УДК 539.371
MSC2010 35L50, 74B20

© В. М. Садовский[1]

Термодинамически самосогласованная система законов сохранения несимметричной теории упругости

Математическая модель микрополярной упругой среды при конечных деформациях приведена к термодинамически самосогласованной системе законов сохранения, на основе которой могут быть получены интегральные оценки, гарантирующие единственность и непрерывную зависимость "в малом" решений задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями, и дано корректное описание обобщенных решений с сильными разрывами.

Ключевые слова: *микрополярная среда, конечные деформации, моментные напряжения, законы сохранения, априорные оценки.*

Введение

В теории малых упругих деформаций широко известна модель моментного континуума Коссера [1]–[3], которая предназначена для описания механического поведения деформируемых материалов с микроструктурой (грунтов, горных пород, сыпучих, пористых, микроразрушенных и микрополярных сред). В ней, в отличие от классической теории упругости, основанной на представлении о среде как о континууме материальных точек, сплошная среда является континуумом материальных частиц – абсолютно твердых тел малого объема, обладающих вращательными степенями свободы.

В [4]–[8] модель Коссера обобщена на случай конечных деформаций и поворотов частиц. В [9]–[11] и ряде других работ теория моментных напряжений применена к построению уравнений оболочечных элементов конструкций при больших деформациях и прогибах. Целью настоящей работы является приведение уравнений, моделирующих конечные упругие деформации пространственной среды с независимыми вращениями частиц, к термодинамически самосогласованной по С.К. Годунову системе законов сохранения [12, 13]. Такая процедура является исключительно важным этапом в исследовании математической модели. Формулировка в виде термодинамически самосогласованной системы законов сохранения гарантирует корректность модели, позволяет привести ее к симметрической системе гиперболического типа, получив простое доказательство единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями от начальных данных. На ее основе формулируется понятие обобщенного решения, допускающего сильные разрывы скоростей и напряжений (контактные разрывы, ударные волны). Она дает также возможность применения хорошо разработанных эффективных численных методов [14]–[16] к исследованию модели.

[1]Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, 660036, Красноярск, Академгородок 50/44. Электронная почта: sadov@icm.krasn.ru

К термодинамически самосогласованной системе законов сохранения приводятся общие уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики [13], уравнения линейной и нелинейной теории упругости [14, 17] и некоторые специальные модели механики. Вопрос о приведении системы уравнений моментной упругой среды к такой форме нельзя считать полностью решенным, поскольку, кроме формальной записи уравнений через производящие потенциалы, требуется еще, чтобы производящий потенциал, который фигурирует под производной по времени, представлял собой сильно выпуклую функцию относительно характеристик деформированного состояния среды. В предложенном в [8] варианте модели последнее требование оказывается не выполненным из-за независимости потенциала от поворота среды как жесткого целого. В других вариантах [5]–[7] к термодинамически самосогласованной системе законов сохранения получаемые обобщенные модели не приводились.

1. Упругая среда с вращающимися частицами

Поступательное движение частиц упругой среды с микроструктурой описывается в обычной форме $x = x(\xi, t)$, связывающей лагранжевы и эйлеровы векторы центров масс в каждый фиксированный момент времени. Пусть $v = \dot{x}$ — вектор линейной скорости, $R = R(\xi, t)$ — ортогональный тензор вращательного движения частицы:

$$R \cdot R^* = I, \qquad \det R = +1, \qquad \dot{R} \cdot R^* + R \cdot \dot{R}^* = 0$$

(I — единичный тензор, звездочка означает транспонирование, точка над символом — производную по времени), $\omega = \dot{R} \cdot R^*$ — антисимметричный тензор угловой скорости.

В качестве меры деформации бесконечно малого элемента среды принимается тензор $\Lambda = R^* \cdot x_\xi$, который обладает тем свойством, что при движении среды как жесткого целого, когда частицы вращаются вместе со средой и, таким образом, тензор дисторсии x_ξ совпадает с тензором вращения R, Λ равен единичному тензору I, что соответствует недеформированному состоянию элемента. Кроме того, можно установить, что тензор Λ удовлетворяет уравнению

$$R \cdot \dot{\Lambda} = v_\xi - \omega \cdot x_\xi, \tag{1}$$

линейное приближение которого в точности совпадает с кинематическим уравнением для тензора скоростей деформации в геометрически линейной модели Коссера. Наконец, можно показать, что Λ — инвариантный тензор, не изменяющийся при повороте текущей конфигурации. Это свойство неизбежно должно выполняться при лагранжевом описании движения.

Действительно, если O – ортогональное преобразование поворота, то

$$dx' = O \cdot dx = O \cdot x_\xi \cdot d\xi = O \cdot R \cdot \Lambda \cdot d\xi,$$

и, таким образом, $x'_\xi = R' \cdot \Lambda'$, где $R' = O \cdot R$, $\Lambda' = \Lambda$. Непосредственная проверка показывает, что тензор $x_\xi \cdot R^*$, в котором изменен порядок сомножителей, удовлетворяет основным вышеперечисленным свойствам, но инвариантным тензором не является и для описания деформирования среды в лагранжевых переменных непригоден.

Пусть $x_\xi = R_e \cdot V$ — полярное разложение тензора дисторсии в произведение ортогонального тензора R_e, описывающего переносный поворот элемента среды, и симметричного тензора V, описывающего искажение элемента. Так как поворот частицы $R = R_e \cdot R_r$ является суперпозицией относительного R_r и переносного R_e поворотов, то по построению тензор $\Lambda = R^* \cdot R_e \cdot V = R_r^* \cdot V$ учитывает как собственную деформацию среды, так и относительный поворот частицы. Это свойство тензора Λ полностью соответствует общим представлениям о кинематике структурно неоднородной сплошной среды, состоящей из материальных частиц малого объема.

Выбор тензора Λ в качестве меры деформации связан еще с тем, что, как будет показано ниже, в этом случае получаемая с помощью принципов термодинамики обратимых процессов математическая модель естественным образом приводится к самосогласованной системе законов сохранения и к симметрической системе уравнений.

Если частица в естественном состоянии среды, совершая полный оборот вокруг неподвижной оси, возвращается в исходное положение, то тензор R оказывается равным единичному тензору. Следовательно, при таком описании кинематики полный оборот частицы не приводит к изменению деформированного состояния, что характерно, например, для микрополярных сред, представляющих собой большие ансамбли намагниченных частиц во внешнем магнитном поле.

В [8] предложен принципиально отличающийся от рассматриваемого здесь вариант модели. В этом варианте мерой искажения элемента среды служит тензор полной дисторсии, а мерой независимого вращательного движения частиц – интеграл по времени от вектора угловой скорости. Как следствие деформированное состояние среды отличается от естественного состояния после полного оборота частицы. В работах [4]–[7] для описания вращательного движения длинных молекул нематических жидких кристаллов используется вектор-директор d, указывающий направление оси, неподвижно связанной с частицей. Очевидно, этот вектор также не изменяется, если частица совершает полный оборот. Однако при таком подходе одним из уравнений модели является нелинейное алгебраическое уравнение $|d|^2 = 1$, которое препятствует приведению системы к симметрической форме.

В декартовой системе координат тензоры ω и x_ξ задаются матрицами

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_\xi = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

С тензором угловой скорости отождествляется вектор угловой скорости, координатами которого являются числа ω_i. Тензорные компоненты связаны с векторными известными формулами

$$\omega_{kj} = \varepsilon_{ijk}\,\omega_i, \qquad \omega_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_{kj},$$

где ε_{ijk} — дискриминантный тензор Леви — Чивиты. Последняя из этих формул служит для вычисления вектора, соответствующего антисимметричной части произвольного тензора второго ранга.

Интегральные законы сохранения импульса, момента импульса и энергии имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \rho_0\, v\, d\Omega = \int\limits_\Gamma \sigma\cdot\nu\, d\Gamma + \int\limits_\Omega f\, d\Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \big(J\cdot\omega + \rho_0\, x\times v\big)\, d\Omega = \int\limits_\Gamma x\times\sigma\cdot\nu\, d\Gamma + \int\limits_\Omega \big(x\times f + g\big)\, d\Omega, \qquad (2) \\ \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \left(\rho_0\,\frac{v\cdot v}{2} + \frac{1}{2}\,\omega\cdot J\cdot\omega + \Phi\right) d\Omega = \int\limits_\Gamma (v\cdot\sigma - q)\cdot\nu\, d\Gamma + \int\limits_\Omega (v\cdot f + \omega\cdot g + Q)\, d\Omega. \end{gathered}$$

Здесь Ω — произвольная область с гладкой границей Γ, выделенная в начальном (недеформированном) состоянии среды, ν — вектор внешней нормали к границе, ρ_0 — начальная плотность, J — симметричный и положительно определенный тензор инерции, σ — несимметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, Φ — внутренняя энергия в единице объема, q — вектор теплового потока, f и g — объемные плотности массовых сил и моментов, Q — интенсивность внутренних источников тепла. В таком виде основные интегральные законы сохранения использовались во всех вышеперечисленных работах по построению нелинейных уравнений моментной упругой среды.

В процессе движения среды область Ω, состоящая из материальных частиц, переходит в деформированное состояние Ω_t, масса вещества сохраняется $\rho_0\, d\Omega = \rho\, d\Omega_t$, плотность меняется по закону $\rho = \rho_0 / \det x_\xi$, а тензор инерции частиц, содержащихся в единице объема, преобразуется по формуле $J_t = (\rho/\rho_0) J$. Тензор инерции J, отнесенный к начальному состоянию, меняется в зависимости от времени в соответствии с уравнением $J = R \cdot J_0 \cdot R^*$, которое обосновывается переходом к сопутствующей системе координат, связанной с вращающейся абсолютно твердой частицей. Дифференцирование этого уравнения по времени дает следующее уравнение для тензора инерции, используемое ранее в [8]:

$$\dot{J} = \dot{R} \cdot J_0 \cdot R^* + R \cdot J_0 \cdot \dot{R}^* = \omega \cdot J - J \cdot \omega.$$

Для непрерывных движений интегральные законы сохранения эквивалентны дифференциальным уравнениям, которые могут быть получены из (2) с помощью формулы Грина:

$$\begin{gathered} \rho_0\, \dot{v} = \operatorname{div}_\xi \sigma + f, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(J \cdot \omega) = 2\,(\sigma \cdot x_\xi^*)^a + g, \\ \dot{\Phi} = \sigma^* : (v_\xi - \omega \cdot x_\xi) - \operatorname{div}_\xi q + Q. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь и всюду ниже div_ξ – оператор дивергенции по лагранжевым переменным, двоеточие означает двойную свертку тензоров, верхний индекс “a” служит для обозначения антисимметричной части тензора и соответствующего ей вектора. При выводе (3) существенно использовалось равенство $\omega \cdot \dot{J} \cdot \omega = 0$ (здесь ω – вектор), представляющее собой прямое следствие приведенного выше кинематического уравнения для тензора инерции.

Последнее уравнение системы (3) для обратимых процессов, термодинамическими параметрами состояния которых служат мера деформации Λ и энтропия S, распадается с учетом (1) на определяющее уравнение

$$R^* \cdot \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda} \tag{4}$$

и уравнение производства тепла

$$T\dot{S} = -\operatorname{div}_\xi q + Q, \tag{5}$$

где $T = \partial\Phi/\partial S$ — абсолютная температура.

Если среда изотропна, то тензор инерции шаровой: $J_0 = j_0\, I$, а внутренняя энергия является функцией инвариантов тензора Λ и энтропии. В качестве системы функционально независимых инвариантов можно взять три инварианта симметричной части $\Lambda^s = (\Lambda + \Lambda^*)/2$ этого тензора

$$I_1^s = \Lambda^s : I, \qquad I_2^s = (\Lambda^s)^2 : I, \qquad I_3^s = (\Lambda^s)^3 : I$$

и один инвариант $I_2^a = 2\,|\Lambda^a|^2$ антисимметричной части $\Lambda^a = (\Lambda - \Lambda^*)/2$. При таком выборе определяющее уравнение (4) принимает вид:

$$R^* \cdot \sigma = a_1\, I + 2a_2\, \Lambda^s + 3a_3\, (\Lambda^s)^2 + 2\alpha\, \Lambda^a, \tag{6}$$

где $a_k = \partial\Phi/\partial I_k^s$ $(k = 1, 2, 3)$ и $\alpha = \partial\Phi/\partial I_2^a$ — функции состояния. В теории малых деформаций континуума Коссера с равными нулю моментными напряжениями (так называемого, редуцированного континуума) упругий потенциал определяется по формуле

$$\Phi = \frac{\lambda\,(I_1^s)^2}{2} + \mu\, I_2^s + \alpha\, I_2^a - (3\lambda + 2\mu)\, I_1^s,$$

в которой λ, μ и α — константы. При этом $a_1 = \lambda(I_1^s - 3) - 2\mu$, $a_2 = \mu$ и $a_3 = 0$.

Для простоты будем далее рассматривать адиабатический вариант модели при отсутствии внешних тепловых источников, массовых сил и моментов. При определенных требованиях, накладываемых на функцию Φ, в адиабатическом случае система уравнений оказывается гиперболической. Очевидно, свойство гиперболичности нарушается, если учитывается теплопроводность среды на основании закона теплопроводности Фурье.

Предположим, что внутренняя энергия – сильно выпуклая функция по переменной Λ. Это предположение представляется вполне разумным, поскольку потенциал напряжений в линейной теории, равный квадратичной части разложения функции Φ в ряд Тейлора

$$\Phi(\Lambda, S) = \frac{1}{2}\,(\Lambda - I)^* : \frac{\partial^2 \Phi(I, S_0)}{\partial \Lambda^2} : (\Lambda - I)^* + \ldots$$

— удовлетворяет свойству положительности. Для изотропной среды это свойство автоматически выполняется, если выполнены следующие ограничения на константы [16]:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0, \qquad \alpha > 0. \tag{7}$$

Пусть τ — тензор напряжений, двойственный по отношению к тензору Λ, а $\Psi(\tau, S) = \tau^* : \Lambda - \Phi(\Lambda, S)$ — преобразование Лежандра от внутренней энергии, которое также является сильно выпуклой функцией по τ. Определяющее уравнение (4) может быть записано в обращенном виде:

$$R \cdot \Lambda = R \cdot \frac{\partial \Psi(\tau, S)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, S)}{\partial \sigma}.$$

Левая часть полученного равенства совпадает с тензором дисторсии, поэтому справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, S)}{\partial \sigma} = v_\xi. \tag{8}$$

Замкнутую математическую модель адиабатического деформирования упругой среды, учитывающую вращательные степени свободы частиц, составляют уравнения поступательного и вращательного движений (3), определяющее уравнение (8), обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{R} = \omega \cdot R$ для тензора вращений и уравнение постоянства энтропии, вытекающее из (5) в рамках сделанных предположений. В декартовых координатах модель приводится к следующей системе:

$$\begin{gathered}
\rho_0\,\dot{v}_i = \sigma_{ij,j}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial \Psi(R^*\sigma, S)}{\partial \sigma_{ij}} = v_{i,j}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\bigl(J_{ij}\,\omega_j\bigr) = \varepsilon_{ijk}\,\sigma_{kl}\,\frac{\partial \Psi(R^*\sigma, S)}{\partial \sigma_{jl}}, \\
\dot{R}_{ij} = \varepsilon_{ikl}\,\omega_k\,R_{lj}, \qquad \dot{S} = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

где R и σ — матрицы соответствующих тензоров в рассматриваемой координатной системе. В пространственном случае система (9) состоит из 25 уравнений, записанных относительно 25 неизвестных функций: v_i, σ_{ij}, ω_i, R_{ij} и S. Входящие в нее компоненты тензора инерции выражаются через основные неизвестные функции по формулам: $J_{ij} = J_{0kl}\,R_{ik}\,R_{jl}$.

2. Моментная упругая среда

В более полной математической модели, служащей геометрически нелинейным обобщением модели моментного континуума Коссера, кроме деформаций, характеризуемых тензором Λ, учитываются кривизны элементов. Для этого вводится тензор второго ранга M, равный нулю в естественном (недеформированном) состоянии среды, кинематика которого описывается уравнением $\dot{M} = \omega_\xi$. В интегральных законах сохранения момента импульса и энергии (2) появляются дополнительные слагаемые

$$\int_\Gamma m \cdot \nu \, d\Gamma \quad \text{и} \quad \int_\Gamma \omega \cdot m \cdot \nu \, d\Gamma,$$

обусловленные действием моментных напряжений, которые характеризуются тензором m. Уточненное уравнение вращательного движения принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(J \cdot \omega) = \mathrm{div}_\xi \, m + 2\,(\sigma \cdot x_\xi^*)^a + g. \tag{10}$$

Изменение внутренней энергии описывается более общим по сравнению с (3) уравнением

$$\dot{\Phi} = \sigma^* : (v_\xi - \omega \cdot x_\xi) + m^* : M - \mathrm{div}_\xi \, q + Q. \tag{11}$$

Независимыми термодинамическими параметрами упругого состояния среды назначаются тензоры Λ, M и энтропия S. Как следствие обратимости процесса деформации с учетом формулы (1) получаются определяющие уравнения вида

$$R^* \cdot \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}, \qquad m = \frac{\partial \Phi}{\partial M}.$$

Если среда изотропна, то внутренняя энергия зависит только от инвариантов тензоров, например, от рассмотренных выше инвариантов Λ, инвариантов M:

$$J_1^s = M^s : I, \qquad J_2^s = (M^s)^2 : I, \qquad J_3^s = (M^s)^3 : I, \qquad J_2^a = 2\,|M^a|^2$$

и от энтропии. Совместные инварианты этих тензоров не могут участвовать в качестве аргументов Φ, поскольку Λ относится к полярным, а M — к аксиальным тензорам [2]. Таким образом, в случае изотропной среды выполняется определяющее уравнение (6) и дополнительное определяющее уравнение

$$m = b_1\, I + 2b_2\, M^s + 3b_3\,(M^s)^2 + 2\beta\, M^a,$$

в котором $b_k = \partial\Phi/\partial J_k^s$ и $\beta = \partial\Phi/\partial J_2^a$. В линейной теории Коссера $b_1 = \psi J_1^s$, $b_2 = \eta$, $b_3 = 0$, константы материала ψ, η и β удовлетворяют ограничениям

$$3\psi + 2\eta > 0, \qquad \eta > 0, \qquad \beta > 0,$$

гарантирующим в совокупности с (7) выпуклость квадратичного потенциала напряжений

$$\Phi = \frac{\lambda\,(I_1^s)^2}{2} + \mu\, I_2^s + \alpha\, I_2^a - (3\lambda + 2\mu)\, I_1^s + \frac{\psi\,(J_1^s)^2}{2} + \eta\, J_2^s + \beta\, J_2^a.$$

В общем случае функция Φ должна быть сильно выпуклой функцией по переменным Λ и M, поэтому, применяя преобразование Лежандра, определяющие уравнения можно обратить:

$$R \cdot \Lambda = \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, S)}{\partial \sigma}, \qquad M = \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, S)}{\partial m}, \tag{12}$$

где $\Psi(\tau, m, S) = \tau^* : \Lambda + m^* : M - \Phi(\Lambda, M, S)$ — сильно выпуклая по τ и m функция.

Для адиабатических процессов при отсутствии массовых сил, моментов и тепловых источников полученные таким образом уравнения движения и определяющие уравнения в совокупности с обыкновенными дифференциальными уравнениями для тензора вращательного движения частиц и для энтропии образуют замкнутую математическую модель. Наиболее простой вид уравнения этой модели имеют в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$
\begin{gathered}
\rho_0\, \dot{v}_i = \sigma_{ij,j}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\partial \Psi(R^* \sigma, m, S)}{\partial \sigma_{ij}} = v_{i,j}, \\
\frac{\partial}{\partial t}\big(J_{ij}\, \omega_j\big) = m_{ij,j} + \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kl}\, \frac{\partial \Psi(R^* \sigma, m, S)}{\partial \sigma_{jl}}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\partial \Psi(R^* \sigma, m, S)}{\partial m_{ij}} = \omega_{i,j}, \\
\dot{R}_{ij} = \varepsilon_{ikl}\, \omega_k\, R_{lj}, \qquad \dot{S} = 0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

С учетом формул $J_{ij} = J_{0kl}\, R_{ik}\, R_{jl}$ систему (13) образуют 34 уравнения для 34-х неизвестных функций: v_i, σ_{ij}, ω_i, m_{ij}, R_{ij} и S.

3. Каноническая форма уравнений

Принципиально важно то, что системы (9) и (13) представляют собой термодинамически самосогласованные системы законов сохранения в следующем смысле: можно указать производящие потенциалы L^0 и L^j, которые позволяют записать их в единообразной форме

$$
\frac{\partial}{\partial t}\, \frac{\partial L^0(D\, U)}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\, \frac{\partial L^j(U)}{\partial U} + F(D, U), \qquad \frac{\partial D}{\partial t} = G(D, U). \tag{14}
$$

Здесь U — n-мерный вектор ($n = 15$ и 24), составленный из неизвестных функций, исключая энтропию S, входящую в (14) как параметр, и компоненты тензора вращений R_{ij}, D — невырожденная (ортогональная) квадратная матрица такой же размерности, F и G — заданные вектор-функции. Отличными от нуля и единицы элементами матрицы D служат величины R_{ij}. Вектор-функции F и G легко определить по виду уравнений. Для системы (9) компонентами вектора $D\, U$ являются величины v_i, $R_{ki}\, \sigma_{kj}$ и $R_{ki}\, \omega_k$, производящие потенциалы равны

$$
L^0(D\, U) = \rho_0\, \frac{v_i\, v_i}{2} + \frac{1}{2}\, (R^* \omega)_i\, J_{0\, ij}\, (R^* \omega)_j + \Psi(R^* \sigma, S), \qquad L^j(U) = v_i\, \sigma_{ij}.
$$

Для системы (13) вектор $D\, U$ составляют v_i, $R_{ki}\, \sigma_{kj}$, $R_{ki}\, \omega_k$ и m_{ij}, в потенциале L^0 расширяется набор аргументов, а к L^j добавляется дополнительное слагаемое $\omega_i\, m_{ij}$.

Уравнение для энтропии, входящее в (9) и (13), не включено в систему (14), поскольку из нее автоматически следует эквивалентный этому уравнению дополнительный закон сохранения (точкой обозначается скалярное произведение векторов):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\Big(U \cdot \frac{\partial L^0(D\, U)}{\partial U} - L^0(D\, U)\Big) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big(U \cdot \frac{\partial L^j(U)}{\partial U} - L^j(U)\Big) + \\
+ U \cdot G - \frac{\partial L^0(D\, U)}{\partial U} \cdot D^{-1} F\, U,
\end{gathered} \tag{15}
$$

справедливость которого можно проверить с помощью формулы дифференцирования

$$
\frac{\partial L^0(D\, U)}{\partial t} = \frac{\partial L^0(D\, U)}{\partial U} \cdot \Big(\frac{\partial U}{\partial t} + D^{-1} \frac{\partial D}{\partial t}\, U\Big). \tag{16}
$$

Система уравнений (14), (15) имеет дивергентную форму и может служить для корректного описания обобщенных решений с разрывами скоростей и напряжений — ударными волнами и контактными разрывами на поверхностях раздела сред с разными механическими свойствами. Соотношения сильного разрыва для этой системы записываются в виде

$$\begin{gathered} c\left[\frac{\partial L^0(D\,U)}{\partial U}\right] + \left[\frac{\partial L^j(U)}{\partial U}\right]\nu_j = 0, \qquad c[D] = 0, \\ c\left[U\cdot\frac{\partial L^0(D\,U)}{\partial U} - L^0(D\,U)\right] + \left[U\cdot\frac{\partial L^j(U)}{\partial U} - L^j(U)\right]\nu_j = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где c — лагранжева скорость фронта в направлении нормали, квадратные скобки означают скачок функции при переходе через поверхность разрыва. К системе (17) необходимо добавить неравенство $[S] \geq 0$ и некоторые дополнительные условия устойчивости разрыва (см., например, [18, 19]). Однако эти условия можно в полной мере проанализировать только с привлечением конкретного вида термодинамических потенциалов Φ или Ψ.

Применяя формулу дифференцирования (16) к производной $\partial L^0(D\,U)/\partial U$, можно привести систему (14) к симметрической форме

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^j \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Здесь

$$A = \frac{\partial^2 L^0(D\,U)}{\partial U^2}, \qquad B^j = \frac{\partial^2 L^j(U)}{\partial U^2}, \qquad H = F - A\,D^{-1}G\,U.$$

Матрицы A и B^j симметричны и, кроме того, так как $L^0(D\,U)$ – сильно выпуклая функция, то матрица A положительно определена. Следовательно, система уравнений (14) является гиперболической по Фридрихсу.

Предположим, что матрицы-коэффициенты системы (18) и векторы G и H удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных D и U. Тогда для разности двух решений такой системы, определенных в пространственно-временной области C типа усеченного конуса, основаниями которого служат гиперплоскости $t = t_0$ и $t = t_1$, а уравнение боковой поверхности $h(\xi, t) = 0$ удовлетворяет неравенству Гамильтона — Якоби: $\dot{h} + c(h_\xi) \geq 0$, где h_ξ — градиент функции, а $c(\nu)$ — наименьший корень характеристического уравнения $\det(c\,A + \nu_j B^j) = 0$, справедлива априорная оценка:

$$\big\|(D', U') - (D, U)\big\|(t_1) \leq \big\|(D', U') - (D, U)\big\|(t_0)\exp a(t_1 - t_0), \tag{19}$$

вывод которой в более общем случае приведен в [16, 19]. Здесь a — постоянная, зависящая от обоих решений и первых производных по времени и по пространственным переменным, а двойными скобками обозначена энергетическая норма

$$\big\|(D, U)\big\|^2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{C_t}\big(\operatorname{tr} D^* D + U\,A\,U\big)d\xi$$

(tr — след матрицы), вычисляемая как интеграл по сечению C_t конической области C гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что решение задачи Коши

$$D|_{t=t_0} = D^0(\xi), \qquad U|_{t=t_0} = U^0(\xi)$$

единственно в C и непрерывно зависит от начальных данных. Кроме того, из оценки (19) следует ограниченность областей зависимости и влияния решений (конечность скоростей распространения возмущений в рассматриваемых моделях). Метод построения специальных областей типа усеченного конуса изложен, например, в [12].

Аналогичная оценка справедлива в усеченных конусах, примыкающих к границе области решения задачи, если на этой границе поставлены диссипативные граничные условия.

Диссипативность в точности означает, что для любых двух решений в точках границы выполняется неравенство
$$(U' - U)\, B^j(U)\, (U' - U)\, \nu_j \le 0.$$
Из интегральной оценки в этом случае следует единственность решения краевой задачи и непрерывная зависимость этого решения от начальных данных. Учитывая структуру матриц B^j, можно показать, что условие диссипативности для модели моментной теории упругости сводится к неравенству
$$(v_i' - v_i)(\sigma_{ij}' - \sigma_{ij})\, \nu_j + (\omega_i' - \omega_i)(m_{ij}' - m_{ij})\, \nu_j \le 0. \tag{20}$$
К диссипативным относятся, например, граничные условия в скоростях $v_i = \bar{v}_i$, $\omega_i = \bar{\omega}_i$ и граничные условия в напряжениях $\sigma_{ij}\, \nu_j = \bar{\sigma}_i$, $m_{ij}\, \nu_j = \bar{m}_i$, а также комбинированные варианты таких условий, например, если на некоторой части границы заданы векторы угловой скорости $\bar{\omega}_i$ и напряжений $\bar{\sigma}_i$ или векторы линейной скорости $\bar{v}_i$ и моментных напряжений $\bar{m}_i$. Допускаются также смешанные граничные условия, когда задаются нормальные скорости и касательные напряжения, или, наоборот, нормальные напряжения и касательные скорости.

Для безмоментной упругой среды с вращающимися частицами второе слагаемое в левой части неравенства (20) отсутствует, поэтому диссипативные граничные условия формулируются в терминах проекций вектора линейной скорости и компонент несимметричного тензора напряжений точно так же, как в классической теории упругости.

Заметим, что модель нелинейно упругой среды может быть получена из модели, учитывающей вращательные степени свободы частиц, путем предельного перехода по J при $J \to 0$. При таком переходе характерный размер частиц микроструктуры материала стремится к нулю и, таким образом, в пределе получается обычная сплошная среда – континуум материальных точек. Уравнение вращательного движения частиц, очевидно, приводит к условию симметрии тензора $\sigma \cdot x_\xi^*$, которое по существу означает симметрию тензора напряжений Коши. Однако при этом система уравнений (9) вырождается, теряя гиперболичность, подобно тому, как если бы к нулю стремилась плотность материала. Таким образом, вопрос о приведении уравнений нелинейной теории упругости к термодинамически самосогласованной системе законов сохранения [13, 17] не имеет простого решения в рамках рассматриваемой более общей модели.

4. Вращение частиц при однородном сдвиге

В качестве примера рассмотрим процесс плоского сдвига изотропной моментной упругой среды, который описывается уравнениями
$$x_1 = \xi_1, \qquad x_2 = \chi\, \xi_1 + \xi_2, \qquad x_3 = \xi_3. \tag{21}$$
Если скорость сдвига $\dot{\chi}$ постоянна, то в среде возникает однородное напряженно-деформированное состояние, поскольку силы инерции поступательного движения в этом случае отсутствуют. Моментные напряжения оказываются равными нулю, следовательно, система уравнений (13) совпадает с системой (9). Матрицы тензора дисторсии, тензора вращений и тензора угловой скорости имеют вид
$$x_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При отсутствии относительного вращения частиц, когда угол поворота φ совпадает с углом поворота переносного движения φ_e, матрица

$$\Lambda = R^* x_\xi = \begin{pmatrix} \chi\sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \chi\cos\varphi - \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

симметрична, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi_e = \chi/2$. В этом случае

$$\sigma\, x_\xi^* = R\left(a_1\, I + 2a_2\, \Lambda^s + 3a_3(\Lambda^s)^2 + 2\alpha\, \Lambda^a\right)\Lambda^* R^* \tag{22}$$

также симметричная матрица, поэтому уравнение вращательного движения, в которое входит лишь ее антисимметричная часть, принимает вид: $j_0\, \ddot{\varphi}_e = 0$. Очевидно, оно выполняется, если среда не обладает вращательной инерцией. В инерционных средах $\varphi = \varphi_e + \varphi_r$, где φ_r — угол относительного поворота, который считается малым по сравнению с φ_e. В таком случае с точностью до членов второго порядка малости

$$\sin\varphi \approx \sin\varphi_e + \varphi_r\cos\varphi_e, \qquad \cos\varphi \approx \cos\varphi_e - \varphi_r\sin\varphi_e,$$

$$\sqrt{\chi^2+4}\; R \approx \begin{pmatrix} 2 & -\chi & 0 \\ \chi & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\chi^2+4} \end{pmatrix} - \varphi_r \begin{pmatrix} \chi & 2 & 0 \\ -2 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{\chi^2+4}\; \Lambda \approx \begin{pmatrix} \chi^2+2 & \chi & 0 \\ \chi & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\chi^2+4} \end{pmatrix} - \varphi_r \begin{pmatrix} -\chi & -2 & 0 \\ \chi^2+2 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подстановка этих приближений в формулу (22) с последующим вычислением антисимметричной части матрицы $\sigma\, x_\xi^*$ приводит к уравнению вращательного движения

$$j_0\, \ddot{\varphi}_r = -a_0\, \varphi_r + \frac{4 j_0\, \chi\, \dot{\chi}^2}{(\chi^2+4)^2}, \tag{23}$$

где $a_0 = (\alpha - a_2)(\chi^2+4) - \left(a_1 + 3a_3(\chi^2+2)/2\right)\sqrt{\chi^2+4}$. Второе слагаемое в правой части уравнения (23), связанное со скоростью сдвига, описывает плавный поворот частиц. Оно в точности равно моменту сил инерции переносного движения. Первое слагаемое обусловлено упругой податливостью среды по отношению к вращательному движению частиц. При положительном значении параметра a_0, зависящего от угла сдвига, в среде реализуется осциллирующий, колебательный режим вращения. При отрицательном значении a_0 осцилляции исчезают.

Рассмотрим случай квадратичного потенциала напряжений континуума Коссера. Так как в состоянии сдвига $I_1^s = \sqrt{\chi^2+4} + 1$, то для этого потенциала

$$a_1 = \lambda\sqrt{\chi^2+4} - 2(\lambda+\mu), \qquad a_2 = \mu, \qquad a_3 = 0,$$

$$a_0 = (\alpha - \lambda - \mu)(\chi^2+4) + 2(\lambda+\mu)\sqrt{\chi^2+4}.$$

При малых χ параметр a_0 постоянен и равен $4\alpha > 0$. Общее решение уравнения (23)

$$\varphi_r(t) = C_1 \sin\frac{2\pi t}{\theta} + C_2 \cos\frac{2\pi t}{\theta}$$

описывает в этом случае периодические собственные колебания с периодом $\theta = \pi\sqrt{j_0/\alpha}$.

Для большинства известных в справочной литературе материалов, проявляющих моментные свойства, величина $\lambda + \mu$ на порядок больше, чем α. Поэтому параметр a_0 меняет знак. Это происходит при критическом значении

$$\chi_* = \frac{2\sqrt{2\alpha\,(\lambda+\mu)-\alpha^2}}{\lambda+\mu-\alpha}.$$

По мере достижения этого значения в сдвигаемом слое колебательный режим вращения частиц сменяется плавным безосцилляционным движением.

Полученное решение иллюстрирует основную качественную особенность деформации среды с микроструктурой по сравнению с обычной упругой средой. Процесс сдвига в такой среде при определенных условиях сопровождается собственными колебаниями вращательного движения частиц. Колебательный характер движений в рамках геометрически линейной теории Коссера изучался в [16]. На основе анализа решений было показано, что моментная среда обладает резонансной частотой, соответствующей частоте собственных колебаний частиц, которая по существу является феноменологическим параметром материала.

Список литературы

[1] E. Cosserat, F. Cosserat, “Theorie des Corps Deformables”, *Chwolson’s Traité Physique: 2nd ed.*, Paris, 1909, 953–1173.

[2] В. А. Пальмов, “Основные уравнения теории несимметричной упругости”, *Прикл. матем. и механ.*, **28**:3, (1964), 401–408.

[3] В. Т. Койтер, “Моментные напряжения в теории упругости”, *Механика: Сб. переводов*, 1965, № 3, 89–112.

[4] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский, “Асимметрическая гидромеханика”, *Прикл. матем. и механ.*, **29**:2, (1965), 297–308.

[5] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, “Уравнения движения нематических жидких кристаллов”, *Прикл. матем. и механ.*, **35**:5, (1971), 879–891.

[6] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, “Кинематика нематических жидких кристаллов”, *Прикл. механика*, **VIII**:3, (1972), 97–105.

[7] А. Г. Калугин, *Механика анизотропных жидкостей*, Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, М., 2005.

[8] В. И. Кондауров, “О нелинейных уравнениях динамики упругой микрополярной среды”, *Прикл. матем. и механ.*, **48**:3, (1984), 404–413.

[9] A. E. Green, P. M. Naghdi, W. L. Wainwright, “A general theory of a Cosserat surface”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **20**:4, (1965), 287–308.

[10] Л. И. Шкутин, *Механика деформаций гибких тел*, Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1988.

[11] Х. Альтенбах, П. А. Жилин, “Общая теория упругих простых оболочек”, *Успехи механики*, **11**:4, (1988), 107–148.

[12] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1979.

[13] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[14] С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов, *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, Наука, М., 1976.

[15] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, М., 2001.

[16] О. В. Садовская, В. М. Садовский, *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред*, Физматлит, М., 2008.

[17] С. К. Годунов, И. М. Пешков, “Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:6, (2008), 1034–1055.

[18] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, *Нелинейные волны в упругих средах*, Московский лицей, М., 1998.

[19] В. М. Садовский, *Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред*, Физматлит, М., 1997.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 января 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40.

Sadovskii V. M. Thermodynamically consistent system of conservation laws of non-symmetric elasticity theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 201–212.

ABSTRACT

Mathematical model of micropolar elastic medium under finite strains is reduced to a thermodynamically consistent system of conservation laws, on the basis of which can be obtained integral estimates, guaranteeing the uniqueness and continuous dependence “in the small” of solutions of the Cauchy problem and the boundary-value problems with dissipative boundary conditions, and a correct description of generalized solutions with strong discontinuities is given.
Key words: *micropolar medium, finite strains, couple stresses, conservation laws, a priori estimates.*