

© А. В. Рукавишников<sup>1</sup>

## Численное решение неоднородной задачи теории упругости с криволинейным интерфейсом

В работе рассмотрена неоднородная задача теории упругости с криволинейным интерфейсом между материалами. Для решения задачи применен метод декомпозиции области в сочетании с аппроксимацией задачи при помощи неконформного метода конечных элементов. Для полученной системы линейных алгебраических уравнений построен эффективный итерационный метод с блочным переобусловливанием матрицы системы. Проведен анализ численных экспериментов.

Ключевые слова: *итерационные методы, переобусловливатели, задача с седловой точкой, декомпозиция области, криволинейный интерфейс, разрывные параметры Ламе.*

### Введение

Использование метода конечных элементов (МКЭ) на декомпозиционной области в сочетании с mortarными склейками решения на интерфейсе между подобластями может быть эффективным для приближенного решения задач механики в неоднородных средах.

Метод mortarных элементов впервые был представлен в [1] для решения уравнения Пуассона. Основные идеи метода заключены в следующем: (1) в качестве условий согласования на интерфейсе используются условия слабой непрерывности; (2) правильно выбираются конечно-элементные пространства на общей границе подобластей. Оценки скорости сходимости приближенного решения к точному для задач эллиптического типа с интерфейсом, представляющим отрезок, представлены в [2]. Отметим работы [3] и [4], в которых предложены различные способы решения задачи Пуассона с криволинейным интерфейсом.

В работе рассмотрена задача теории упругости с разрывными (кусочно-постоянными) параметрами Ламе. Второй особенностью задачи, помимо разрыва коэффициентов, является тот факт, что линия раздела между различными материалами представляет собой кривую.

Исходная область разбивается на подобласти так, чтобы на каждой из них коэффициенты задачи были постоянны. Для такой декомпозиции области предложена вариационная постановка задачи, учитывающая следующие условия на линии раздела материалов: (1) условие слабой непрерывности вектора перемещений; (2) условие согласования тензоров напряжений на функционалах. Подход настоящей статьи является более общим по сравнению с классическими способами нахождения приближенного решения.

В работе для приближенного решения задачи применен неконформный МКЭ, основанный на том, что интерфейс между подобластями интерполируется кусочно-линейным образом, а не учитывается точно. Отметим, что интерполяция интерфейса проведена независимыми способами на каждой подобласти. Таким образом, сеточные узлы не стыкуются

<sup>1</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: alexeyruk@mail.ru

на интерфейсе. Определено понятие дискретного скачка функции на линии раздела сред. Построен и реализован итерационный процесс решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с блочным переобусловливанием ее матрицы. Приведены результаты численных расчетов модельной задачи.

Предложенную в работе методику, а именно: 1) разбиение области на подобласти, на которых коэффициенты постоянны; 2) использование сеток на подобластях, не стыкующихся на общем интерфейсе, в сочетании с mortarной склейкой решения; 3) построение блочного переобусловливателя матрицы системы — можно перенести на задачу течения двухфазной вязкой несжимаемой жидкости без перемешивания, когда интерфейс между фазами представляет собой кривую. Работы по данной тематике, включающие теоретическое обоснование метода, получение оценок скорости сходимости приближенного решения к точному в различных нормах сеточных пространств, численную реализацию подхода на ЭВМ будут опубликованы в ближайшее время.

Статья состоит из пяти разделов и заключения. В первом разделе обсуждается классическая постановка задачи теории упругости с разрывными параметрами Ламе. Второй раздел посвящен определению обобщенного решения задачи на декомпозиционной области; вводятся необходимые функциональные пространства. В третьем разделе построен неконформный МКЭ, определена приближенная обобщенная постановка задачи. Итерационный метод решения полученной СЛАУ с блочным переобусловливанием матрицы системы описан в четвертом разделе. В пятом разделе приведены результаты численных расчетов модельной задачи. В заключении сделаны выводы об эффективности предложенного подхода.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}^2 = \{\bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)\}$  — выпуклая многоугольная область с границей  $\partial\Omega$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ). Односвязные области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  таковы, что  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Gamma$ , где  $\Gamma$  — достаточно гладкая (незамкнутая, без самопересечений) кривая, концы которой принадлежат  $\partial\Omega$ . Кривую  $\Gamma$  будем называть интерфейсом между подобластями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Задача состоит в том, чтобы найти вектор перемещений  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$ , удовлетворяющий следующему уравнению, граничным и интерфейсным условиям:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) &= \mathbf{F}, & \text{в } \Omega, & \quad \mathbf{u} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] &= 0, & [\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] &= \mathbf{g} & \text{на } \Gamma, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{F} = (F^1, F^2)$ ,  $\mathbf{g} = (g^1, g^2)$  — заданные вектор-функции в  $\Omega$  и на  $\Gamma$  соответственно,  $\sigma(\mathbf{u}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1,2} = \{2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij}\}_{i,j=1,2}$  — тензор напряжений,  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1,2} = \{\frac{1}{2}(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{\partial u^i}{\partial x_j})\}_{i,j=1,2}$  — тензор деформаций,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$   $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ .

Полагаем, что положительные параметры Ламе  $\mu$  и  $\lambda$  задачи (1.1) кусочно-постоянны:  $\mu = \begin{cases} \mu_1, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_1, \\ \mu_2, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2; \end{cases}$   $\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_1, \\ \lambda_2, & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2. \end{cases}$  Через  $z_k$  обозначим функцию, которая совпадает в  $\Omega_k$  с определенной в  $\Omega$  функцией  $z$  ( $z_k = z|_{\Omega_k}$ ),  $k = 1, 2$ , тогда  $[z]$  — скачок функции  $z$  на  $\Gamma$ :  $[z] = z_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1} - z_2|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_2}$ , где  $z_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1}$  и  $z_2|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_2}$  — соответствующие следы функций  $z_1$  и  $z_2$  на  $\Gamma$ .

## 2. Определение обобщенного решения

Определим функциональные пространства. Через  $L_p(\Omega_0)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , обозначим пространство определенных в некоторой области

$\Omega_0$  вещественных функций  $s$ , абсолютно интегрируемых по лебеговой мере  $d\bar{\mathbf{x}} = dx_1 dx_2$ , с нормой  $\|s\|_{L_p(\Omega_0)} = \left( \int_{\Omega_0} |s(\bar{\mathbf{x}})|^p d\bar{\mathbf{x}} \right)^{1/p}$ . Через  $L_\infty(\Omega_0)$  обозначим пространство существенно ограниченных функций  $\zeta$  в  $\Omega_0$  таких, что  $\|\zeta\|_{L_\infty(\Omega_0)} = \text{ess sup}_{\Omega_0} |\zeta(\bar{\mathbf{x}})| < \infty$ .  $W_p^m(\Omega_0) = \{s \in L_p(\Omega_0) : D^\alpha s \in L_p(\Omega_0) \forall \alpha, |\alpha| \leq m - \text{целое}, 1 \leq p \leq +\infty\}$  с нормой  $\|s\|_{W_p^m(\Omega_0)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha s\|_{L_p(\Omega_0)}^p \right)^{1/p}$ ,  $D^\alpha s = \frac{\partial^{|\alpha|} s}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_i \geq 0$  (целые) и  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ . Обозначим через  $H^m(\Omega_0)$  пространство  $W_2^m(\Omega_0)$  с нормой  $\|\cdot\|_{m, \Omega_0} \equiv \|\cdot\|_{W_2^m(\Omega_0)}$ . Если  $m = 0$ , то  $H^0(\Omega_0) \equiv L_2(\Omega_0)$  ( $\|\cdot\|_{0, \Omega_0} \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega_0)}$ ). Пусть  $\Gamma_0$  – часть границы области  $\Omega_0$ , тогда  $H^{1/2}(\Gamma_0) = \{r \in L_2(\Gamma_0) : \exists s \in H^1(\Omega_0), s|_{\Gamma_0} = r\}$ ,  $\|r\|_{1/2, \Gamma_0} = \inf_{\substack{s \in H^1(\Omega_0) \\ s|_{\Gamma_0} = r}} \|s\|_{1, \Omega_0}$ .

Далее,  $H_*^m(\Omega) = \{z \in L_2(\Omega) : z_k = z|_{\Omega_k} \in H^m(\Omega_k), m \in \mathbf{N}, k = 1, 2\}$ ,  $\|z\|_{m, \Omega}^* = \left( \sum_{k=1}^2 \|z_k\|_{m, \Omega_k}^2 \right)^{1/2}$ ;

$\mathbf{H}_*^m(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v^1, v^2) : v^l \in H_*^m(\Omega)\}$ ,  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{m}, \Omega}^* = \left( \sum_{l=1}^2 (\|v^l\|_{m, \Omega}^*)^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbf{m}, \Omega_k}^2 \right)^{1/2}$ ;

$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\rho \in H^{1/2}(\Gamma) : \bar{\rho} \in H^{1/2}(\partial\Omega_k), k = 1, 2\}$ ,  $\bar{\rho} = \begin{cases} \rho, & \text{на } \Gamma, \\ 0, & \text{на } \partial\Omega_k \setminus \Gamma, \end{cases}$  с нормой

$\|\rho\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\substack{z \in H^1(\Omega_k) \\ z|_{\Gamma} = \rho, z|_{\partial\Omega_k \setminus \Gamma} = 0}} \|z\|_{1, \Omega_k}$ ;

$\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho^1, \rho^2) : \rho^l \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)\}$  с нормой  $\|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} = \left( \sum_{l=1}^2 \|\rho^l\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}$ ;

$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_*^1(\Omega) : [\mathbf{v}] \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ ,  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}(\Omega)} = \left( \sum_{k=1}^2 \|\mathbf{v}_k\|_{1, \Omega_k}^2 + \|[\mathbf{v}]\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}$ ;

$\mathbf{M}(\Gamma)$  – сопряженное пространство к  $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$  с нормой  $\|\boldsymbol{\nu}\|_{\mathbf{M}(\Gamma)} = \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\int_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\mu} d\Gamma}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)}}$ .

Пусть  $F_k^j \in L_2(\Omega_k)$  – липшицевы непрерывные функции ( $j, k = 1, 2$ ), а  $\mathbf{g} \in \mathbf{M}(\Gamma)$ . Определим обобщенное решение задачи (1.1) как решение вариационной задачи: *найми*  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{M}(\Gamma)$  *такие, что для любых*  $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{M}(\Gamma)$  *выполнены равенства:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + d(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) &= l(\boldsymbol{\varphi}), \\ d(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где линейная и билинейные формы имеют вид

$$l(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{m=1}^2 l_m(\boldsymbol{\varphi}), \quad l_1(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_1} \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 d\bar{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_1} d\Gamma, \quad l_2(\boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_2} \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 d\bar{\mathbf{x}};$$

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{m=1}^2 a_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}), \quad a_m(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\Omega_m} \left( 2\mu_m \varepsilon(\mathbf{u}_m) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}_m) + \lambda_m \operatorname{div} \mathbf{u}_m \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_m \right) d\bar{\mathbf{x}};$$

$$d(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{m=1}^2 d_m(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}), \quad d_m(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Gamma} (-1)^{m+1} \chi \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varphi}_m|_{\Gamma \cap \bar{\Omega}_m} d\Gamma.$$

Для согласования решения на  $\Gamma$  в (2.1) использованы условия

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)(n_1)^j) \varphi^i d\Gamma - \int_{\Gamma} g^i \varphi^i d\Gamma = \int_{\Gamma} -(\sigma_{ij}(\mathbf{u}_2)(n_2)^j) \varphi^i d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma), \quad (2.2)$$

$$\int_{\Gamma} \chi (u_1 - u_2)^i \nu^i d\Gamma = 0 \quad \forall \nu \in \mathbf{M}(\Gamma),$$

где  $(n_2)^j = -(n_1)^j$  и  $(n_m)^j$  —  $j$ -я компонента внешней нормали  $\mathbf{n}_m$  к  $\Gamma$  относительно  $\Omega_m$ ,  $m = 1, 2$ ,  $\chi \in C^1(\Gamma)$  — весовая функция, определенная равенством  $\chi = \frac{1}{\det(\gamma' \circ \gamma^{-1})}$ ;  $\gamma$  — параметризация  $\Gamma$  такая, что  $\gamma \in C^2(\hat{I}, \mathbf{R}^2)$ ,  $|y_1 - y_2| \leq C |\gamma(y_1) - \gamma(y_2)| \quad \forall y_1, y_2 \in \hat{I} = [a, b]$ .

Для замыкания с помощью (2.2) полученных в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уравнений в (2.1) введена вспомогательная вектор-функция  $\beta = (\beta^1, \beta^2)$ , определенная из соотношения

$$\int_{\Gamma} \beta^i \varphi^i d\Gamma = \int_{\Gamma} -\frac{1}{\chi} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}_1)(n_1)^j) \varphi^i d\Gamma. \quad (2.3)$$

**Комментарий.** *Обобщенная постановка (2.1) получена из классической постановки (1.1) стандартным образом (см. [5]), с использованием формулы Грина на подобластях. В [1] рассмотрен случай эллиптических задач на декомпозиционной области.*

### 3. Схема метода конечных элементов

Выполним триангуляцию  $\Upsilon_h$  области  $\Omega$ . Для каждой  $\Omega_j$  имеем квазиравномерное (см. [6]) разбиение  $\Omega_{jh}$  на треугольники со сторонами порядка  $h_j$ . Треугольники обозначим через  $K$  и назовем конечными элементами. Их совокупность обозначим через  $\Upsilon_h^{(j)}$ . Разбиение  $\Omega_{jh} = \bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(j)}} K$  аппроксимирует подобласть  $\Omega_j$  так, что  $\partial\Omega_{jh}$  является кусочно-линейной интерполяцией  $\partial\Omega_j$ . Концы интерфейса  $\Gamma$  входят в множество узлов интерполяции.

Таким образом, для  $\Gamma$  построены две кусочно-линейные интерполяции  $\Gamma_{1h}$  и  $\Gamma_{2h}$ , которые являются частями  $\partial\Omega_{1h}$  и  $\partial\Omega_{2h}$  соответственно. Так как  $\Gamma_{jh}$  кусочно-линейны, то параметризуем их с помощью непрерывных кусочно-линейных функций  $\gamma_h^j : \hat{I} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\hat{I} = [a, b]$  и при этом  $\gamma_h^1(a) = \gamma_h^2(a)$ ,  $\gamma_h^1(b) = \gamma_h^2(b)$ . В качестве узлов аппроксимации для компонент вектора перемещений выберем вершины и середины сторон  $K$ . Множества вершин и середин сторон на  $K$ , принадлежащих  $\Gamma_{1h}$ , обозначим через  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{L}$  соответственно. Определим множества  $\hat{\mathcal{N}} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r; r \in \mathcal{N} \text{ на } \Gamma_h \equiv \Gamma_{1h}\}$  и  $\hat{\mathcal{L}} = \{y \in \hat{I} : \gamma_h^1(y) = r; r \in \mathcal{L} \text{ на } \Gamma_h\}$ . Поскольку  $\Upsilon_h^{(1)}$  — регулярная по построению, а параметризация  $\gamma$  интерфейса  $\Gamma$  удовлетворяет свойству инъективности, то узлы  $\hat{\mathcal{N}}$  образуют регулярную сетку на  $\hat{I}$ . Отметим, что подмножества узлов аппроксимаций  $\Omega_{1h}$  и  $\Omega_{2h}$  на  $\Gamma$  не совпадают, т.е. сетки не стыкуются на  $\Gamma$ . Обозначим через  $\Omega_h$  разбиение  $\Omega : \Omega_h = \Omega_{1h} \cup \Omega_{2h} = (\bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(1)}} K) \cup (\bigcup_{K \in \Upsilon_h^{(2)}} K) = \bigcup_{K \in \Upsilon_h} K$ .

Параметр  $h$  таков, что  $h \cong h_1 \cong h_2$ .

Далее введем конечно-элементное пространство на  $\Omega_{jh}$ :  $V_h^{(j)}(\Omega_{jh})$  — подпространство непрерывных, квадратичных на  $K$ , конечно-элементных функций из  $H^1(\Omega_{jh})$ , обращающихся в нуль на  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Обозначим через  $\hat{M}_h$  пространство лагранжевых множителей (мортарных функций) на  $\hat{I}$ , построенное на сетке с узлами из  $\hat{\mathcal{N}}$ , такое, что для любой  $\hat{\omega}_h \in \hat{M}_h$  выполнены условия:  $\hat{\omega}_h$  — непрерывная функция пространства  $L_2$ ;  $\hat{\omega}_h$  квадратична на каждом внутреннем отрезке и линейна на концевых отрезках разбиения  $\hat{I}$  (вспомогательный узел на внутреннем элементе разбиения  $\hat{I}$  совпадает с узлом из  $\hat{\mathcal{L}}$ ). Следовательно, на  $\Gamma_h$  определим пространство  $M_h$  такое, что  $M_h = \hat{M}_h \circ \gamma^{-1}$ . При этом сеточное решение  $\beta_{jh}^m \in M_h$ ,  $m, j = 1, 2$ , ищем естественным образом — в виде линейной комбинации произведений коэффициентов на базисные функции  $M_h$ . Как и в [7], полагаем  $\beta_h^m = \beta_{1h}^m = -\beta_{2h}^m$ , где  $\beta_h = (\beta_h^1, \beta_h^2)$  — сеточный аналог  $\beta$ , определенной в (2.3). Из теории метода мортарных элементов следует

существование проектора  $\hat{\Theta}_h : L_2 \rightarrow \hat{W}_h$ , для которого

$$\int_{\hat{I}} \hat{v} \hat{v} d\hat{I} = \int_{\hat{I}} (\hat{\Theta}_h \hat{v}) \hat{v} d\hat{I} \quad \forall \hat{v} \in \hat{M}_h, \quad \|\hat{\Theta}_h \hat{v}\|_{0,\hat{I}} \leq C_{\hat{\Theta}_h} \|\hat{v}\|_{0,\hat{I}}. \quad (3.1)$$

Здесь пространство  $\hat{W}_h$  – подпространство непрерывных, кусочно-квадратичных функций, обращающихся в нуль на концах  $\hat{I}$ , такое, что  $\hat{W}_h = \{\omega|_{\Gamma_{1h}} \circ \gamma_h^1 : \omega \in V_h^{(1)}\}$  и  $\dim \hat{W}_h = \dim \hat{M}_h$ . Константа  $C_{\hat{\Theta}_h} > 0$  не зависит от разбиения  $\hat{I}$ .

Определим конечно-элементные пространства на  $\Omega_h$  и  $\Gamma_h$  :

$$V_h(\Omega_h) = \{v_h : v_{mh} \in V_h^{(m)}(\Omega_{mh}), m = 1, 2\} \text{ с нормой } \|v_h\|_{V_h} = (\|v_h\|_{1,\Omega_h}^2 + \|[v_h]_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2)^{1/2},$$

$$\|v_h\|_{1,\Omega_h} = \left( \sum_{m=1}^2 \|v_{mh}\|_{1,\Omega_{mh}}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{m=1}^2 \sum_{K \in \Upsilon_h^{(m)}} \|v_{mh}|_K\|_{1,K}^2 \right)^{1/2}, \quad \|[v_h]_h\|_{1/2,h,\Gamma} = h^{-1/2} \|[v_h]_h\|_{0,\Gamma},$$

$[v_h]_h$  – дискретный скачок функции  $v_h$  на  $\Gamma$ ,  $[v_h]_h = v_{1h} \circ \gamma_h^1 \circ \gamma^{-1} - v_{2h} \circ \gamma_h^2 \circ \gamma^{-1}$ ;

$$\mathbf{V}_h(\Omega_h) = \{\mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2) : v_h^j \in V_h(\Omega_h), j = 1, 2\} \text{ с нормой } \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_h} = \left( \sum_{j=1}^2 \|v_h^j\|_{V_h}^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{m=1}^2 \|v_{mh}^j\|_{1,\Omega_{mh}}^2 + \|[v_h^j]_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2 \right) \right)^{1/2} = (\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h}^2 + \|[v_h]_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2)^{1/2};$$

$$\mathbf{M}_h(\Gamma_h) = \{\boldsymbol{\nu}_h = (\nu_h^1, \nu_h^2) : \nu_h^j \in M_h(\Gamma_h), j = 1, 2\} \text{ с нормой } \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{-1/2,h,\Gamma} = h^{1/2} \|\boldsymbol{\nu}_h\|_{0,\Gamma}.$$

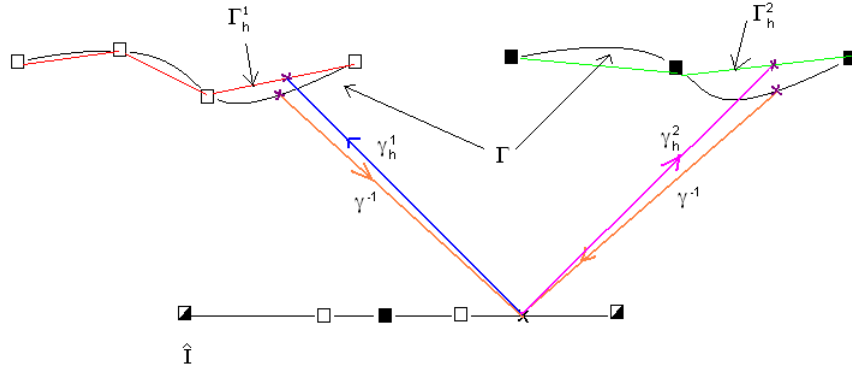


Рис. 1. Определение дискретного скачка функции.

**Замечание 3.1.** В соответствии с определением пространства  $\mathbf{V}_h$  и утверждением теоремы 4.2.1 из [6] справедлив следующий факт:  $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{V}$ . Поэтому рассматриваемый метод является неконформным методом конечных элементов.

Определим приближенное обобщенное решение задачи (1.1) на  $\Omega_h$ : приближенным решением задачи (1.1) по методу конечных элементов назовем пару  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\beta}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h$ , удовлетворяющую – для любых  $(\boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\nu}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h$  – системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) + d_h(\boldsymbol{\varphi}_h, \boldsymbol{\beta}_h) &= l_h(\boldsymbol{\varphi}_h), \\ d_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$l_h(\boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{m=1}^2 l_{mh}(\boldsymbol{\varphi}_h), \quad a_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{m=1}^2 a_{mh}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h),$$

$$l_{1h}(\boldsymbol{\varphi}_h) = \int_{\Omega_{1h}} \mathbf{F}_1^{npod} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1h} d\bar{\mathbf{x}} - \int_{\hat{I}} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{1h} d\hat{I}, \quad l_{2h}(\boldsymbol{\varphi}_h) = \int_{\Omega_{2h}} \mathbf{F}_2^{npod} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2h} d\bar{\mathbf{x}};$$

$$a_{mh}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{K \in \Upsilon_h^{(m)}} \int_K \left( 2\mu_m \varepsilon(\mathbf{u}_{mh}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}_{mh}) + \lambda_m \operatorname{div} \mathbf{u}_{mh} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_{mh} \right) dK;$$

$$d_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \sum_{m=1}^2 d_{mh}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \int_{\Gamma} \chi[\mathbf{u}_h]_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h d\Gamma,$$

вектор  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{1h} = (\hat{\varphi}_{1h}^1, \hat{\varphi}_{1h}^2)$  на  $\hat{I}$  таков, что  $\hat{\varphi}_{1h}^i = \varphi_{1h}^i|_{\Gamma_h^1} \circ \gamma_h^1 \in \hat{W}_h$ ;  $\mathbf{F}_m^{n\text{pod}} = ((F_m^1)^{n\text{pod}}, (F_m^2)^{n\text{pod}})$  — липшицевы непрерывные функции на  $\Omega_m \cup \Omega_{mh}$  такие, что  $\mathbf{F}_m^{n\text{pod}} = \mathbf{F}_m$  в  $\Omega_m \cap \Omega_{mh}$  и  $\|(F_m^j)^{n\text{pod}}\|_{W_\infty^1(\Omega_m \cup \Omega_{mh})} \leq C_{F_m^j}$ ,  $C_{F_m^j} > 0$  — константа, зависящая от  $F_m^j$ ,  $m, j = 1, 2$ , а вектор  $\hat{\mathbf{g}} = (\hat{g}^1, \hat{g}^2)$  устроен так, что  $\hat{g}^i$  совпадает с интерполянтном функции  $g^i \circ \gamma_h^1$  на  $\hat{M}_h$ ,  $i = 1, 2$ .

Осталось перейти в билинейной форме  $d_h(\cdot, \cdot)$  от интеграла по  $\Gamma$  к интегралу по  $\hat{I}$

$$\int_{\Gamma} \chi[\mathbf{u}_h]_h \cdot \boldsymbol{\nu}_h d\Gamma = \int_{\hat{I}} (u_{1h} \circ \gamma_h^1 - u_{2h} \circ \gamma_h^2)^i \hat{\nu}_h^i d\hat{I}, \quad \hat{\nu}_h^i = \nu_h^i \circ \gamma \in \hat{M}_h.$$

Конечно-элементная задача (3.2) порождает СЛАУ, имеющую седловую матрицу

$$\begin{bmatrix} A & D \\ D^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1h} & 0 \\ 0 & A_{2h} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{1h} \\ D_{2h} \end{bmatrix}, \zeta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1h} \\ \mathbf{u}_{2h} \end{bmatrix}, \eta = \boldsymbol{\beta}_h, \omega = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1h} \\ \mathbf{F}_{2h} \end{bmatrix}, z = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Отметим, что  $A$  — положительно определенная квадратная матрица, а  $D$  — прямоугольная (некватратная) матрица, причем ненулевые множители получены только в тех уравнениях системы (строках матрицы), которые относятся к узлам на интерфейсе.

## 4. Построение итерационного процесса

Для нахождения решения системы (3.3), (3.4) построим итерационный процесс (см. [8], [9]) с переобусловливанием матрицы системы, устроенный следующим образом:

- 1) выбираем произвольные  $\eta^0$  и  $\zeta^0$ ;
- 2) производим итерации  $k = 0, 1, 2, \dots$ , далее выполняем шаги 3) и 4), пока не будет выполнено условие остановки (см. (4.4));
- 3) находим вектор  $\zeta^{k+1}$  :

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k + \alpha_1^k \hat{A}^{-1}(\omega - A\zeta^k - D\eta^k); \quad (4.1)$$

- 4) вычисляем вектор  $\eta^{k+1}$  :

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \alpha_2^k \hat{S}^{-1}(D^T \zeta^{k+1} - z). \quad (4.2)$$

Здесь  $\zeta^k$ ,  $\eta^k$  и  $\zeta^{k+1}$ ,  $\eta^{k+1}$  — значения векторов на  $k$ -й и  $(k+1)$ -й итерациях (4.1), (4.2) соответственно, числа  $\alpha_1^k$ ,  $\alpha_2^k$  являются параметрами процессов (4.1), (4.2). Матрицы  $\hat{A}$  и  $\hat{S}$  — переобусловливающие матрицы для  $A$  и  $S = D^T A^{-1} D$  соответственно.

На каждой итерации требуется вычислить вектор невязки  $r^n$  и вектор  $\hat{K}^{-1} r^n$ . Вектор невязки  $r^n$  для абстрактного итерационного процесса

$$q^{n+1} = q^n + \alpha_n \hat{K}^{-1} r^n, \quad (4.3)$$

решения системы  $Kq = \chi$  определим равенством  $r^n = \chi - Kq^n$ . Вектор  $\hat{K}^{-1} r^n$  — результат умножения обратной переобусловливающей матрицы системы на  $r^n$ .

Для экономичного нахождения  $q^{n+1}$  в (4.3) (для (4.1)) используем разложение вектора  $\hat{K}^{-1} r^n$  в  $m$ -мерном подпространстве Крылова (см. [10], [11]). Приближенное решение находим с помощью обобщенного метода минимальных невязок (GMRES(m)-метод) (см. [10]).

Алгоритм проведения итерации с переобусловливанием матрицы  $K$  имеет вид:

- 1) известен вектор  $q^n$ ;
- 2) вычисляем вектор невязки  $r^n = \chi - Kq^n$  и вектор  $r_1^n = \hat{K}^{-1} r^n$ ;
- 3) находим евклидову норму  $\varrho = \|r_1^n\|$ ;
- 4) в результате нормирования получаем новый вектор  $\theta_1 = r_1^n / \varrho$ ;
- 5) для  $j = 1, \dots, m$ ;
- 6) находим вспомогательный вектор  $\rho : \rho' = K\theta_j, \rho = \hat{K}^{-1} \rho'$ ;
- 7) для  $i = 1, \dots, j$ ;
- 8) вычисляем скалярное произведение векторов  $\psi_{ij} = (\rho, \theta_i)$ ;
- 9) ищем поправку вектора  $\rho = \rho - \psi_{ij}\theta_i$ ;
- 10) окончание цикла по  $i$  (7);
- 11) вычисляем норму  $\psi_{j+1j} = \|\rho\|$ , если  $\psi_{j+1j} = 0$ , то выход из цикла по  $j$  (5);
- 12) если  $\psi_{j+1j} \neq 0$ , то вычисляем новый вектор  $\theta_{j+1} = \rho / \psi_{j+1j}$ ;
- 13) окончание цикла по  $j$  (5);
- 14) в результате получаем матрицу  $\Theta_m$ , составленную из векторов  $\theta_i, i = 1, \dots, m$  (столбцов), и матрицу  $\Psi_m = \{\psi_{ij}\}$ , которая имеет "почти" верхнетреугольный вид, диагональ под главной диагональю ненулевая, более того, она не содержит нулевых элементов, кроме, может быть, последнего;
- 15) находим  $q^n : q^{n+1} = q^n + (\varsigma^1 \theta_1 + \dots + \varsigma^m \theta_m)$ , где вектор  $\varsigma = [\varsigma^1, \dots, \varsigma^m]^T : \varsigma = \operatorname{argmin} \|\varrho e^1 - \sum_m \varsigma^m \theta_m\|, e^1 = [1, 0, \dots, 0]^T, \varrho$  – норма из пункта 3).

Моментом остановки итерационного процесса (4.1), (4.2) служит выполнение оценки

$$\|r^k\| \leq \varepsilon \|r^0\| \quad (4.4)$$

для процесса (4.1),  $\varepsilon$  – заданная точность.

Для построения переобусловливающей матрицы  $\hat{A}$  используем идею (см. [11]) неполного разложения матрицы на треугольные множители  $ILU(0)$ , т. е.  $\hat{A} = \hat{L} \cdot \hat{U}$ , где  $\hat{L}$  и  $\hat{U}$  – верхняя и нижняя треугольные матрицы соответственно.

В силу того, что матрица  $A$  блочно-диагональная,  $\hat{A}$  имеет вид

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{L}_{1h} & 0 \\ 0 & \hat{L}_{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_{1h} & 0 \\ 0 & \hat{U}_{2h} \end{bmatrix}.$$

В алгоритме 1)–15), его пунктах 2) и 6), находим  $r^n = \hat{A} r_1^n, \rho' = \hat{A} \rho$ . Для того чтобы вычислить векторы  $r_1^n$  и  $\rho$ , необходимо сначала найти векторы  $r_U^n, \rho'_U : r_U^n = \hat{U} r_1^n, \rho'_U = \hat{U} \rho$  как решения систем  $r^n = \hat{L} r_U^n, \rho' = \hat{L} \rho'_U$ . Эти СЛАУ легко разрешимы благодаря тому, что матрицы  $\hat{L}$  и  $\hat{U}$  имеют треугольный вид.

Процесс построения переобусловливающей матрицы  $\hat{S}$  в (4.2) и эффективное решение системы с ней несколько сложнее. Рассмотрим вспомогательную матрицу  $\tilde{S}$  :

$$\tilde{S} = D^T \hat{A}^{-1} D = (D^T (\hat{U})^{-1}) \cdot (\hat{L}^{-1} D) = ((\hat{U}^T)^{-1} D)^T \cdot (\hat{L}^{-1} D) = \tilde{Y}^T \cdot \tilde{X}.$$

Способ построения матриц  $\tilde{Y}^T$  и  $\tilde{X}$  изложен в [12]. Отметим, что прямоугольная матрица  $\tilde{X}$  ( $\tilde{Y}^T$ ) не является квадратной матрицей, размерность которой совпадает с размерностью матрицы  $D$ . В связи с этим следует отметить, что эффективное решение системы с матрицей  $\tilde{S}$  невозможно, в отличие от эффективного умножения на матрицу. Таким образом,  $\tilde{S}$  служит вспомогательной матрицей при построении переобусловливателя  $\hat{S}$ .

Пусть для решения СЛАУ  $x' = H y'$  построена переобусловливающая матрица  $\tilde{H}$ , но она обладает плохим свойством: эффективное решение системы с матрицей  $\tilde{H}$  (нахождение обратной –  $\tilde{H}^{-1}$ ) невозможно. Тогда следует построить такую переобусловливающую матрицу к  $H$  –  $\hat{H}$ , для которой  $\tilde{H}$  будет вспомогательной с той особенностью, что ее

можно легко умножить на вектор. Процесс решения системы с матрицей  $\hat{H}$  будет выглядеть как внутренняя итерационная процедура. Отметим, что внутренняя итерационная процедура является сходящейся, т. е. полученное с помощью нее приближенное решение сходится к точному решению системы (см. [10]).

Пусть требуется найти вектор  $r^*$  — решение системы  $\hat{H} r^* = \bar{r}$ , тогда внутренняя итерационная процедура будет следующей:

- 1)  $\omega^0 = 0$ ;
- 2)  $\omega^l = \omega^{l-1} + \vartheta^l (\bar{r} - \hat{H} \omega^{l-1})$ ,  $l = 1, \dots, L$ ;
- 3)  $r^* = \omega^L$ , где  $\vartheta^l$  — параметр процесса (в [13] — параметр чебышевского ускорения).

У нас в качестве такой процедуры использован GMRES(m)-метод, для которого  $\hat{K} = Id$ .

**Комментарий.** Построенный итерационный процесс является сходящимся. В общем случае этот факт для задач седлового типа установлен в работах [8], [9].

## 5. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим задачу (1.1). Пусть  $\bar{\Omega} = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . Интерфейс  $\Gamma$  зададим параметрически:  $\begin{cases} x = a \sin t, & a - \text{число,} \\ y = t, & t \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$  Параметры Ламе  $\mu$  и  $\lambda$  задачи (1.1) выражаются через физические величины:  $E$  — модуль Юнга и  $\nu$  — коэффициент Пуассона

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad E > 0, \quad \nu \in (0, \frac{1}{2}].$$

В тестовом примере положим  $E = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in \Omega_1, \\ 10, & \bar{x} \in \Omega_2, \end{cases} \quad \nu = \frac{1}{4}$ . В качестве решения задачи (1.1) выберем

$$u^1(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot \sin(x_2), \quad u^2(x_1, x_2) = \cos(0.5 x_1) \cdot \cos(0.5 x_2).$$

Обозначим через  $N_{X_1}^{(j)}$  и  $N_{X_2}^{(j)}$  количество отрезков разбиения  $\Omega_j$  по оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно. Шаг  $h_{X_2}^{(j)}$  по направлению  $Ox_2$  равен  $\frac{2\pi}{N_{X_2}^{(j)}}$ . Для каждого  $(x_2)_k^{(j)} = k \cdot h_{X_2}^{(j)}$ ,  $k = 0, \dots, N_{X_2}^{(j)}$ , задаем свой равномерный шаг разбиения  $\Omega_j$  по направлению оси  $Ox_1$ . Рассмотрим случай, когда  $N_{X_2}^{(j)} = 2 N_{X_1}^{(j)}$  и  $N_{X_1}^{(2)} = 2 N_{X_1}^{(1)}$  (см. рис. 2).

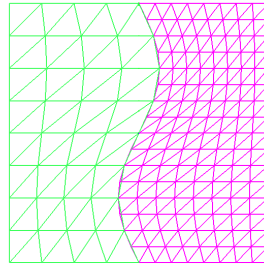


Рис. 2. Триангуляции  $\Upsilon_h^{(j)}$  подобластей  $\Omega_j, j = 1, 2$ .

Известно (см., например, [14]), что любую функцию  $z_i \in H^2(\Omega_i)$  можно продолжить на плоскость  $\mathbf{R}^2$  с сохранением класса  $H^2$ , т. е. существует оператор  $E_i^2$  такой, что

$$E_i^2 : H^2(\Omega_i) \rightarrow H^2(\mathbf{R}^2), \quad E_i^2 z_i = z_i \text{ в } \Omega_i, \quad \|E_i^2 z_i\|_{2, \mathbf{R}^2} \leq C \|z_i\|_{2, \Omega_i}. \quad (5.1)$$



Пусть  $z \in H_*^2(\Omega)$ . Оператор  $E^2$  действует на функцию  $z$  ( $E^2z$ ), если на каждое сужение  $z_i = z|_{\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , действует оператор  $E_i^2$  так, как определено в (5.1). Аналогично вводится определение для векторов. Если  $v^j \in H_*^2(\Omega)$ ,  $v_h^j \in V_h$ , то

$$\begin{aligned} \|E^2v^j - v_h^j\|_{0,\Omega_h}^2 &:= \|E_1^2v_1^j - v_{1h}^j\|_{0,\Omega_{1h}}^2 + \|E_2^2v_2^j - v_{2h}^j\|_{0,\Omega_{2h}}^2, \\ \|E^2v^j - v_h^j\|_{V_h}^2 &:= \|E_1^2v_1^j - v_{1h}^j\|_{1,\Omega_{1h}}^2 + \|E_2^2v_2^j - v_{2h}^j\|_{1,\Omega_{2h}}^2 + \|[E^2v^j - v_h^j]_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2, \end{aligned}$$

а если  $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in \mathbf{H}_*^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathbf{V}_h$ , то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^2\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{0},\Omega_h}^2 &:= \|\mathbf{E}_1^2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1h}\|_{\mathbf{0},\Omega_{1h}}^2 + \|\mathbf{E}_2^2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2h}\|_{\mathbf{0},\Omega_{2h}}^2, \\ \|\mathbf{E}^2\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_h}^2 &:= \|\mathbf{E}_1^2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1h}\|_{\mathbf{1},\Omega_{1h}}^2 + \|\mathbf{E}_2^2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2h}\|_{\mathbf{1},\Omega_{2h}}^2 + \|[\mathbf{E}^2\mathbf{v} - \mathbf{v}_h]_h\|_{\mathbf{1}/2,h,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

Определим значения основных параметров. Пусть  $(N_{X_1}^{(1)}, N_{X_2}^{(1)}, N_{X_1}^{(2)}, N_{X_2}^{(2)}) = (16, 32, 32, 64)$ ;  $(32, 64, 64, 128)$ ;  $(64, 128, 128, 256)$ . Результаты расчетов представлены в таблицах 1 и 2 для случаев  $a = 0.1$  и  $a = 0.5$  соответственно. В таблицах приведены величины погрешностей для компонент вектора перемещений в норме пространств  $V_h(\Omega_h), L_2(\Omega_h) - \Delta_{V_h}^j = \|E^2u^j - u_h^j\|_{V_h}, \Delta_{L_2}^j = \|E^2u^j - u_h^j\|_{0,\Omega_{jh}}, j = 1, 2$ , и вектора перемещений в норме пространств  $\mathbf{V}_h(\Omega_h), \mathbf{L}_2(\Omega_h) - \Delta_{\mathbf{v}_h} = \|\mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{v}_h}, \Delta_{\mathbf{L}_2} = \|\mathbf{E}^2\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{0},\Omega_h}$ . Моментом остановки итерационного процесса (4.1), (4.2) служит выполнение (4.4) при  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

На каждой итерации для решения СЛАУ, относящиеся к первой и второй подобластям, использован GMRES(15) и GMRES(30)-методы соответственно. Погрешность для компонент вектора перемещений в норме пространства  $C(\bar{\Omega})$  представлена на рис. 3 и 4.

Таблица 1 (случай  $a = 0.1$ )

$N_{X_1}^{(1)}$	$\Delta_{V_h}^1$	$\Delta_{V_h}^2$	$\Delta_{L_2}^1$	$\Delta_{L_2}^2$	$\Delta_{\mathbf{v}_h}$	$\Delta_{\mathbf{L}_2}$
16	0.00691940	0.00349519	0.00028222	0.00011291	0.00775206	0.00030397
32	0.00309785	0.00181720	0.00006879	0.00003002	0.00359151	0.00007506
64	0.00149823	0.00092457	0.00001731	0.00000800	0.00176054	0.00001907

Таблица 2 (случай  $a = 0.5$ )

$N_{X_1}^{(1)}$	$\Delta_{V_h}^1$	$\Delta_{V_h}^2$	$\Delta_{L_2}^1$	$\Delta_{L_2}^2$	$\Delta_{\mathbf{v}_h}$	$\Delta_{\mathbf{L}_2}$
16	0.01177526	0.00317894	0.00127992	0.00038764	0.01219682	0.00133733
32	0.00565795	0.00174316	0.00032031	0.00009952	0.00592039	0.00033542
64	0.00281574	0.00086194	0.00008015	0.00002646	0.00294472	0.00008441

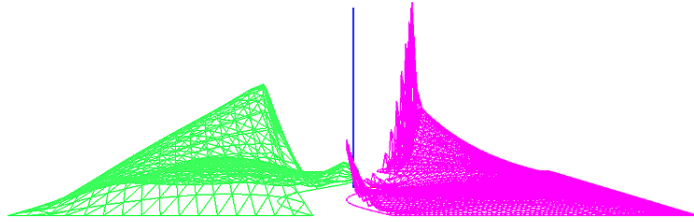


Рис. 3. Погрешность для 1-й компоненты вектора перемещений в норме  $C(\bar{\Omega}), N_{X_1}^{(1)} = 16$ .

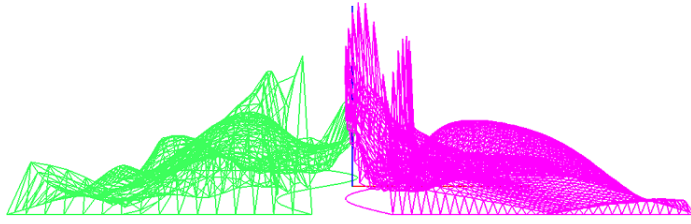


Рис. 4. Погрешность для 2-й компоненты вектора перемещений в норме  $C(\bar{\Omega})$ ,  $N_{X_1}^{(1)} = 16$ .

## 6. Заключение

На основании полученных результатов численных экспериментов модельной задачи можем высказать гипотезу, что погрешность решения для вектора перемещений в норме пространства  $\mathbf{V}_h(\Omega_h)$  убывает пропорционально степени  $h$ , т. е. является величиной порядка  $O(h)$ , а погрешность решения вектора перемещений в норме  $\mathbf{L}_2(\Omega_h)$  – пропорционально  $h^2$ , т. е. имеет порядок  $O(h^2)$ .

## Список литературы

- [1] Bernardi C., Maday Y., Patera A., “A New nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method”, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, Pitman, Paris, 1994, 13-51.
- [2] Braess D., Dahmen W., Wieners C., “A multigrid algorithm for the mortar finite element methods”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **37**:1, (1999), 48-69.
- [3] Flemisch B., Melenk J.M., Wohlmuth B., “Mortar methods with curved interfaces”, *Applied Numerical Mathematics*, **54**:3-4, (2005), 339-361.
- [4] Huang J., Zou J., “A mortar element method for elliptic problems with discontinuous coefficients”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **22**:4, (2002), 549-576.
- [5] Михайлов В.П., *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976, 391 с.
- [6] Сьярле Ф., *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, Москва, 1980, 512 с.
- [7] Рукавишников А.В., “О построении численного метода для задачи Стокса с разрывным коэффициентом вязкости”, *Вычислительные технологии*, **14**:2, (2009), 110-123.
- [8] Bramble J.H., Pasciak J.E. and Vassilev A.T., “Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **34**:3, (1997), 1072-1092.
- [9] Elman H.C., Golub G.H., “Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **31**:6, (1994), 1645-1661.
- [10] Saad Y., *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS, New Jersey, 1994, 450 с.
- [11] Ильин В.П., *Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений*, Изд-во Ин-та математики, Новосибирск, 2000, 345 с.
- [12] Little L., Saad Y. and Smoch L., “Block LU preconditioners for symmetric and nonsymmetric saddle point problems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **25**:2, (2003), 729-748.
- [13] Kuznetsov Yu.A., “Efficient iterative solvers for elliptic finite elements problems on nonmatching grids”, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, **10**:3, (1995), 187-211.
- [14] Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, 1985, 422 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 19 мая 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (код проекта 10-01-00060-а и 11-01-98502-Р-восток-а) и гранта ДВО РАН (код проекта 11-III-B-01M-007).

---

*Rukavishnikov A. V.* The numerical solution of a non-uniform problem theory of elasticity with the curvilinear interface. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 190–200.

#### ABSTRACT

In the paper a non-uniform problem of elasticity with the curvilinear interface between materials is considered. For these decision, the domain decomposition method in a combination to approximation of a problem by a nonconforming finite element method is applied. For a received system of a linear algebraic equations the effective iterative method with a block preconditioning is constructed. The analysis of numerical experiments is carried out.

Key words: *iterative methods, preconditioners, saddle point problems, a decomposition method, a curvilinear interface, discontinuous Lamé parameters*