ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 2. С. 149–154

УДК 511.26, 511.9
MSC2010 11K60, 11G70

© А. А. Илларионов, Ю. А. Сойка[1]

О количестве относительных минимумов целочисленных решеток

Пусть $E_s(N)$ — среднее количество относительных минимумов s-мерных целочисленных решеток определителя N. В работе доказывается, что для любого простого N справедливы оценки

$$\frac{2^{-1}}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right) \leqslant \frac{E_s(N)}{\ln^{s-1} N} \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Отсюда, в частности, вытекает новая нижняя оценка для максимального количества относительных минимумов.

Ключевые слова: *относительный минимум, многомерная непрерывная дробь.*

Полной s-мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{n_1 a^{(1)} + \ldots + n_s a^{(s)} : \quad n_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,s}\right\},$$

где $a^{(1)}, \ldots, a^{(s)}$ — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). Модуль определителя матрицы со столбцами $a^{(1)}, \ldots, a^{(s)}$ называется определителем решетки Γ и обозначается $\det \Gamma$.

Пусть

$\mathcal{L}_s$ — множество s-мерных полных решеток;

$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ — множество целочисленных решеток из $\mathcal{L}_s$;

$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$ — множество решеток $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z})$ с $\det \Gamma = N$.

Определение. Ненулевой узел γ решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s$ называется относительным минимумом, если не существует другого ненулевого узла $\eta \in \Gamma$ такого, что

$$|\eta_i| \leqslant |\gamma_i|, \quad i = \overline{1,s}; \qquad \sum_{i=1}^{s} |\eta_i| < \sum_{i=1}^{s} |\gamma_i|.$$

Понятие относительного минимума появилось в работах Г.Ф. Вороного [1] и, независимо от него, Г. Минковского [2] в связи с обобщением классического алгоритма непрерывных дробей на многомерный случай.

Пусть $\mathfrak{M}(\Gamma)$ — множество относительных минимумов решетки Γ.

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136. Электронная почта: `illar_a@list.ru`

Хорошо известна следующая оценка [3, 5, 6, 8]:

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) \underset{s}{\ll} \log_2^{s-1} N + 1 \text{ при } \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N). \quad (1)$$

Здесь и далее $\#X$ — количество элементов конечного множества X.

Ряд работ [4, § 6.4], [5, 6, 7, 8] был посвящен оценкам величины

$$\overline{C}(s) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z},N)} \frac{\#\mathfrak{M}(\Gamma)}{\log_2^{s-1} N}.$$

Наилучший результат получен в [8] и имеет вид

$$\frac{1}{100 \cdot (s-1)! \cdot \log_2^{s-1}(128s)} \leqslant \overline{C}(s) \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!}. \quad (2)$$

Определим

$$E_s(N) = \frac{1}{\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z},N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

— среднее количество относительных минимумов решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$.

Справедлив следующий результат: существует постоянная $C(s)$, зависящая только от s, такая, что

$$E_s(N) = C(s) \cdot \ln^{s-1} N + O_s(\chi(N) \cdot \ln^{s-2} N) \quad (3)$$

при всех целых $N > 1$, где

$$\chi(N) = 1 + \sum_{p\,|N} \frac{\ln p}{p} \quad (p \text{ – простые делители } N).$$

Очевидно, что $\chi(N) = O(\ln \ln N)$ для всех $N > 2$.

При $s = 2$ формула (3) вытекает из классических результатов Хейльбронна [9] и Портера [10] о средней длине конечной непрерывной дроби, причем

$$C(2) = \frac{24 \ln 2}{\pi^2}.$$

При $s = 3$ формула (3) доказана в [11]. Константа $C(3)$ вычисляется через некоторый шестимерный интеграл, причем

$$C(3) \approx 0,8335.$$

Для произвольной размерности доказательство формулы (3) было недавно аннонсировано в [12]. Отметим, что при $s \geqslant 4$ константу $C(s)$ не представляется возможным вычислить даже приближенно.

Основной результат настоящей работы заключается в следующем.

Теорема. *Пусть N — простое, а $s \geqslant 2$ — целое число. Тогда справедливы оценки*

$$\frac{2^{-1}}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right) \leqslant \frac{E_s(N)}{\ln^{s-1} N} \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

З а м е ч а н и е. Согласно (3)

$$C(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{E_s(N)}{\ln^{s-1} N} = \lim_{k\to\infty} \frac{E_s(p_k)}{\ln^{s-1} p_k},$$

где p_k — последовательность простых чисел, занумерованная по возрастанию. Поэтому из теоремы вытекают оценки:

$$\frac{2^{-1}}{(s-1)!} \leqslant C(s) \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!},$$

а также новая нижняя оценка для $\overline{C}(s)$:

$$\frac{2^{-1}\cdot\log_2^{1-s} e}{(s-1)!} \leqslant \overline{C}(s).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Обозначим через $\mathfrak{M}_+(\Gamma)$ множество относительных минимумов решетки Γ с положительными координатами. Используя оценку (1), нетрудно проверить (см., например, [5]), что количество минимумов $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$, имеющих хотя бы одну нулевую координату, оценивается $O_s(\ln^{s-2} N)$. Поэтому

$$E_s(N) = \frac{2^s}{\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z},N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z},N)} \#\mathfrak{M}_+(\Gamma) + O_s\left(\ln^{s-2} N\right). \tag{4}$$

Известно [13, гл. I], что любая решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N)$ имеет единственный базис вида

$$\begin{aligned}
&m^{(1)} = (m_1^{(1)}, 0, 0, \ldots, 0),\\
&m^{(2)} = (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, 0, \ldots, 0),\\
&m^{(3)} = (m_1^{(3)}, m_2^{(3)}, m_3^{(3)}, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
&m^{(s)} = (m_1^{(s)}, m_2^{(s)}, m_3^{(s)}, \ldots, m_s^{(s)}),
\end{aligned}$$

где $0 < m_i^{(j)} \leqslant m_i^{(i)}$ при $j = \overline{i, s}$, $i = \overline{1, s}$. Поэтому, так как N — простое, то

$$\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}, N) = N^{s-1} + N^{s-2} + \ldots + 1. \tag{5}$$

Определим множество $L_s(N)$, состоящее из решеток вида

$$\Gamma(a) = \left\{\gamma \in \mathbb{Z}^s : \sum_{i=1}^{s-1} a_i\gamma_i \equiv \gamma_s \pmod N, \right\},$$

где

$$a = (a_1, \ldots, a_{s-1}) \in \mathbb{Z}^{s-1}[1, N], \quad \mathbb{Z}^{s-1}[1, N] = (\mathbb{Z}\cap[1, N])^{s-1}.$$

Так как $\#L_s(N) = N^{s-1}$, то из (1), (4), (5) следует, что

$$E_s(N) = \frac{2^s}{N^{s-1}} \sum_{\Gamma\in L_s(N)} \#\mathfrak{M}_+(\Gamma) + O_s\left(\ln^{s-2} N\right). \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\sum_{\Gamma\in L_s(N)} \#\mathfrak{M}_+(\Gamma) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^s} f_s(N, \gamma), \tag{7}$$

где $f_s(N, \gamma)$ — количество решеток $\Gamma \in L_s(N)$ таких, что $\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma)$. Поэтому для доказательства теоремы осталось получить следующие оценки:

$$\frac{\ln^{s-1} N}{2^{s+1}\cdot(s-1)!} + O_s(\ln^{s-2} N) \leqslant \frac{1}{N^{s-1}} \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^s} f_s(N, \gamma) \leqslant \frac{\ln^{s-1} N}{(s-1)!} + O_s(\ln^{s-2} N), \tag{8}$$

Для любых $\gamma, \eta \in \mathbb{Z}^s$ определим

$T_s(N,\gamma)$ — количество решеток $\Gamma \in L_s(N)$ таких, что $\gamma \in \Gamma$;

$T_s(N,\gamma,\eta)$ — количество решеток $\Gamma \in L_s(N)$ таких, что $\gamma, \eta \in \Gamma$.

Другими словами, $T_s(N,\gamma)$ совпадает с количеством решений $a \in \mathbb{Z}^{s-1}[1,N]$ сравнения

$$a_1\gamma_1 + \ldots + a_{s-1}\gamma_{s-1} \equiv \gamma_s \pmod N,$$

а $T_s(N,\gamma,\eta)$ равно количеству решений $a \in \mathbb{Z}^{s-1}[1,N]$ системы сравнений

$$\begin{cases} a_1\gamma_1 + \ldots + a_{s-1}\gamma_{s-1} \equiv \gamma_s \pmod N, \\ a_1\eta_1 + \ldots + a_{s-1}\eta_{s-1} \equiv \eta_s \pmod N. \end{cases}$$

Так как N — простое, то

$$T_s(N,\gamma) = N^{s-2}, \quad T_s(N,\gamma,\eta) = N^{s-3}. \tag{9}$$

Докажем верхнюю оценку из (8). Согласно теореме Минковского о линейных формах

$$\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_s < N \text{ при всех } \gamma \in \mathfrak{M}_+(\Gamma),\ \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z},N).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^s} f_s(N,\gamma) &\leqslant \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s < N}} T_s(N,\gamma) = N^{s-2} \cdot \#\left\{\gamma \in \mathbb{N}^s :\ \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_s < N\right\} = \\ &= \frac{N^{s-1}}{(s-1)!} \cdot \ln^{s-1} N + O_s(N^{s-1} \cdot \ln^{s-2} N). \end{aligned}$$

Верхняя оценка из (8) доказана.

Докажем нижнюю оценку из (8). Очевидно, что

$$f_s(N,\gamma) = T_s(N,\gamma) - g_s(N,\gamma) = N^{s-2} - g_s(N,\gamma), \tag{10}$$

где $g_s(N,\gamma)$ — количество решеток $\Gamma \in L_s(N)$ таких, что

$$\gamma \in \Gamma, \quad \gamma \notin \mathfrak{M}(\Gamma).$$

Для каждого $\gamma \in \mathbb{N}^s$ определим множество

$$\Pi(\gamma) = \left\{\eta \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\} : \quad |\eta_i| \leqslant |\gamma_i|,\ i = \overline{1,s}; \quad \sum_{i=1}^{s} |\eta_i| < \sum_{i=1}^{s} |\gamma_i|\right\}.$$

Тогда

$$\gamma \in \mathfrak{M}(\Gamma) \iff \Pi(\gamma) \cap \Gamma = \emptyset,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} g_s(N,\gamma) &= \#\left\{\Gamma \in L_s(N) : \quad \gamma \in \Gamma, \quad \Pi(\gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset\right\} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\eta \in \Pi(\gamma)} T_s(N,\gamma,\eta) = N^{s-3} \cdot \#\Pi(\gamma) \leqslant N^{s-3} \cdot \prod_{i=1}^{s} (2\gamma_i + 1). \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (10), получаем

$$f_s(N,\gamma) \geqslant N^{s-3} \cdot \left(N - \prod_{i=1}^{s} (2\gamma_i + 1)\right). \tag{11}$$

Нетрудно доказать формулу

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s\leq R}} \frac{1}{\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s} = \frac{\ln^{s-1} R}{(s-1)!} + O_s(\ln^{s-2} R)$$

для всех $R\in(1;+\infty)$. Из нее вытекает

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s\leq R}} 1 = \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1})\in\mathbb{N}^{s-1},\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1}\leq R}} \frac{R}{\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1}} = \frac{R\cdot\ln^{s-1} R}{(s-1)!} + O_s(\ln^{s-2} R), \tag{12}$$

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s\leq R}} \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1} = \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1})\in\mathbb{N}^{s-1},\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1}\leq R}} R = O_s(R^2\cdot\ln^{s-2} R), \tag{13}$$

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s\leq R}} \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s = \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1})\in\mathbb{N}^{s-1},\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1}\leq R}} \frac{R^2}{2\cdot\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_{s-1}} = \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\ln^{s-1} R}{(s-1)!} + O_s(\ln^{s-2} R). \tag{14}$$

Используя (11), (12), (13), (14), приходим к соотношениям

$$\frac{1}{N^{s-1}}\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^s} f_s(N,\gamma) \geqslant \frac{1}{N^{s-1}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s<N/2^s}} f_s(N,\gamma) \geqslant \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s<N/2^s}} \left(N - \prod_{i=1}^{s}(2\gamma_i+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^s,\\ \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s<N/2^s}} \Big(N - 2^s\cdot(\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_s)\Big) + O_s\left(N^2\cdot\ln^{s-2} N\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(\frac{N^2}{2\cdot 2^s\cdot(s-1)!}\ln^{s-1} N + O_s\left(N^2\cdot\ln^{s-2} N\right)\right).$$

Нижняя оценка из (8) доказана. Используя (8), (7), (6), получаем требуемые неравенства. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах*, т. 1, Киев: АН УССР, 1952.

[2] H. Minkowski, “Generalisation de la theorie des fraction continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **13**:2, (1896), 41–60.

[3] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *ДАН*, **382**:2, (2003), 154–155.

[4] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, МЦНМО, М., 2004.

[5] М. О. Авдеева, “Оценка количества локальных минимумов целочисленных решеток”, *Чебышевский сборник*, **5**:4, (2004), 35–38.

[6] О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский, “Об оценках гиперболической дзета-функции решеток”, *Чебышевский сборник*, **6**:2, (2005).

[7] М. О. Авдеева, “О нижних оценках количества локальных минимумов целочисленных решеток”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **11**:6, (2005), 9–14.

[8] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Верхние и нижние оценки константы Вороного-Минковского”, *Матем. заметки*, **87**:4, (2005), 483–491.

[9] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Abhandlungen aus zahlentheorie und Analysis*, 1968, 89–96.

[10] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1, (1975), 20–28.

[11] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя”, *Препринт ХО ИМП ДВО РАН*, 2010, № 2.

[12] A. A. Illarionov, “Multidimentional generalisation of Heilbronn's theorem about average length of finite continued fractions”, *Abstracts of 27th Journees Arithmetique*, 2011.

[13] Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел.*, Мир, М., 1995.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 13 сентября 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№10-01-98002-р_сибирь_а, 11-01-0628-а, 11-01-12004-офи-м-2011), ДВО РАН (проекты II-III-01M-002, 09-I-P4-03) и программы президента РФ (проект МД-2339.2010.1)

Illarionov A. A., Soyka Y. A. On the number of local minima of integer lattices. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 149–154.

ABSTRACT

Let $E_s(N)$ be the average number of local minima of s-dimensional integer lattices with determinant equals N. We prove the following estimates

$$\frac{2^{-1}}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right) \leqslant \frac{E_s(N)}{\ln^{s-1} N} \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!} + O_s\left(\frac{1}{\ln N}\right)$$

for any prime N. Using this result we have a new lower bound for maximum number of local minima of integer lattices.

Key words: *local minimum, multidimensional continuous fraction.*