ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 2. С. 140–148

УДК 519.116+511.556
MSC2010 11F20 11F27

© Н. В. Бударина, В. А. Быковский[1]

Арифметическая природа тождеств для тройного и пятикратного произведений

В работе предлагается новое доказательство разложений тэта-функций, скрученных с квадратичными характерами по модулю 4 и 3, в бесконечное произведение. Оно опирается на метод логарифмического дифференцирования Эйлера и простейшие арифметические соображения.

Ключевые слова: *тэта-функция, тождества Лиувилля, бесконечное произведение.*

1. Введение

Во многих разделах математики особой популярностью пользуются два тождества. Во первых, это разложение в ряд *тройного произведения*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+xq^{2k-1})(1+x^{-1}q^{2k-1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^m q^{m^2}, \tag{1}$$

которое путем последовательных замен $q \to q^4$ и $x \to -x^2q^4$ преобразуется к виду

$$q(x-x^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{8k})(1-x^2q^{8k})(1-x^{-2}q^{8k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_{-4}(m)x^m q^{m^2}, \tag{2}$$

где

$$\chi_{-4}(m) = \left(\frac{-4}{m}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } m - \text{четно} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}, & \text{если } m - \text{нечетно} \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 4.

Во втором случае речь идет о разложении в ряд *пятикратного произведения*

$$q(x-x^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-xq^{3k})(1-x^{-1}q^{3k})(1+xq^{6k})(1+x^{-1}q^{2k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_{-3}(m)x^m q^{m^2}, \tag{3}$$

где

$$\chi_{-3}(m) = \left(\frac{-3}{m}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 0 \pmod 3 \\ 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod 3 \\ -1, & \text{если } m \equiv -1 \pmod 3 \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 3.

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: budarina_nataliy@mail.ru, vab@iam.khv.ru

Замечание 1. *Тождества (1), (2), (3) можно представить в других видах с помощью тех или иных замен переменных x и q (см., например, [1] и [2] с историческими комментариями).*

Известно много различных по природе доказательств рассматриваемых тождеств (см., например, [3] – [9]). В настоящей работе методом логарифмического дифференцирования Эйлера с помощью дискретного преобразования Фурье мы сначала показываем, что тождества (2) и (3) эквивалентны, соответственно, следующим утверждениям.

Теорема 1. *Для любого натурального $d \equiv 1 \pmod 8$ и любой нечетной функции $F:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*

$$-4 \sum_{8kl+m^2=d} \chi_{-4}(m)kF(m) - 8 \sum_{8kl+m^2=d} \chi_{-4}(m)kF(m-2l) = \\ = \begin{cases} \chi_{-4}(n)(n^2-1)F(n), & \textit{если } d = n^2 \\ 0, & \textit{если } d \neq n^2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для любого натурального $d \equiv 1 \pmod 3$ и любой нечетной функции $F:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*

$$-3 \sum_{6kl+m^2=d} \chi_{-3}(m)kF(m) - \frac{3}{2} \sum_{3kl+m^2=d} \left(2 + (-1)^{k+l} + (-1)^l\right) \chi_{-3}(m)kF(m-l) = \\ = \begin{cases} \chi_{-3}(n)(n^2-1)F(n), & \textit{если } d = n^2 \\ 0, & \textit{если } d \neq n^2. \end{cases}$$

Замечание 2. *Здесь (и в дальнейшем) k, l, n — натуральные числа, а m — целое.*

Подобного типа тождества впервые встречаются в работах Лиувилля (см. [10], [11], [12]). Их доказательства, как мы убедимся в дальнейшем, опираются на достаточно простые арифметические соображения, "подсказываемые" самими тождествами при рассмотрении специального вида функций $F = \Delta_M$ (M — любое натуральное) с

$$\Delta_M(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = M \\ -1, & \text{если } m = -M \\ 0, & \text{если } m \neq \pm M. \end{cases}$$

2. Вспомогательные утверждения

Напомним, что для любой периодической функции $F:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с периодом N (натуральное число)

$$F(m) = \sum_{-\frac{N}{2} < m' \leqslant \frac{N}{2}} \widehat{F}(m') \mathrm{e}^{2\pi i \frac{mm'}{N}},$$

где

$$\widehat{F}(m') = \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2} < m \leqslant \frac{N}{2}} F(m) \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{mm'}{N}}.$$

Речь идет о разложении F в дискретный N-точечный ряд Фурье. Для нечетной F периодическая с периодом N функция $\widehat{F}$ тоже нечетна; $\widehat{F}(0) = 0$ и $\widehat{F}(N/2) = 0$ для четного натурального N. Поэтому

$$F(m) = \sum_{0 < m' < N/2} \widehat{F}(m') \left(\mathrm{e}^{2ki \frac{mm'}{N}} - \mathrm{e}^{-2ki \frac{mm'}{N}}\right). \tag{4}$$

Как обычно,

$$\sigma(n) = \sum_{kl=n} k = \sum_{k\backslash n} k$$

— сумма делителей натурального n.

Лемма 1. *Для любого четного натурального n*

$$\sum_{\substack{kl=n\\ k+l\ -\ \textit{неч.}}} (-1)^l(k-l) = -2\sigma(n/2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 2^{t+1}n_1$ с нечетным натуральным n_1 и целым $t \geq 0$. Так как l при замене $(k,l) \to (l,k)$ переходит в k, а $(-1)^l$ в $(-1)^k = -(-1)^l$, то интересующая нас сумма равна

$$2\sum_{\substack{kl=n\\ k+l\ \text{- чет.}}} (-1)^l k = 2\sum_{\substack{kl=2^{t+1}n_1\\ k\ \text{- неч.},\ l\ \text{- чет.}}} k - 2\sum_{\substack{kl=2^{t+1}n_1\\ k\ \text{- чет.},\ l\ \text{- неч.}}} k =$$
$$= 2\sigma(n_1) - 2^{t+2}\sigma(n_1) = -2\sigma(n_1)\sigma(2^t) = -2\sigma(n/2).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого четного натурального n*

$$\sum_{kl=n}(2+(-1)^k+(-1)^l)(3k-l) = 12\sigma(n/2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $1+(-1)^k$ и $1+(-1)^l$ отличны от нуля только для четных k и l, то рассматриваемая сумма равна

$$2\sum_{\substack{(k/2)l=n/2\\ k\ \text{- чет.}}}(3k-l) + 2\sum_{\substack{k(l/2)=n/2\\ l\ \text{- чет.}}}(3k-l) =$$
$$= 2(6\sigma(n/2)-\sigma(n/2)) + 2(3\sigma(n/2)-2\sigma(n/2)) = 12\sigma(n/2).$$

Лемма 2 доказана.

3. Тройное произведение

Применив логарифмическую производную $\frac{d}{dq}\log$ к обеим частям тождества (2) и воспользовавшись разложением

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l \qquad \left(z = q^{8k},\ x^2q^{8k},\ x^{-2}q^{8k}\right),$$

получим

$$\frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)m^2x^mq^{m^2}}{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)x^mq^{m^2}} =$$
$$= 1 - 8\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{q^{8k}}{1-q^{8k}} + \frac{x^2q^{8k}}{1-x^2q^{8k}} + \frac{x^{-2}q^{8k}}{1-x^{-2}q^{8k}}\right) = \tag{5}$$
$$= 1 - 8\cdot\sum_{k,l=1}^{\infty} k\left(1+x^{2l}+x^{-2l}\right)q^{8kl}.$$

Ввиду нечетности характера χ_{-4},

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)m^2x^mq^{m^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)(x^n-x^{-n})n^2q^{n^2},$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)x^mq^{m^2}=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)(x^{-m})q^{m^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)(x^m-x^{-m})q^{m^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)(x^n-x^{-n})q^{n^2}.$$

Принимая во внимание эти равенства, из (5) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-4}(n)(x^n-x^{-n})(n^2-1)q^{n^2}=$$
$$=\sum_{k,l=1}^{\infty}k\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(m)\left(-4(x^m-x^{-m})-8(x^{m-2l}-x^{-m+2l})\right)q^{8kl+m^2}.$$

Приравняв коэффициенты из левой и правой частей при одинаковых степенях q, получим утверждение теоремы 1 с

$$F_x(m)=x^m-x^{-m}. \tag{6}$$

При фиксированном d в суммах из левой части тождества теоремы 1 участвуют значения F на целых m из конечного множества. Поэтому для достаточно большого натурального N мы можем считать F периодической функцией с периодом N. Положив в (6)

$$x=e^{2\pi i\frac{m'}{N}}(m'\in\mathbb{Z}),$$

с помощью (4) распространяем утверждение теоремы 1 на F.

Обращая эти выкладки, мы получим тождество (2), как следствие теоремы 1, с некоторым зависящим лишь от x множителем. Этот множитель легко найти, приравняв коэффициенты при q в правой и левой частях.

Теперь докажем теорему 1. Так как для нечетных m

$$\chi_{-4}(m)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}=(-1)^l(-1)^{\frac{m-2l-1}{2}}=(-1)^l\chi_{-4}(m-2l),$$

то

$$-8\sum_{8kl+m^2=d}\chi_{-4}(m)kF(m-2l)=4\sum_{4k_1l+m_1^2=d}(-1)^l\chi_{-4}(m_1)(-k_1+l+m_1)F(m_1),$$

где:

$$m_1=m-2l,\quad k_1=2k-l+m;$$
$$4k_1l+m_1^2=8kl+m^2=d;$$
$$2k=k_1+l-m=k_1-l-m_1>0,\quad k_1+l_1\ -\ \text{неч.}$$

Разобьем последнюю сумму на три: S_-, S_0, S_+ — в соответствии с условиями:

$$d-m_1^2<0,\quad d-m_1^2=0,\quad d-m_1^2>0.$$

В первом случае

$$k_2=-k_1=-\frac{d-m_1^2}{4l}>0,$$

и поэтому

$$S_- = 4 \sum_{m_1^2 > d} \chi_{-4}(m_1) F(m_1) \sum_{\substack{4k_2 l = m_1^2 - d \\ -k_2 - l - m_1 > 0 \\ k_2 + l \text{ -- неч.}}} (-1)^l (k_2 + l + m_1).$$

Так как $(-1)^{k_2} + (-1)^l = 0$, то во внутренней сумме парам (k_2, l) и (l, k_2) соответствуют слагаемые, сумма которых равна нулю. Следовательно,

$$S_- = 0.$$

В сумме S_0 для $d \neq n^2$ нет слагаемых, и она равна нулю. Для $d = n^2$ с нечетным натуральным n

$$k_1 = 0, \qquad l \text{ -- неч.}, \qquad 0 < l < -m_1 = n.$$

Поэтому

$$S_0 = 4\chi_{-4}(n) F(n) \sum_{\substack{0 < l < n \\ l \text{ -- неч.}}} (n - l) = \chi_{-4}(n) F(n)(n^2 - 1).$$

Теперь осталось только рассмотреть сумму

$$S_+ = 4 \sum_{\substack{4kl + m^2 = d \\ k - l - m > 0,\ k + l \text{ -- неч.}}} (-1)^l \chi_{-4}(m) F(m)(-k + l + m).$$

При замене

$$(k, m, l) \to (l, -m, k)$$

мы получим те же самые слагаемые, но с условием $k - l - m < 0$ вместо $k - l - m > 0$. Кроме того, множитель $(k - l + m)$ обращает в ноль слагаемые с $k - l + m = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_+ = 2 \sum_{\substack{4kl + m^2 = d \\ k + l \text{ -- неч.}}} (-1)^l \chi_{-4}(m) F(m)(-k + l + m) = \\ = -2 \sum_{m^2 < d} \chi_{-4}(m) F(m) \sum_{\substack{kl = (d - m^2)/4 \\ k + l \text{ -- неч.}}} (-1)^l (k - l) + \\ +2 \sum_{\substack{4kl + m^2 = d \\ k + l \text{ -- неч.}}} (-1)^l \chi_{-4}(m) F(m) m. \end{aligned}$$

В последней сумме при замене $m \to -m$ слагаемые меняют знак, и поэтому она равна нулю. Применяя к оставшейся сумме лемму 1, получим в доказываемом тождестве теоремы 1 первое слагаемое с противоположным знаком. Тем самым утверждение теоремы 1 полностью доказано.

4. Пятикратное произведение

Действуя точно так же, как и для тройного произведения, преобразуем тождество (3) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-3}(n)(x^n-x^{-n})(n^2-1)q^{n^2}=$$
$$=-3\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(m)(x^m-x^{-m})kq^{6kl+m^2}-$$
$$-3\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(m)(x^{m-l}-x^{-m+l})kq^{3kl+m^2}-$$
$$-6\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(m)(x^{m-l}-x^{-m+l})kq^{6kl+m^2}.$$

Если в третьей сумме правой части $2k$ заменить на k с добавлением множителя $\left(1+(-1)^k\right)/2$, выделяющего четные k, то ее можно объединить со второй в одну:

$$-\frac{3}{2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(2+(-1)^{k+l}+(-1)^l\right)\chi_{-3}(m)k(x^{m-l}-x^{-m+l})q^{3kl+m^2}.$$

Действуя далее по той же схеме, как и в предыдущем параграфе, получаем эквивалентность тождества (3) и теоремы 2.

Теперь докажем теорему 2. Заметим, что

$$-\frac{3}{2}\sum_{3kl+m^2=d}\left(2+(-1)^{k+l}+(-1)^l\right)\chi_{-3}(m)F(m-l)k=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k_1l+m_1^2=d}\left(2+(-1)^{k_1}+(-1)^l\right)\chi_{-3}(l+m_1)F(m_1)(-k_1+l+2m_1)$$

с

$$m_1=m-l,\quad k_1=3k+2m-l,$$

для которых:

$$k_1l+m_1^2=3kl+m^2=d;$$
$$3k=k_1+l-2m=k_1-l-2m_1>0;$$
$$k_1-m_1\equiv l+m_1\pmod 3.$$

Разобьем последнюю сумму на три: S_-, S_0, S_+ — в соответствии с условиями:

$$d-m_1^2<0,\quad d-m_1^2=0,\quad d-m_1^2>0.$$

В сумме S_-

$$k_2=-k_1=-\frac{d-m^2}{3l}>0$$

и выражение

$$\left(2+(-1)^{k_2}+(-1)^l\right)\chi_{-3}(l+m_1)F(m_1)(k_2+l+2m_1)$$

при замене $(k_2,l)\to(l,k_2)$ меняет знак по причине того, что

$$\chi_{-3}(l+m_1)=\chi_{-3}(-k_2-m_1)=-\chi_{-3}(k_2+m_1).$$

Следовательно,
$$S_- = 0.$$

В сумме S_0 для $d \neq n^2$ слагаемых нет, и она равна нулю. При $d = n^2 \equiv 1 \pmod 3$ для параметров суммирования в S_0 выполняются соотношения
$$k_1 = 0, \quad l + 2m_1 \equiv 0 \pmod 3, \quad 0 < l < -2m_1 = 2n.$$
Поэтому
$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{0<l<2n \\ l\equiv 2n \pmod 3}} \left(3 + (-1)^l\right) \chi_{-3}(n) F(n)(2n - l) = \frac{3}{2}\chi_{-3}(n)F(n) \sum_{0<l_1<2n/3} \left(3 + (-1)^{l_1}\right) l_1.$$
Последняя сумма равна
$$2 \sum_{0<l_1<2n/3} l_1 + \sum_{0<l_1<2n/3} \left(1 + (-1)^{l_1}\right) l_1 = \left[\frac{2n}{3}\right] \left(\left[\frac{2n}{3}\right] + 1\right) + 2\left[\frac{n}{3}\right]\left(\left[\frac{n}{3}\right] + 1\right) = \frac{2}{3}(n^2 - 1).$$
Следовательно, при $d = n^2$
$$S_0 = \chi_{-3}(n)F(n)(n^2 - l)$$
— правая часть тождества теоремы 2.

Осталось рассмотреть сумму
$$S_+ = \frac{1}{2} \sum_{k-l-2m>0}^{(7)} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right) \chi_{-3}(l + m)F(m)(-k + l + 2m),$$
где знак (7) означает, что суммирование проводится по всем тройкам (k, m, l) с ограничениями
$$kl + m^2 = d, \qquad k - m \equiv l + m \pmod 3. \tag{7}$$
Так как замена $(k, m, l) \to (l, -m, k)$ не нарушает условий из (7) и слагаемые в S_+ не меняются, то мы можем убрать условие $k - l - 2m > 0$, заменив коэффициент $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{4}$. Поскольку
$$2 + (-1)^k + (-1)^l = \left(1 + (-1)^k\right) + \left(1 + (-1)^l\right),$$
то еще раз применяя замену $(k, m, l) \to (l, -m, k)$, получим
$$\sum_{\substack{kl+m^2=d \\ k-m\equiv l+m \pmod 3}} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right) \chi_{-3}(l + m)F(m)m =$$
$$= 2 \cdot \sum{}^{(7)} \left(1 + (-1)^k\right) \chi_{-3}(l + m)F(m)m = 4 \sum_{k-\text{четн.}}^{(7)} \chi_{-3}(l + m)F(m)m.$$
Заметим, что при замене $(k, m, l) \to (2l, m, k/2)$ в последней сумме, не меняющей ограничений из (7), $\chi_{-3}(l + m)$ переходит в
$$\chi_{-3}(k/2 + m) = -\chi_{-3}(k + 2m) = -\chi_{-3}(l + m).$$
Поэтому слагаемые меняют знак и рассматриваемая сумма равна нулю.

Мы показали, что
$$S_+ = \frac{1}{4} \sum_{\substack{kl+m^2=d \\ k-m\equiv l+m \pmod 3}} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right) \chi_{-3}(m + l)F(m)(-k + l).$$

Если выделить слагаемые с $m \equiv 0 \pmod 3$, то второе условие из (7) превратится в сравнение $k \equiv l \pmod 3$, и при этом

$$\chi_{-3}(m+l) = \chi_{-3}(l) = \chi_{-3}(k).$$

Но в таком случае замена $(k,m,l) \to (l,m,k)$, меняющая знак у рассматриваемых слагаемых, приводит к их взаимному сокращению. Поэтому в рассматриваемой сумме остаются только те тройки (k,m,l), у которых

$$kl = d - m^2 \equiv 0 \pmod 3.$$

При этом, если $k \equiv 0 \pmod 3$, то $l \equiv m \pmod 3$, и если $l \equiv 0 \pmod 3$, то $k \equiv -m \pmod 3$. Опять воспользовавшись заменой $(k,m,l) \to (l,-m,k)$, находим

$$S_+ = \sum_{\substack{kl+m^2=d \\ k\equiv 0 \pmod 3 \\ l\equiv m \pmod 3}} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right) \chi_{-3}(m) F(m)(k-l).$$

Замена $m \to -m$ не меняет слагаемых. Следовательно, условие $l \equiv m \pmod 3$ можно заменить на $l \not\equiv 0 \pmod 3$, поменяв коэффициент $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{4}$. Добавив слагаемые с $k \equiv l \equiv 0 \pmod 3$ (они взаимно уничтожаются ввиду замены $(k,m,l) \to (l,m,k)$) и перейдя от k к $3k$, с помощью леммы 2 получим, что

$$\begin{aligned} S_+ &= \frac{1}{4} \sum_{3kl+m^2=d} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right) \chi_{-3}(m) F(m)(3k-l) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{m^2<d \\ m^2\equiv d \pmod 3}} \chi_{-3}(m) F(m) \sum_{kl=(d-m^2)/3} \left(2 + (-1)^k + (-1)^l\right)(3k-l) = \\ &= 3 \sum_{\substack{m^2<d \\ m^2\equiv d \pmod 6}} \chi_{-3}(m) F(m) \sigma\left(\frac{d-m^2}{6}\right) = 3 \sum_{6kl+m^2=d} \chi_{-3}(m) F(m) k. \end{aligned}$$

Мы получили первое слагаемое с противоположным знаком из левой части тождества теоремы 2. А это и требовалось доказать.

Список литературы

[1] B. C. Berndt, *Ramanujan's notebooks*, v. III, Springer-Verlag, New York, 1991, 510 pp.

[2] D. Foata, Guo-Niu Han, "The triple, quintuple and septuple product identities revisited", *Sém. Lothar. Combin.*, 42 (1999), Art. B42o, 12 pp. (electronic).

[3] E. V. Wright, "An enumerative proof of an identity of Jacobi", *J. London Math. Soc.*, **40**, (1965), 55–57.

[4] C. Jr. Sudler, "Two enumerative proofs of an identity of Jacobi", *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **15**, (1966), 67–71.

[5] George E. Andrews, "A simple proof of Jacobi's triple product identity", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, (1965), 333–334.

[6] B. Gordon, "Some identities in combinatorial analysis", *Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2)*, **12**, (1961), 285–290.

[7] I. G. Macdonald, "Affine root systems and Dedekind's η-function", *Invent. Math.*, **15**, (1972), 91–143.

[8] A. M. Vershik, "A bijective proof of the Jacobi identity, and reshapings of the Young diagrams", *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII, 3–6, 193, translation in J. Soviet. Math. 41 (1988), no. 2, 889–891, **155**, 1986.

[9] Herbert S. Wilf, “The number-theoretic content of the Jacobi triple product identity”, *The Andrews Festschrift (Maratea, 1998). Sém. Lothar. Combin. 42 (1999), Art. B42k, 4 pp. (electronic).*

[10] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ НКПТ СССР, 1937, 222 с.

[11] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1939, 484 pp.

[12] Kenneth S. Williams, *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2011, 287 pp.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 14 сентября 2011 г.

Работа выполнена при поддержке проекта ДВО РАН №09-I-ОМН-09.

Budarina N. V., Bykovskii V. A. The arithmetic nature of the triple and quintuple product identities. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 140–148.

ABSTRACT

In this paper the new proof is suggested for decomposition of twisted with quadratic characters modulo 4 and 3 theta-functions to the infinite product. It is based on the Euler’s method of logarithmic derivation and the elementary arithmetic concepts.

Key words: *theta-function, Liouville identities, infinite product.*