ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 2. С. 181–189

УДК 512.66
MSC2010 55U05

© В. Е. Лопаткин[1]

Кольца когомологий асинхронных систем переходов

В работе изучаются введенные автором кольца когомологий асинхронных систем переходов. Показано, что существуют асинхронные системы переходов, имеющие изоморфные группы гомологий, но не изоморфные кольца когомологий.

Ключевые слова: *кольца когомологий, гомологии асинхронных систем переходов, полукубические множества, асинхронные системы переходов.*

Введение

При исследовании вычислительных систем возникают вопросы о построении инвариантов, наиболее полно отражающих их свойства. Рассмотрим, например, вычислительную систему, состоящую из набора инструкций:

$$(a)\ x := f(x,y), \quad (b)\ y := g(x,y), \quad (c)\ u := h(u,v), \quad (b)\ v := k(u,v).$$

Вычислительные процессы состоят из последовательностей выполнения инструкций, например: c; a; d; a; a. Такая последовательность записывается как слово $cadaa$ и называется трассой. Замечаем теперь, что все пары инструкций, за исключением пар (a,b) и (c,d), могут выполняться параллельно. Этот факт запишем в виде равенства слов $ac = ca$, $ad = da$, $bc = cb$, $bd = db$. Используя эти равенства, рассматриваемый процесс можно привести к нормальной форме Фоаты $(ac)(ad)c$, состоящей из трёх ярусов. В результате получаем метод автоматического распараллеливания последовательностей инструкций. Применение этого метода на практике показывает, что, кроме независимости инструкций от данных, необходимо учитывать действие инструкций на пространстве состояний. В нашем примере, если действия a и b приводят к одинаковым значениям переменных x и y, а c и d — к одинаковым значениям u и v, причём каждое из четырёх действий захватывает некоторый объём памяти, то при ограниченном объёме свободной памяти мы получим асинхронную систему, описанную в работе [1], не допускающую реализацию с помощью двух параллельно работающих процессоров, несмотря на то, что моноид, заданный образующими a, b, c, d и соотношениями $ac = ca$, $ad = da$, $bc = cb$, $bd = db$, допускает разложение в прямое произведение. Этот пример в [1] приведён для демонстрации методов исследования с помощью топологических инвариантов асинхронных систем – их групп гомологий.

В данной работе мы продолжаем исследовать топологические инварианты асинхронных систем переходов. В работе [2] были определенны группы гомологий асинхронных систем переходов, в работе [3] доказана формула Кюннета для групп гомологий параллельного произведения. В этой работе мы введём в рассмотрение кольца когомологий асинхронных

[1]Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, 681000, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Кирова, 17, корп. 2. Электронная почта: wickktor@gmail.com

систем переходов и покажем, что этот топологический инвариант более тонок, чем рассмотренные ранее. Основной результат работы заключается в том, что мы строим примеры асинхронных систем переходов, имеющих одинаковые группы гомологий, но не изоморфные кольца когомологий.

1. Асинхронные системы переходов

Асинхронные системы переходов были независимо введены Беднарчиком [4] и Шилдсом [5].

Определение 1. *Асинхронной системой переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ называется пятёрка, состоящая из множеств S, E, элемента $s_0 \in S$, подмножества $Tran \subseteq S \times E \times S$ и антирефлексивного симметричного отношения $I \subseteq E \times E$, удовлетворяющих условиям:*

1) для каждого $e \in E$ существуют такие $s, s' \in S$, что $(s, e, s') \in Tran$;

2) если $(s, e, s') \in Tran$ и $(s, e, s'') \in Tran$, то $s' = s''$;

3) для любой пары $(e_1, e_2) \in I$ и троек $(s, e_1, s_1) \in Tran$, $(s_1, e_2, u) \in Tran$ существует такой $s_2 \in S$, что $(s, e_2, s_2) \in Tran$ и $(s_2, e_1, u) \in Tran$.

Элементы из S называются ***состояниями****, из $Tran$ —* ***переходами****, из E —* ***событиями****, а I —* ***отношение независимости****.*

Условие 3) иллюстрируется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dl, "e_2"'] \arrow[dr, "e_1"] & \\
s_2 \arrow[dr, "e_1"'] & & s_1 \arrow[dl, "e_2"] \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

Приведём некоторые понятия, необходимые нам для дальнейшего.

Определение 2. *Пусть E — множество, $I \subseteq E \times E$ — антирефлексивное симметричное отношение на E. Моноид, заданный с помощью множества образующих E и соотношений $ab = ba$, выполненных для всех пар $(a, b) \in I$, обозначается через $M(E, I)$ и называется свободным частично коммутативным.*

В работе [6] показано, что каждую асинхронную систему переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ можно рассматривать как правое пунктированное $M(E, I)$-множество $S^\bullet$, здесь $S^\bullet = S \cup \{*\}$.

Пусть $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ — асинхронная система переходов. Множеством её достижимых состояний называется подмножество $A(s_0) \subseteq S^\bullet$, состоящее из элементов $s_0 \cdot \mu \in S^\bullet$, где $\mu \in M(E, I)$.

Определение 3. *Пусть $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ — асинхронная система переходов. Категория состояний $\mathscr{K}_*(A)$ определяется следующим образом. Множество её объектов состоит из достижимых состояний $A(s_0)$. Её морфизмами являются тройки $s_1 \xrightarrow{\mu} s_2$ элементов $s_1, s_2 \in S^\bullet$, $\mu \in M(E, I)$, удовлетворяющие соотношению $s_1 \cdot \mu = s_2$. Тождественные морфизмы равны $s_1 \xrightarrow{1_{M(E,I)}} s_1$. Композиция морфизмов $\left(s_2 \xrightarrow{\mu_2} s_3\right) \circ \left(s_1 \xrightarrow{\mu_1} s_2\right)$ совпадает с морфизмом $\left(s_1 \xrightarrow{\mu_1\mu_2} s_3\right)$.*

Приведём следующее [6, Definition 5.1] очень важное для нас определение.

Определение 4. *Пусть $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ — асинхронная система переходов. Ориентированный граф, множество вершин которого равно $S^\bullet$, а множество стрелок состоит из троек $s \xrightarrow{e} s'$, $e \in E$, где $s, s' \in S^\bullet$ и $s \cdot e = s'$, называется* ***аугментированным графом состояний асинхронной системы переходов****. Если из аугментированного графа состояний удалить вершину $*$ и содержащие эту вершину стрелки, то получится граф, который называется* ***графом состояний****.*

Приведём пример асинхронной системы переходов.

Пример 1. Рассмотрим асинхронную систему переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$, где $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $E = \{a, b, c, d\}$, $I = \{(a, c), (c, a)\}$, $Tran = \{s_0 \xrightarrow{a} s_1, s_0 \xrightarrow{b} s_1, s_1 \xrightarrow{a} s_2, s_0 \xrightarrow{c} s_3, s_0 \xrightarrow{d} s_4, s_2 \xrightarrow{c} s_4, s_3 \xrightarrow{a} s_4\}$. Она имеет следующий аугментированный граф состояний:

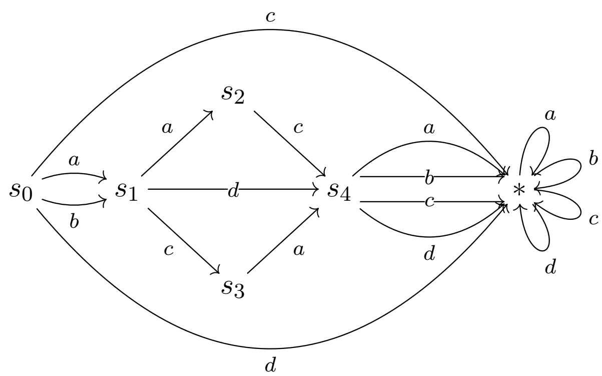

Рис. 1. Аугментированный граф состояний асинхронной системы переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$.

2. Когомологии асинхронных систем переходов

Здесь мы определим когомологии асинхронных систем переходов как когомологии соответствующих им полукубических множеств. Прежде всего, введём следующие определения.

Определение 5. *Полукубическим множеством $Q = (Q_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ называется последовательность множеств (Q_n), где $n \in \{0, 1, \ldots\}$ и семейство отображений $\partial_j^{n,\varepsilon} : Q_{n-1} \to Q_n$ определённых при $1 \le i \le n$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, причём для всех $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $n \ge 2$, $1 \le i < j \le n$ коммутативны диаграммы:*

$$\begin{tikzcd}
Q_n \arrow[r, "\partial_j^{n,\beta}"] \arrow[d, "\partial_i^{n,\alpha}"'] & Q_{n-1} \arrow[d, "\partial_i^{n-1,\alpha}"] \\
Q_{n-1} \arrow[r, "\partial_{j-1}^{n-1,\beta}"'] & Q_{n-2}
\end{tikzcd}$$

Согласно [7, Lemma 3.2], с каждым $M(E, I)$-множеством $S^\bullet$ (асинхронной системой переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$) можно связать полукубическое множество $QS^\bullet = (Q_n S^\bullet, \partial_i^{n,\varepsilon})$, состоящие из множеств

$$Q_nS^\bullet = \{(s, e_1, \dots, e_n) : s \in S^\bullet,\, e_1 < \ldots < e_n \in E,\, (e_i, e_j) \in I, \text{ для всех } 1 \le i < j \le n\}$$

и отображений

$$Q_nS^\bullet \underset{\partial_i^{n,0}}{\overset{\partial_i^{n,1}}{\rightrightarrows}} Q_{n-1}S^\bullet, \quad n \ge 1, \quad 1 \le i \le n, \quad \varepsilon \in \{0, 1\},$$

определённых следующим образом:

$$\partial_i^{n,0}(s, e_1, \dots, e_n) = (s, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n),$$

$$\partial_i^{n,1}(s, e_1, \dots, e_n) = (s \cdot e_i, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n).$$

Поэтому за определение когомологий асинхронной системы переходов можно взять группы когомологий соответствующего ей полукубического множества. Таким образом, используя [8, определение 2] получаем следующее определение.

Определение 6. *Группами целочисленных когомологий асинхронной системы переходов $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ называются группы когомологии $H^n(\mathscr{K}_*(A); \mathbb{Z})$ коцепного комплекса*

$$0 \to \prod_{s \in Q_0S^\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^1} \prod_{(s,e_1) \in Q_1S^\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^2} \prod_{(s,e_1,e_2) \in Q_2S^\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^3} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \prod_{(s,e_1,\dots,e_{n-1}) \in Q_{n-1}S^\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^n} \prod_{(s,e_1,\dots,e_n) \in Q_nS^\bullet} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \ldots$$

где кограничный дифференциал для n-мерной коцепи

$$\varphi(s, e_1, \dots, e_n) \in \prod_{(s,e_1,\dots,e_n) \in Q_nS^\bullet} \mathbb{Z}$$

определяется следующей формулой:

$$(\delta^n\varphi)(s, e_1, \dots, e_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \Big(\varphi^n(s \cdot e_k, e_1, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}) - \varphi^n(s, e_1, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1})\Big).$$

Напомним, что кольцо R с единицей 1 называется *градуированным кольцом*, если оно является прямой суммой аддитивных подгрупп R_q таких, что

$$1 \in R_0, \quad \text{и} \quad R_pR_q \subset R_{p+q},$$

где q пробегает множество целых чисел. Мы будем рассматривать градуированные кольца, для которых $R_q = 0$ при $q < 0$.

Ввиду того, что с каждой асинхронной системой переходов можно связать полукубическое множество, то, согласно [8], мы можем в когомологиях асинхронной системы переходов ввести умножение Колмогорова – Александера ($\smile$-умножение) и таким образом получить градуированное кольцо когомологий асинхронной системы переходов.

Итак, пусть $[\varphi]$ и $[\psi]$ — классы p-мерных и q-мерных когомологий $H^p(A;\mathbb{Z})$ и $H^q(A;\mathbb{Z})$ соответственно, а φ и ψ — их представители. Тогда (см.[8]), $\smile$-умножение будет определяться следующим образом:

$$(\varphi \smile \psi)(s, e_1, \dots, e_{p+q}) = \sum_H \varrho_{HK} \varphi\left(s, e_{h_1}, \dots, e_{h_p}\right) \cdot \psi\left(s \cdot e_{h_1} \cdots e_{h_p}, e_{k_1}, \dots, e_{k_q}\right),$$

где $H = \{h_1, \dots, h_p\}$ — подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$, K — его дополнение, ϱ_{HK} — сигнатура (чётность) перестановки HK, а суммирование распространяется по всем H.

Так, например, пусть $p = q = 1$, тогда получим

$$(\varphi \smile \psi)(s, e_1, e_2) = \varphi(s, e_1) \cdot \psi(s \cdot e_1, e_2) - \varphi(s, e_2) \cdot \psi(s \cdot e_2, e_1).$$

В дальнейшем будем принимать следующие обозначения; $(s, e_1, \dots, e_n)^*$ — коцепь, которая принимает значение 1 на элементе $(s, e_1, \dots, e_n)$, а на остальных принимает 0.

3. Основные результаты.

Здесь мы покажем, что у разных асинхронных систем переходов могут быть изоморфные группы гомологий, однако кольца когомологий у них — разные.

Пример 2. Пусть дана асинхронная система переходов $A_1 = (S_1, s_0^1, E_1, I_1, Tran_1)$, где $S_1 = \{x\}$, $s_0^1 = x$, $E_1 = \{a, b, c, d\}$, $I_1 = \{(a, b)(c, d)\}$, $Tran_1 = \{x \xrightarrow{a} x, x \xrightarrow{b} x, x \xrightarrow{c} x, x \xrightarrow{d} x\}$. Она имеет аугментированный граф состояний, показанный на рис.2.

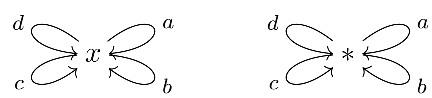

Рис. 2. Аугментированный граф асинхронной системы переходов $A_1 = (S_1, s_0^1, E_1, I_1, Tran_1)$.

Найдём группы гомологий этой системы. Имеем полукубическое множество $QS_1^\bullet = (Q_n S_1^\bullet, {}_1\partial_i^{n,\varepsilon})$, в котором:

- $Q_0 S_1^\bullet = \{(x), (*)\}$;
- $Q_1 S_1^\bullet = \{(x, a), (x, b), (x, c), (x, d), (*, a), (*, b), (*, c), (*, d)\}$;
- $Q_2 S_1^\bullet = \{(x, a, b), (x, c, d), (*, a, b), (*, c, d)\}$.

Ввиду того, что $x \cdot e = x$ для всех $e \in E_1$, то равенство ${}_1\partial_i^{n,1} = {}_1\partial_i^{n,0}$ справедливо для всех $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, поэтому обозначая для удобства ${}_1\partial_i^n = {}_1\partial_i^{n,1} = {}_1\partial_i^{n,0}$, получаем соотношения:

- ${}_1\partial_1^1(x, a) = (x)$, ${}_1\partial_1^1(*, a) = (*)$;
- ${}_1\partial_1^1(x, b) = (x)$, ${}_1\partial_1^1(*, b) = (*)$;
- ${}_1\partial_1^1(x, c) = (x)$, ${}_1\partial_1^1(*, c) = (*)$;
- ${}_1\partial_1^1(x, d) = (x)$, ${}_1\partial_1^1(*, d) = (*)$.
- ${}_1\partial_1^2(x, a, b) = (x, b)$, ${}_1\partial_2^2(x, a, b) = (x, a)$;
- ${}_1\partial_1^2(x, c, d) = (x, d)$, ${}_1\partial_2^2(x, c, d) = (x, c)$;

- ${}_1\partial_1^2(*, a, b) = (x, b)$, ${}_1\partial_2^2(*, a, b) = (*, a)$;
- ${}_1\partial_1^2(*, a, b) = (x, d)$, ${}_1\partial_2^2(*, c, d) = (*, d)$.

Нами построен цепной комплекс

$$0 \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}^8 \xleftarrow{d_2} \mathbb{Z}^4 \leftarrow 0.$$

Так как справедливо равенство $x \cdot e = x$ для всех $e \in E_1$, то граничные дифференциалы равны нулю. Действительно, например, для цепи (x, a, b)

$$d_2(x, a, b) = (x, a) - (x, b) - (x, a) + (x, b) = 0.$$

Тогда получаем, что

$$H_2(A_1; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_2) \cong \mathbb{Z}^4;$$
$$H_1(A_1; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_1) \cong \mathbb{Z}^8;$$
$$H_0(A_1; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_0) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Приведём теперь следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим асинхронную систему переходов $A_2 = (S_2, s_0^2, E_2, I_2, Tran_2)$, где $S_2 = \{x\}$, $s_0^2 = x$, $E_2 = \{a, b, c, d\}$, $I_2 = \{(a, b)(b, c)\}$, $Tran_2 = \{x \xrightarrow{a} x, x \xrightarrow{b} x, x \xrightarrow{c} x, x \xrightarrow{d} x\}$. Она имеет такой же, как и в предыдущем примере, аугментированный граф состояний (см. рис. 3).

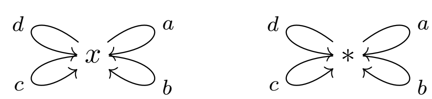

Рис. 3. Аугментированный граф асинхронной системы переходов $A_2 = (S_2, s_0^2, E_2, I_2, Tran_2)$.

Найдём группы гомологий этой системы. Рассмотрим полукубическое множество $QS_2^\bullet = (Q_n S_2^\bullet, {}_2\partial_i^{n,\varepsilon})$, в котором

- $Q_0 S_2^\bullet = \{(x), (*)\}$;
- $Q_1 S_2^\bullet = \{(x, a), (x, b), (x, c), (x, d), (*, a), (*, b), (*, c), (*, d)\}$;
- $Q_2 S_2^\bullet = \{(x, a, b), (x, b, c), (*, a, b), (*, b, c)\}$.

Ввиду того, что $x \cdot e = x$ для всех $e \in E_2$, то равенство ${}_2\partial_i^{n,1} = {}_2\partial_i^{n,0}$ справедливо для всех $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, поэтому также обозначая для удобства ${}_2\partial_i^n = {}_2\partial_i^{n,1} = {}_2\partial_i^{n,0}$, получаем соотношения:

- ${}_2\partial_1^1(x, a) = (x)$, ${}_2\partial_1^1(*, a) = (*)$;
- ${}_2\partial_1^1(x, b) = (x)$, ${}_2\partial_1^1(*, b) = (*)$;
- ${}_2\partial_1^1(x, c) = (x)$, ${}_2\partial_1^1(*, c) = (*)$;
- ${}_2\partial_1^1(x, d) = (x)$, ${}_2\partial_1^1(*, d) = (*)$.
- ${}_2\partial_1^2(x, a, b) = (x, b)$, ${}_2\partial_2^2(x, a, b) = (x, a)$;

- ${}_2\partial_1^2(x,b,c) = (x,c)$, ${}_2\partial_2^2(x,b,c) = (x,b)$;
- ${}_2\partial_1^2(*,a,b) = (x,b)$, ${}_2\partial_2^2(*,a,b) = (*,a)$;
- ${}_2\partial_1^2(*,b,c) = (x,c)$, ${}_2\partial_2^2(*,b,c) = (*,b)$.

Нами построен цепной комплекс

$$0 \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}^8 \xleftarrow{d_2} \mathbb{Z}^4 \leftarrow 0.$$

Так как справедливо равенство $x \cdot e = x$ для всех $e \in E_2$, то граничные дифференциалы равны нулю.

Тогда получаем, что

$$H_2(A_2;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_2) \cong \mathbb{Z}^4;$$
$$H_1(A_2;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_1) \cong \mathbb{Z}^8;$$
$$H_0(A_2;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(d_0) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Итак, мы рассмотрели две разные асинхронные системы переходов, у которых изоморфны гомологии. Рассмотрим теперь умножение в их кольцах когомологий.

Рассмотрим кольцо $H^*(A_1;\mathbb{Z})$. Ненулевыми равенствами в этом кольце будут

$$\big((x,a)^* \smile (x,b)^*\big)(x,a,b) = (x,a)^*(x,a) \cdot (x,b)^*(x,b) = 1;$$
$$\big((x,c)^* \smile (x,d)^*\big)(x,c,d) = (x,c)^*(x,c) \cdot (x,d)^*(x,d) = 1;$$
$$\big((*,a)^* \smile (*,b)^*\big)(*,a,b) = (*,a)^*(*,a) \cdot (*,b)^*(*,b) = 1;$$
$$\big((*,c)^* \smile (*,d)^*\big)(*,c,d) = (*,c)^*(*,c) \cdot (*,d)^*(*,d) = 1.$$

В кольце $H^*(A_2;\mathbb{Z})$ будут ненулевыми равенства

$$\big((x,a)^* \smile (x,b)^*\big)(x,a,b) = (x,a)^*(x,a) \cdot (x,b)^*(x,b) = 1;$$
$$\big((x,b)^* \smile (x,c)^*\big)(x,b,c) = (x,b)^*(x,b) \cdot (x,c)^*(x,c) = 1;$$
$$\big((*,a)^* \smile (*,b)^*\big)(*,a,b) = (*,a)^*(*,a) \cdot (*,b)^*(*,b) = 1;$$
$$\big((*,b)^* \smile (*,c)^*\big)(*,b,c) = (*,b)^*(*,b) \cdot (*,c)^*(*,c) = 1.$$

Покажем теперь, что между этими кольцами нет кольцевого изоморфизма. Рассуждать будем от противного. Для начала заметим, что системы переходов A_1 и A_2 представляются в виде несвязной суммы (см. их аугментированные графы), поэтому их коцепные комплексы изоморфны произведению комплексов, а это значит, что имеют место изоморфизмы

$$H^*(A_1;\mathbb{Z}) \cong K_x \times K_*, \quad H^*(A_2;\mathbb{Z}) \cong R_x \times R_*.$$

Образующими, например, кольца $H^*(A_1;\mathbb{Z})$, являются элементы вида $((x,e)^*,0)$, $(0,(*,e)^*)$, где $e \in \{a,b,c,d\}$. Предположим, что существует кольцевой изоморфизм

$$H^*(A_1;\mathbb{Z}) \cong K_x \times K_* \xrightarrow{F=(f_x,f_*)} H^*(A_2;\mathbb{Z}) \cong R_x \times R_*.$$

Так как в кольце $H^*(A_2;\mathbb{Z})$ справедливы равенства

$$(x,d)^* \smile (x,e)^* = 0,$$

$$(*,d)^* \smile (*,e)^* = 0,$$

для каждого $e \in \{a,b,c,d\}$, то в кольце $H^*(A_1;\mathbb{Z})$ должны выполняться равенства

$$f_x\left((x,d)^*\right) \smile f_x\left((x,e)^*\right) = 0;$$

$$f_*\left((*,d)^*\right) \smile f_*\left((*,e)^*\right) = 0.$$

Ясно, что здесь $f_x\left((x,e)^*\right)$, $f_*\left((*,e)^*\right)$ — произвольные элементы кольца $H^*\left(A_1;\mathbb{Z}\right)$, и мы, без ограничения общности, можем принять их за элементы $(x,\alpha)^*$ и $(*,\alpha)^*$ соответственно, здесь $\alpha \in \{a,b,c,d\}$.

Пусть

$$f_x\left((x,d)^*\right) = k_1(x,a)^* + k_2(x,b)^* + k_3(x,c)^* + k_4(x,d)^*;$$

$$f_*\left((*,d)^*\right) = l_1(*,a)^* + l_2(*,b)^* + l_3(*,c)^* + l_4(*,d)^*.$$

Тогда для каждого $\alpha \in \{a,b,c,d\}$ получаем равенства

$$(k_1((x,a)^*,0) + k_2((x,b)^*,0) + k_3((x,c)^*,0) + k_4((x,d)^*,0)) \smile ((x,\alpha)^*,0) = 0;$$

$$(l_1(0,(*,a)^*) + l_2(0,(*,b)^*) + l_3(0,(*,c)^*) + l_4(0,(*,d)^*)) \smile (0,(*,\alpha)^*) = 0,$$

и, подставляя вместо α каждый элемент из $\{a,b,c,d\}$, получаем, что

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0;$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0.$$

Таким образом, этот кольцевой изоморфизм переводит ненулевой элемент в нулевой. Полученное противоречие означает, что кольца $H^*(A_1;\mathbb{Z})$ и $H^*(A_2;\mathbb{Z})$ — неизоморфны.

Таким образом, мы видим, что, хотя гомологии асинхронных систем переходов A_1 и A_2 изоморфны, их кольца когомологий — неизоморфны.

Заключение

В данной работе мы показали, что существуют асинхронные системы переходов, имеющие изоморфные группы гомологий, но не изоморфные кольца когомологий. Следовательно, кольца когомологий более полно отражают свойства асинхронных систем переходов.

Список литературы

[1] А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И. А. Трещев, "Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгебраической топологии", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **11**:1, (2008), 141–151 MathNet.ru/ http://mi.mathnet.ru/sjim495, MR http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2535256.

[2] А. А. Хусаинов, В. В. Ткаченко, "Группы гомологий асинхронных систем переходов", *Математическое моделирование и смежные вопросы математики.*, Изд-во ХГПУ, Хабаровск, 2003, 23–33.

[3] А. А. Хусаинов, В. В. Ткаченко, "О группах гомологий асинхронных систем переходов", *Дальневост. матем. журн.*, **6**:1-2, (2005), 23–38 MathNet.ru/ http://mi.mathnet.ru/dvmg196.

[4] M. A. Bednarczyk, *Categories of Asynchronous Systems*, Ph. D. Thesis, University of Sussex, 1988, 222 с.

[5] M. W. Shields, "Concurrent machines", *Computer Journal*, **28**, (1985), 449–465

[6] A. A. Husainov, "On the homology of small categories and asynchronous transition system", *Homology, Homotopy Appl*, **6**:1, (2004), 439–471 http://www.rmi.acnet.ge/hha

[7] A. A. Husainov, *On the Cubical Homology Groups of Free Partially Commutative Monoids*, arXiv: abs/math.CT/0611011.

[8] В. Е. Лопаткин, “Кольца когомологий полукубических множеств”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **10**:2, (2010), 3–10 MathNet.ru/ http://mi.mathnet.ru/isu15.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 мая 2011 г.

Lopatkin V. E. The cohomology rings of asynchronous transition systems. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 181–189.

ABSTRACT

In this paper we introduce the cohomology rings of asynchronous transition systems. We'll show that different asynchronous transition systems which have isomorphic homology groups may have nonisomorphic cohomology rings.

Key words: *the cohomology rings, the homology of the asynchronous transition systems, precubical sets, asynchronous transition systems.*