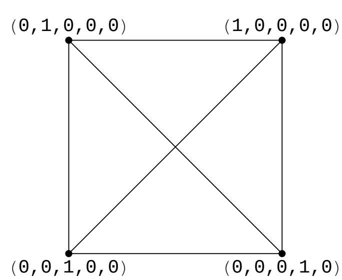

Рис. 2. Полный граф Γ_2

Теперь покажем, что $r(\Gamma_1 * \Gamma_2) \leqslant 5$. Для этого достаточно построить характеристическую функцию из комплекса $\Gamma_1 * \Gamma_2$ в решетку $\mathbb{Z}^5$. Сопоставим каждой вершине графов Γ_1 и Γ_2 целочисленный вектор, как указано на рис. 1 и 2 (только в этом случае мы считаем все векторы целочисленными). Осталось проверить выполнение условия $(*)$. Пусть σ — максимальный симплекс комплекса $\Gamma_1 * \Gamma_2$, $\sigma = \tau \sqcup \rho$, где $\tau = \{v_1, v_2\} \in \Gamma_1$, $\rho = \{u_1, u_2\} \in \Gamma_2$.

Пусть $k(v_1), k(v_2), k(u_1), k(u_2)$ — 5-мерные целочисленные векторы, отвечающие вершинам v_1, v_2, u_1, u_2. Рассмотрим целочисленную 4×5-матрицу A, строками которой являются векторы $k(v_1), k(v_2), k(u_1), k(u_2)$. Чтобы доказать, что $\{k(v_1), k(v_2), k(u_1), k(u_2)\}$ является унимодулярным множеством, мы покажем, что матрица A имеет минор, равный ± 1. Приведение матрицы $A \mod 2$ обладает минором M, ненулевым над $\mathbb{Z}_2$, поскольку векторы $\{k(v_1), k(v_2), k(u_1), k(u_2)\} \mod 2$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_2$ согласно предыдущему абзацу. Следовательно, M нечетен. Матрица, соответствующая минору M, имеет, по меньшей мере, две строки с одной единицей (строки, приписанные вершинам графа Γ_2). Поэтому M равен определителю некоторой 2×2-матрицы, составленной из 0 и 1. Следовательно, $M = \pm 1$, согласно рассуждениям аналогичным доказательству леммы 3.8.

Таким образом, мы доказали, что $r(\Gamma_1 * \Gamma_2) < r(\Gamma_1) + r(\Gamma_2)$ и $r_{\mathbb{R}}(\Gamma_1 * \Gamma_2) < r_{\mathbb{R}}(\Gamma_1) + r_{\mathbb{R}}(\Gamma_2)$. Значит, $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) > s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ и $s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1 * \Gamma_2) > s_{\mathbb{R}}(\Gamma_1) + s_{\mathbb{R}}(\Gamma_2)$. □

6. Аналог хроматического многочлена

В этом параграфе мы продолжим аналогию числа Бухштабера и хроматического числа, которая используется на протяжении всей работы. Теперь мы будем работать исключительно с вещественным числом Бухштабера. Будет показано, что для симплициальных комплексов существует аналог хроматического многочлена, считающий число вещественных характеристических функций. Для начала напомним классическую теорию хроматических многочленов графов.

Пусть Γ — конечный простой граф или, эквивалентно, 1-мерный симплициальный комплекс. Для каждого неотрицательного числа k обозначим через $n_{\Gamma,k}$ количество различных правильных раскрасок вершин графа Γ не более, чем в k цветов. Известно ([1],[16],[5]), что существует такой многочлен $\chi_\Gamma(t)$ с целыми коэффициентами, что $n_{\Gamma,k} = \chi_\Gamma(k)$. Этот многочлен (очевидно, единственный) называется хроматическим многочленом графа Γ. Его основные свойства сформулированы в следующем предложении ([16],[14],[5]).

Предложение 6.1.

1) Если V — множество вершин графа Γ, а E — множество его ребер, то $\chi_\Gamma(t) = \sum\limits_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} t^{c(A)}$, где $c(A)$ — число компонент связности подграфа $H = (V, A) \subseteq (V, E)$, порожденного подмножеством ребер A.

2) Степень многочлена $\chi_\Gamma(t)$ равна числу вершин $|V|$. Старший коэффициент многочлена равен 1, а коэффициент при $t^{|V|-1}$ равен $-|E|$.

3) Если $G = G_1 \sqcup G_2$, то $\chi_G(t) = \chi_{G_1}(t)\chi_{G_2}(t)$.

4) Хроматическое число можно вычислить, используя хроматический многочлен, при помощи формулы $\gamma(\Gamma) = \min\{t \in \mathbb{N}, \chi_\Gamma(t) \neq 0\}$.

Теперь напомним основные определения из теории матроидов. Пусть M — конечное множество, на подмножествах которого определена *ранговая функция*: для каждого $A \subseteq M$, $\mathrm{rk}(A) \in \mathbb{Z}_\geqslant$. Она должна удовлетворять следующим трем условиям:

1) $\mathrm{rk}(A) \leqslant |A|$ для всех подмножеств $A \subseteq M$;

2) Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{rk}(A) \leqslant \mathrm{rk}(B)$;

3) Для любых подмножеств $A, B \subseteq M$ выполнено $\mathrm{rk}(A \cap B) + \mathrm{rk}(A \cup B) \leqslant \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$.

Множество M с заданной на его подмножествах ранговой функцией называется матроидом. Подмножество $A \subseteq M$ называется независимым, если $\mathrm{rk}(A) = |A|$.

Пример 6.2. Рассмотрим конечномерное векторное пространство $\mathbb{Z}_2^m$ и некоторое множество его векторов $B \subseteq \mathbb{Z}_2^m$. Для подмножеств векторов $A \subseteq B$ определен ранг $\mathrm{rk}(A)$ в смысле линейной алгебры (как размерность линейной оболочки). Указанная функция $\mathrm{rk}(\cdot)$ удовлетворяет трем свойствам из определения матроида. Тем самым на произвольном подмножестве B конечного векторного пространства определена структура матроида. Такие матроиды называют бинарными. Это единственный пример матроида, который мы будем использовать в дальнейшем. Общую информацию о матроидах см. в [11].

Пусть M — конечный матроид. Рассмотрим следующий многочлен:

$$P_M(t) = \sum_{A \subseteq M} (-1)^{|A|} t^{\operatorname{rk}(M) - \operatorname{rk}(A)}, \tag{6.1}$$

где суммирование ведется по всем подмножествам матроида M. Многочлен $P_M(t)$ называется характеристическим многочленом матроида M.

Пусть теперь K — произвольный конечный симплициальный комплекс на m вершинах. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{Z}_2^m$ с зафиксированным базисом $\{e_i\}, i = 1, \ldots, m$. Пусть $F_{bin}\colon K \setminus \varnothing \to \mathbb{Z}_2^m$ — *бинарная представляющая функция*, определенная на симплексах по формуле $F_{bin}(\sigma) = e_\sigma = \sum_{i \in \sigma} e_i$. Отображение F_{bin}, очевидно, инъективно. Пусть $M(K) = F_{bin}(K \setminus \varnothing) \subseteq \mathbb{Z}_2^m$. Тогда $F_{bin}\colon K \setminus \varnothing \to M(K)$ является биекцией. Множество $M(K) \subseteq \mathbb{Z}_2^m$ обладает структурой бинарного матроида согласно примеру 6.2. Таким образом, каждому симплициальному комплексу K сопоставляется матроид $M(K)$.

Пример 6.3. Пусть $\Gamma = (V, E)$ — простой граф на множестве V вершин, $|V| = m$, E — множество ребер. В этом случае $M(\Gamma) = \{e_i \in \mathbb{Z}_2^m \mid i \in V\} \sqcup \{e_i + e_j \in \mathbb{Z}_2^m \mid \{i,j\} \in E\}$.

Лемма 6.4. *Пусть $\Gamma = (V, E)$ — связный простой граф, $|V| = m$ и пусть $Z \subseteq V$. Тогда $\operatorname{rk}(F_{bin}(Z \sqcup E)) = m - 1$, если $Z = \varnothing$, и $\operatorname{rk}(F_{bin}(Z \sqcup E)) = m$, если $Z \neq \varnothing$.*

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{rk}(F_{bin}(Z \sqcup E)) \leqslant \operatorname{rk}(\mathbb{Z}_2^m) = m$. Пусть T — максимальное дерево графа Γ с множеством ребер E_T, и $M = F_{bin}(E_T) \subset \mathbb{Z}_2^m$. Предположим, что для некоторого множества ребер $B \subseteq E_T, B \neq \varnothing$ выполнено линейное соотношение

$$\sum_{e \in B} F_{bin}(e) = 0 \text{ в } \mathbb{Z}_2^m. \tag{6.2}$$

Рассмотрим граф $H \subseteq T$, $H = (V, B)$. Степень каждой его вершины — четная, согласно (6.2), поэтому он содержит простой цикл. Это противоречит тому, что $H \subseteq T$, а T — дерево. Полученное противоречие показывает, что на множестве $M = F_{bin}(E_T) \subseteq \mathbb{Z}_2^m$ нет линейных соотношений. Следовательно, $\operatorname{rk} F_{bin}(E_T) = |E_T| = m-1$. Значит $\operatorname{rk}(F_{bin}(Z \sqcup E)) \geqslant \operatorname{rk}(F_{bin}(E)) \geqslant \operatorname{rk}(F_{bin}(E_T)) = m - 1$.

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-линейный функционал $\epsilon\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$, $\epsilon((a_1, \ldots, a_m)) = \sum_{i=1}^m a_i$. Тогда $F_{bin}(E) \subseteq \operatorname{Ker}(\epsilon)$, поскольку для каждого ребра $e \in E$ вектор $F_{bin}(e)$ имеет в точности две ненулевые координаты. Таким образом, $\operatorname{rk}(F_{bin}(E)) \leqslant \operatorname{rk}(\operatorname{Ker}(\epsilon)) = m - 1$, что составляет первую часть утверждения.

Пусть теперь $Z \subseteq V$ и $Z \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную вершину $i \in Z$ и множество $N = F_{bin}(\{i\}) \sqcup F_{bin}(E_T)$, где E_T — множество ребер некоторого максимального дерева T. Вектор $F_{bin}(i) \in \mathbb{Z}_2^m$ не лежит в гиперплоскости $\operatorname{Ker}(\epsilon)$, значит N — линейно независимое множество векторов. Так как $|N| = m$, получаем равенство $\operatorname{rk}(F_{bin}(Z \sqcup E)) \geqslant \operatorname{rk}(F_{bin}(\{v\}) \sqcup F_{bin}(E_T)) = m$, что завершает доказательство второй части утверждения. $\square$

Замечание 6.5. В литературе часто встречается понятие графического матроида, ассоциированного с графом. Заметим, что это понятие отличается от матроида $M(\Gamma)$, введенного выше.

С каждым симплициальным комплексом K ассоциирован матроид $M(K)$. Характеристический многочлен этого матроида является инвариантом симплициального комплекса. Теперь мы сформулируем основное утверждение, обобщающее свойства хроматического многочлена графа.

Теорема 6.6. *Рассмотрим симплициальный комплекс K с m вершинами и k непустыми симплексами. Пусть $P_{M(K)}(t)$ — характеристический многочлен матроида $M(K)$. Тогда*

1) Многочлен $P_{M(K)}(t)$ имеет степень m. Его старший коэффициент равен 1, а коэффициент при t^{m-1} равен $-k$, таким образом, $P_{M(K)}(t) = t^m - kt^{m-1} + \ldots$.

2) Если $K = K_1 \sqcup K_2$, то $P_{M(K)}(t) = P_{M(K_1)}(t)P_{M(K_2)}(t)$.

3) Число невырожденных симплициальных отображений из K в ${}_{\mathbb{R}}U_l$ равно $P_{M(K)}(2^l)$.

4) Если Γ — одномерный симплициальный комплекс, то

$$P_{M(\Gamma)}(t) = \chi_\Gamma(t-1),$$

где $\chi_\Gamma(t)$ — хроматический многочлен графа Γ.

Доказательство. Характеристический многочлен матроида $M(K)$ определяется формулой

$$P_{M(K)}(t) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sum_{A\subseteq M(K),|A|=i} t^{\mathrm{rk}(M(K))-\mathrm{rk}(A)}. \tag{6.3}$$

1) Заметим, что $\mathrm{rk}(M(K)) = m$. Действительно, $rk(M(K)) \leqslant rk(\mathbb{Z}_2^m) = m$. С другой стороны, $M(K)$ содержит множество $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $\mathrm{rk}(B) = m$. Следовательно, из формулы (6.3) получаем $\deg(P_{M(K)}) \leqslant m$. Единственным слагаемым в (6.3), вносящим вклад в коэффициент при t^m, является пустое множество векторов. Следовательно, $\deg(P_{M(K)}) = m$ и старший коэффициент многочлена $P_{M(K)}(t)$ равен 1.

Чтобы найти коэффициент a_{m-1} при t^{m-1} нужно найти все подмножества векторов $A \subseteq M(K)$ с условием $\mathrm{rk}(A) = 1$. Но такими подмножествами могут быть только одноэлементные множества. Действительно, каждые два ненулевых вектора пространства $\mathbb{Z}_2^m$ порождают двумерную плоскость, поэтому если $|A| > 1$, то $\mathrm{rk}(A) > 1$. Следовательно, каждое одноэлементное множество вносит вклад -1 в коэффициент a_{m-1} в формуле (6.3). Поэтому $a_{m-1} = -k$, где k — количество непустых симплексов комплекса K.

2) Каждый непустой симплекс комплекса $K = K_1 \sqcup K_2$ принадлежит либо K_1, либо K_2. Следовательно, $A \subseteq M(K_1 \sqcup K_2)$ тогда и только тогда, когда $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \subseteq M(K_1)$ и $A_2 \subseteq M(K_2)$. В этом случае $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_1) + \mathrm{rk}(A_2)$. Имеем

$$P_{M(K)}(t) = \sum_{A\subseteq M(K)} (-1)^{|A|} t^{\mathrm{rk}(M(K))-\mathrm{rk}(A)} =$$

$$= \sum_{A_1\subseteq M(K_1),A_2\subseteq M(K_2)} (-1)^{|A_1|+|A_2|} t^{\mathrm{rk}(M(K_1))-\mathrm{rk}(A_1)+\mathrm{rk}(M(K_2))-\mathrm{rk}(A_2)} =$$

$$= P_{M(K_1)}(t)P_{M(K_2)}(t).$$

3) Невырожденное симплициальное отображение $f\colon K \to {}_{\mathbb{R}}U_l$ является характеристической функцией из K в $\mathbb{Z}_2^l$. Значения характеристической функции задаются набором бинарных l-векторов $\{v_i \in \mathbb{Z}_2^l, i = 1, \ldots, m\}$, удовлетворяющим условию $(*)_{\mathbb{R}}$: для каждого симплекса $\sigma \in K$ множество векторов $\{v_i \mid i \in \sigma\}$ линейно независимо. Это условие можно переформулировать в следующем виде: для каждого симплекса $\sigma \in K$ выполнено неравенство

$$\sum_{i\in\sigma} v_i \neq 0. \tag{6.4}$$

Требуется найти количество m-наборов l-векторов, удовлетворяющих этим неравенствам при всех $\sigma \in K$. Пусть $E = \{(v_1, \ldots, v_m) \mid v_i \in \mathbb{Z}_2^l\}$ — множество всех m-наборов l-векторов. Тогда $E = (\mathbb{Z}_2^l)^m$ и $|E| = 2^{lm}$. Обозначим через S множество всех m-наборов $(v_1, \ldots, v_m)$, удовлетворяющих (6.4) для каждого симплекса $\sigma \in K \setminus \varnothing$. Таким образом, необходимо найти $|S|$. Для этого мы воспользуемся формулой включения-исключения.

Пусть $A \subseteq K \backslash \varnothing$ — некоторое множество непустых симплексов комплекса K. Рассмотрим систему уравнений

$$\left\{\sum_{i\in\sigma} v_i = 0\right\} \qquad (\sigma \in A), \tag{6.5}$$

где уравнения индексированы симплексами из множества A. В этой системе каждая переменная является l-вектором, который можно записать в координатном виде $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^l), v_i^j \in \mathbb{Z}_2$. Тогда система (6.5) переписывается в виде системы линейных над $\mathbb{Z}_2$ уравнений на координаты векторов:

$$\begin{cases} \left\{\sum_{i\in\sigma} v_i^1 = 0\right\} \qquad (\sigma \in A) \\ \qquad\qquad \dots \\ \left\{\sum_{i\in\sigma} v_i^l = 0\right\} \qquad (\sigma \in A). \end{cases} \tag{6.6}$$

В этой системе $l \cdot m$ неизвестных: ими являются v_i^j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$. Чтобы зафиксировать обозначения, упорядочим неизвестные следующим образом:

$$(v_1^1, \dots, v_m^1, v_1^2, \dots, v_m^2, \dots, v_1^l, \dots, v_m^l)$$

— вначале выписаны первые координаты всех векторов, затем вторые координаты и т.д. Система (6.6) содержит $|A| \cdot l$ уравнений, однако не все из этих уравнений линейно независимы. Найдем ранг матрицы B линейной системы (6.6). Легко видеть, что матрица B — блочно диагональная с блоками B_j. Каждый блок B_j задает уравнения на j-ые координаты векторов v_i.

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{B_l} \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Каждый блок B_i имеет $|A|$ строк и m столбцов. Более того, все блоки B_j равны между собой, и, согласно (6.6), строками матрицы B_j являются векторы $e_\sigma = F_{bin}(\sigma) \in \mathbb{Z}_2^m$ при $\sigma \in A$. Таким образом, $\mathrm{rk}(B_i)$ равен рангу множества $F_{bin}(A)$ матроида $M(K)$. Тогда ранг матрицы B линейной системы (6.6) равен $\mathrm{rk}(B) = l \cdot \mathrm{rk}_{M(K)}(F_{bin}(A))$.

Пусть $S_A \in E$ обозначает множество m-наборов l-векторов, являющихся решениями системы (6.5). Тогда

$$|S_A| = 2^{l\cdot m - l\cdot \mathrm{rk}_{M(K)}(F_{bin}(A))} = (2^l)^{m - \mathrm{rk}_{M(K)}(F_{bin}(A))}, \tag{6.8}$$

поскольку система (6.5) эквивалентна линейной системе (6.6).

Набор из m векторов $(v_1, \dots, v_m)$ удовлетворяет неравенствам (6.4) в том и только том случае, когда он не удовлетворяет равенствам $\sum\limits_{i\in\sigma} v_i = 0$ при всех $\sigma \in K \setminus \varnothing$. Значит

$$S = E \setminus \bigcup_{\sigma\in K\setminus\varnothing} S_{\{\sigma\}}. \tag{6.9}$$

Тогда

$$|S| = |E| - \left|\bigcup_{\sigma\in K\setminus\varnothing} S_{\{\sigma\}}\right|. \tag{6.10}$$

Если $A \subseteq K \setminus \varnothing$ то, по определению, $S_A = \bigcap\limits_{\sigma \in A} S_{\{\sigma\}}$. Чтобы найти $\left|\bigcup\limits_{\sigma \in K\setminus\varnothing} S_{\{\sigma\}}\right|$, применим формулу включения-исключения к множествам $S_{\{\sigma\}}, \sigma \in K \setminus \varnothing$:

$$\left|\bigcup_{\sigma \in K\setminus\varnothing} S_{\{\sigma\}}\right| = \sum_{A\subseteq K\setminus\varnothing, |A|>0} (-1)^{|A|-1} \left|\bigcap_{\sigma\in A} S_{\{\sigma\}}\right| = \sum_{A\subseteq K\setminus\varnothing, |A|>0} (-1)^{|A|-1}|S_A|$$

Тогда, согласно (6.10) и (6.8), получаем

$$|S| = |E| + \sum_{A\subseteq K\setminus\varnothing, |A|>0} (-1)^{|A|}|S_A| = \sum_{A\subseteq M(K)} (-1)^{|A|}(2^l)^{m-\mathrm{rk}_{M(K)}(F_{bin}(A))} = P_{M(K)}(2^l),$$

что и требовалось доказать.

4) Пусть $\Gamma = (V, E)$ — конечный граф. Тогда $\Gamma \setminus \varnothing = V \sqcup E$ и каждое подмножество $A \subseteq \Gamma \setminus \varnothing$ непустых симплексов может быть представлено в виде $A = A_V \sqcup A_E$, $A_V \subseteq V, A_E \subseteq E$. В последующих рассуждениях rk обозначает ранговую функцию матроида $M(\Gamma)$. Имеем

$$\begin{aligned} P_{M(\Gamma)}(t) &= \sum_{A\subseteq M(\Gamma)} (-1)^{|A|} t^{m-\mathrm{rk}(A)} = \\ &= \sum_{A_V\subseteq V, A_E\subseteq E} (-1)^{|A_E|+|A_V|} t^{m-\mathrm{rk}(F_{bin}(A_E\sqcup A_V))} = \\ &= \sum_{A_E\subseteq E} (-1)^{|A_E|} \left(\sum_{A_V\subseteq V} (-1)^{|A_V|} t^{m-\mathrm{rk}(F_{bin}(A_V\sqcup A_E))} \right). \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Зафиксируем некоторое множество ребер $A_E \subseteq E$. Тогда определен подграф $H = (V, A_E)$ с тем же набором вершин, что и исходный граф Γ. Пусть c — количество компонент связности графа H:

$$H = \bigsqcup_{i=1}^{c} H^i,$$

где $H^i = (V^i, A_E^i)$, так что $\bigsqcup_{i=1}^c V^i = V$, и $\bigsqcup_{i=1}^c A_E^i = A_E$. Обозначим через m_i число вершин i-ой компоненты: $m_i = |V^i|$. Для произвольного множества вершин $A_V \subseteq V$ рассмотрим множества $A_V^i = A_V \cap V^i$.

Множество $F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i) \subseteq M(\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}_2^m$ лежит в координатном векторном подпространстве $W_i \subseteq \mathbb{Z}_2^m$, порожденном векторами e_j при $j \in V^i$. Поскольку плоскости W_i — независимы, имеем $\mathrm{rk}\left(F_{bin}\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{c} A_V^i \sqcup A_E^i\right)\right) = \mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^1 \sqcup A_E^1)) + \ldots + \mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^c \sqcup A_E^c))$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{A_V\subseteq V} (-1)^{|A_V|} t^{m-\mathrm{rk}(F_{bin}(A_V\sqcup A_E))} = \\ &= \sum_{\substack{A_V^1\subseteq V^1\\ \ldots \\ A_V^c\subseteq V^c}} (-1)^{|A_{V^1}|+\ldots+|A_{V^c}|} t^{m_1+\ldots+m_c-\mathrm{rk}\left(F_{bin}\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{c} A_V^i\sqcup A_E^i\right)\right)} = \\ &= \prod_{i=1}^{c} \left[\sum_{A_V^i\subseteq V^i} (-1)^{|A_V^i|} t^{m_i-rk(F_{bin}(A_V^i\sqcup A_E^i))} \right]. \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Теперь при помощи леммы 6.4 можно найти $\mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i))$. Действительно, подграф $H_i = (V^i, A_E^i)$ связен и $A_V^i \subseteq V^i$. Значит $\mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i)) = m_i - 1$, если $A_V^i = \varnothing$, и $\mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i)) = m_i$ в противном случае. Тогда

$$\sum_{A_V^i \subseteq V^i} (-1)^{|A_V^i|} t^{m_i - \mathrm{rk}(F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i))} = t + \sum_{A_V^i \subseteq V^i, A_V^i \neq \varnothing} (-1)^{|A_V^i|} =$$
$$= t + \sum_{j=1}^{m_i} (-1)^j \binom{m_i}{j} = t - 1. \quad (6.13)$$

Подставляя (6.13) в (6.12), получаем:

$$\sum_{A_V \subseteq V} (-1)^{|A_V|} t^{m - \mathrm{rk}(F_{bin}(A_V \sqcup A_E))} = \prod_{i=1}^{c} \left[\sum_{A_V^i \subseteq V^i} (-1)^{|A_V^i|} t^{m_i - rk(F_{bin}(A_V^i \sqcup A_E^i))} \right] = (t-1)^c. \quad (6.14)$$

Теперь подставим (6.14) в (6.11):

$$P_{M(\Gamma)}(t) = \sum_{A_E \subseteq E} (-1)^{|A_E|} \left(\sum_{A_V \subseteq V} (-1)^{|A_V|} t^{m - \mathrm{rk}(F_{bin}(A_V \sqcup A_E))} \right) =$$
$$= \sum_{A_E \subseteq E} (-1)^{|A_E|} (t-1)^{c(A_E)},$$

где $c(A_E)$ — количество связных компонент подграфа $H = (V, A_E)$. Следовательно,

$$P_{M(\Gamma)}(t) = \sum_{A_E \subseteq E} (-1)^{|A_E|} (t-1)^{c(A_E)} = \chi_\Gamma(t-1). \quad (6.15)$$

Последнее равенство следует из предложения 6.1. $\square$

Следствие 6.7. *Число $r_{\mathbb{R}}(K)$ может быть вычислено по формуле $r_{\mathbb{R}}(K) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid P_{M(K)}(2^l) \neq 0\}$.*

Доказательство. Число $r_{\mathbb{R}}(K)$ является наименьшим натуральным числом l, для которого существует хотя бы одна вещественная характеристическая функция из комплекса K в $\mathbb{Z}_2^l$. $\square$

Общие теоремы о характеристических многочленах матроидов применимы к многочлену $P_{M(K)}(t)$. В работе [14], например, показано, что характеристический многочлен матроида имеет знакопеременные коэффициенты. Модули коэффициентов многочлена $P_{M(K)}(t)$ определяются комбинаторикой матроида $M(K)$ [14]. Многочлен $P_{M(K)}(t)$ может быть вычислен в терминах функции Мебиуса частично упорядоченного множества плоскостей матроида $M(K)$.

Вычислим характеристический многочлен $P_{M(K)}(t)$ для некоторых симплициальных комплексов.

Пример 6.8. Если K — одномерный, то, согласно предложению 6.6, $P_{M(K)}(t)$ выражается через хроматический многочлен $\chi_K(t)$. Из свойств 3 и 4 предложения 6.6 и предложения 6.1 следует равенство (1.4): $r_{\mathbb{R}}(K) = \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$, доказанное ранее другим методом. В частном случае получаем формулу для полного графа: $P_{M(K_n)}(t) = (t-1)\,(t-2)\,\ldots\,(t-n)$.

Пример 6.9. Рассмотрим $(n-1)$-мерный симплекс Δ_{n-1}. Не существует невырожденного отображения комплекса Δ_{n-1} в комплекс ${}_{\mathbb{R}}U_l$ при $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит числа

$2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ являются корнями многочлена $P_{M(K)}(t)$. Поскольку $\deg(P_{M(K)}(t)) = n$, а старший коэффициент равен 1, имеем равенство $P_{M(K)}(t) = (t-1)(t-2)(t-4)\dots(t-2^{n-1})$.

Матроид $M(\Delta_{n-1})$ является бинарным матроидом $\mathbb{Z}_2^n \setminus \{0\}$ и совпадает с матроидом проективного пространства $\mathbb{PZ}_2^n$. Таким образом, предъявлена явная формула для характеристического многочлена этих матроидов.

Пример 6.10. Пусть теперь K является границей симплекса, $K = \partial\Delta_{n-1}$. Вычислим $P_{M(K)}(t)$, используя свойство 3 предложения 6.6. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$ и найдем количество невырожденных вещественных характеристических функций из K в $\mathbb{Z}_2^l$. Пусть $v_i \in \mathbb{Z}_2^l$ — вектор, соответствующий вершине $i \in V(K)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда всякое $(n-1)$-подмножество множества $\{v_1, \dots, v_n\}$ должно быть линейно независимо, согласно условию $(*)_{\mathbb{R}}$. Имеется две возможности.

A) Все векторы v_i линейно независимы. Характеристическая функция с таким свойством является характеристической функцией из симплекса Δ_{n-1} в $\mathbb{Z}_2^l$. Существует ровно $P_{M(\Delta_{n-1})}(2^l)$ таких характеристических функций.

B) Множество $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависимо. Тогда можно показать, что $v_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$, в то время как $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ — линейно независимое множество. Количество таких характеристических функций равно числу характеристических функций из Δ_{n-2} в ${}_{\mathbb{R}}U_l$, то есть $P_{M(\Delta_{n-2})}(2^l)$.

Таким образом, $P_{M(K)}(t) = P_{M(\Delta_{n-1})}(t) + P_{M(\Delta_{n-2})}(t)$, поскольку эти многочлены совпадают в бесконечном числе точек. Наконец, получаем $P_{M(\partial\Delta_{n-1})} = (t-1)(t-2)(t-4)\dots(t-2^{n-2})(t-(2^{n-1}-1))$.

Пример 6.11. Рассмотрим остов коразмерности 2 симплекса: $K = \Delta_{n-1}^{(n-3)}$, $n > 3$. Используя рассуждения аналогичные предыдущему пункту, можно показать, что $P_{M(K)}(t) = P_{M(\Delta_{n-1})}(t) + (n+1)P_{M(\Delta_{n-2})}(t)$. Значит $P_{M(K)}(t) = (t-1)(t-2)(t-4)\dots(t-(2^{n-1}-n-1))$.

В случае $n = 4$ имеем $P_{M(\Delta_3^{(1)})}(t) = (t-1)(t-2)(t-4)(t-(8-5)) = (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$. Это совпадает с результатом примера 6.8 для полного графа $K_4 = \Delta_3^{(1)}$.

Список литературы

[1] G. D. Birkhoff, “A determinant formula for the number of ways of coloring a map”, *Ann. of Math(2)*, **14**, (1912), 42-46.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра”, *УМН*, **55**:5, (2000), 3-106.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2004.

[4] M. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2, (1991), 417–451.

[5] F. M. Dong, K. M. Koh, K. L. Teo, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*, World Scientific Publishing Company, 2005.

[6] Н. Ю. Ероховец, “Инвариант Бухштабера простых многогранников”, *УМН*, **63**:5, (2008), 187—188.

[7] Yukiko Fukukawa and Mikiya Masuda, *Buchstaber invariants of skeleta of a simplex*, arXiv: 0908.3448.

[8] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, http://www.gap-system.org, 2008.

[9] И. В. Изместьев, “Трехмерные многообразия, определяемые раскраской граней простого многогранника”, *Математические заметки*, **69**:3, (2001), 375-382.

[10] Wilberd van der Kallen, “Homology stability for linear groups”, *Inventiones Mathematicae*, **60**:3, (1980).

[11] J.P.S. Kung, *A source book in matroid theory*, Birkhauser, 1986.

[12] Hisashi Nakayama and Yasuzo Nishimura, “The orientability of small covers and coloring simple polytopes”, *Osaka J. Math.*, **42**:1, (2005), 243–256.

[13] G. Reisner, “Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings”, *Advances in Math.*, **21**:1, (1976), 30–49.

[14] G.-C. Rota, “On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Mobius Functions”, *Probability Theory and Related Fields*, **2**:4, (1964).

[15] F. Effenberger and J. Spreer, `simpcomp` – *a* `GAP` *toolkit for simplicial complexes, Version 1.3.3*, http://www.igt.uni-stuttgart.de/LstDiffgeo/simpcomp, 2010.

[16] H. Whitney, “A logical expansion in mathematics”, *Bull. Amer. math. Soc.*, **38**, (1932), 572-579.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 сентября 2011 г.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00694-а и грантом Правительства РФ №2010-220-01-077 (договор №11.634.31.005).

Ayzenberg A. A. Connection between Buchstaber invariants and generalized chromatic numbers. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 113–139.

ABSTRACT

Let K be a combinatorial simplicial complex. The work is devoted to $s(K)$ and $s_R(K)$ – complex and real Buchstaber numbers which are combinatorial invariants of a simplicial complex K. The main tool in the study of these invariants is the notion of characteristic function, which can be regarded as an analogue of proper coloring in the graph theory. This analogy allows to prove estimations connecting Buchstaber numbers and chromatic number. It is shown in the work that real and complex Buchstaber numbers are not equal on the class of simplicial complexes. Also we provide an example of simplicial complexes K and L such that $s(K * L) \neq s(K) + s(L)$. The similarity between real Buchstaber number and chromatic number led to the notion of characteristic polynomial of simplicial complex. This polynomial takes values equal to the number of characteristic functions and possesses properties similar to those of a chromatic polynomial of a graph.
The main results of the paper were reported on the section talk at the International conference "Toric Topology and Automorphic Functions"(September, 5-10th, 2011, Khabarovsk, Russia).

Key words: *simplicial complex, Buchstaber invariant, characteristic function, linearly independent coloring, chromatic number, chromatic polynomial, binary matroid.*