ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2011. Том 11. № 2. С. 213–221
УДК 514.174.6
MSC2010 11H06 (11H55)

© А. В. Устинов[1]

К теореме Вороного о цилиндрических минимумах трехмерных решеток

Алгоритм Вороного для поиска единиц в комплексных кубических полях основан на геометрических свойствах трехмерных решеток. Ключевую роль в алгоритме играет теорема Вороного о цилиндрических минимумах решеток общего положения. В оригинальном доказательстве теоремы Вороного и ее переизложении, данном Делоне и Фаддеевым, часть содержательных случаев не была разобрана. В предлагаемой работе дается полное доказательство теоремы Вороного. Кроме того, теорема распространяется на случай произвольных решеток.

Ключевые слова: *решетка, алгоритм Вороного.*

Введение

В 1896 году Г. Ф. Вороной защитил докторскую диссертацию [1] «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей», в которой построил алгоритмы для вычисления основных единиц общего кубического поля как для случая отрицательного, так и для случая положительного дискриминанта. Существовавшие до этого обобщения алгоритма непрерывных дробей (принадлежавшие Эйлеру, Якоби, Гурвицу, Пуанкаре, Дирихле, Эрмиту) не решали подобных задач полностью. В книге [3], где подробно рассказывается о диссертации Вороного, Б. Н. Делоне пишет: «Вороной входит во все подробности рассматриваемых вопросов и добивается наиболее совершенного их решения в смысле вычислительном, причем во второй работе (докторской диссертации, прим. А. У.) он дает замечательные геометрические теоремы о решетках».

Настоящая работа посвящена одной из теорем Вороного, а именно теореме о цилиндрических минимумах трехмерных решеток, на которой основан алгоритм для вычисления основных единиц кубического поля отрицательного дискриминанта. Наряду с оригинальным алгебраическим доказательством этой важной теоремы (см. [1]) существует его наглядный геометрический вариант (см. [3]). «…Вороной, несомненно, уже в этой диссертации мыслил и находил свои результаты геометрически. Но в то время геометрия была в Петербурге, особенно в вопросах теории чисел, не в фаворе. Марков, который был главным оппонентом Вороного, не пропустил бы в то время диссертации по теории чисел, пользующейся геометрическим методом… Вороному приходилось поэтому думать геометрически, а затем переписывать все на чисто арифметический язык, не оставляя никаких следов геометрии, что конечно, всегда можно сделать» (см. [3, стр. 213]). Оба доказательства приводят к значительному перебору. Причиной для их пересмотра стало то обстоятельство, что один

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: ustinov.alexey@gmail.com

случай (по-видимому самый сложный и требующий дополнительных соображений) в обоих доказательствах опущен (см. последнюю часть доказательства теоремы 2, посвященную исследованию точки K). Кроме того, в [1] и [3] теорема Вороного доказывалась только для решеток общего положения, однако она оказывается необходимой и при изучении трехмерных целочисленных решеток (см. [4]). В предлагаемой статье доказывается, что результат Вороного остается справедливым и для произвольных решеток. По сравнению с доказательствами из [1] и [3] количество перебираемых случаев уменьшено и каждый из них разобран подробно.

Автор благодарит А. А. Илларионова за указания на недочеты в первоначальной версии статьи.

1. Постановка задачи

Будем следовать определениям и обозначениям из работы [3]. Пусть в трехмерном пространстве $Oxyz$ имеется полная решетка Λ и $M \neq 0$ есть примитивная точка решетки Λ (отрезок OM не содержит точек решетки, отличных от его концов), лежащая выше плоскости Oxy. Будем предполагать, что ортогональная проекция точки M на плоскость Oxy лежит на оси Ox и имеет положительную абсциссу. Все точки решетки лежат на прямых, параллельных OM (*параллелях*), причем на каждой параллели соседние точки решетки лежат на расстоянии OM друг от друга. Параллели пересекают плоскость Oxy в точках некоторой двумерной решетки S. Точку решетки S будем называть *основанием* соответствующей параллели. Отрезок параллели от основания до первой (лежащей не ниже плоскости Oxy) точки решетки Λ будем называть *гвоздиком*, а первую точку решетки — *шапочкой* этого гвоздика. Основание параллели будем также называть основанием соответствующего гвоздика.

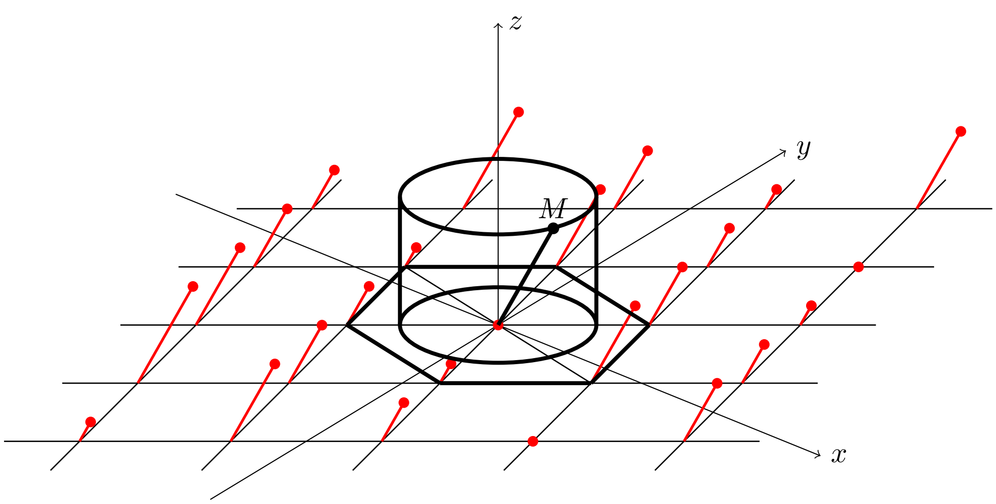

Рис. 1

Замечание 1. В работе [3] предполагалось, что Λ — решетка общего положения, т. е. что у Λ на оси Oz и на плоскости Oxy нет точек, отличных от O, и, кроме того, в решетке Λ нет точек с одинаковым значением параметра $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (кроме точек, симметричных друг другу относительно начала координат). Эти предположения справедливы в рамках задачи о построении основных единиц кубического поля отрицательного дискриминанта. Мы не накладываем никаких ограничений на решетку Λ. В частности, гвоздики могут иметь нулевую длину.

На решетке S определим *первый шестиугольник Зеллинга*, как шестиугольник, составленный из 6 остроугольных (или прямоугольных) примитивных треугольников решетки Λ, сходящихся в начале координат (второй, третий и т. д. получаются из первого с помощью гомотетии с центром в начале координат и коэффициентами $2, 3, \ldots$ соответственно). Определим *основной остроугольный треугольник (приведенный треугольник Зеллинга)* как тот из 6 треугольников, сходящихся в O, который охватывает отрицательное направление оси Ox.

Существуют два случая (будем называть их вырожденными), когда возникает неоднозначность в выборе основного треугольника. Так бывает в случае прямоугольной решетки или если не существует треугольника, охватывающего отрицательное направление оси Ox (то есть два треугольника примыкают к оси Ox). Договоримся, что из возможных треугольников будет выбираться тот, у которого сторона, находящаяся напротив вершины O, является более короткой (см. рис. 11 и 13). Если и это условие не определяет основной треугольник однозначно, то будем выбирать любой из двух треугольников, удовлетворяющих указанным условиям. В дальнейшем окажется, что теорема Вороного в вырожденных случаях верна независимо от выбора основного треугольника (см. замечание 3).

Пусть вершины выбранного треугольника суть точки O, A и B. Будем называть *точками Вороного* узлы $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,1)$, $D(-1,0)$, $E(0,-1)$, $F(1,-1)$ и $N(1,1)$ (здесь координаты даны в базисе $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$), а *шапочками Вороного* — шапочки семи соответствующих гвоздиков (см. рис. 1). Ту из семи шапочек Вороного, которая имеет наименьшее расстояние ρ до оси Oz, будем называть *приведенной шапочкой Вороного*.

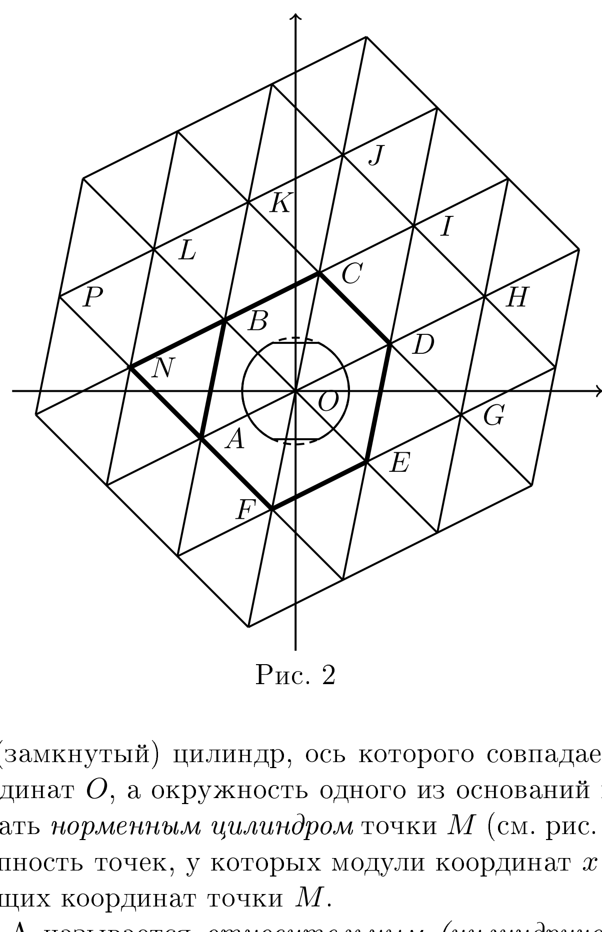

Рис. 2

Прямой круговой (замкнутый) цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz, центр находится в начале координат O, а окружность одного из оснований проходит через данную точку M, будем называть *норменным цилиндром* точки M (см. рис. 1). Этот цилиндр представляет собой совокупность точек, у которых модули координат $x + iy$ и z не превышают модулей соответствующих координат точки M.

Точка M решетки Λ называется *относительным (цилиндрическим) минимумом*, если ее норменный цилиндр не содержит других точек решетки, отличных от O и точек на границах оснований. В дальнейшем будем предполагать, что точка M — относительный минимум, не лежащий на плоскости Oxy. Если увеличивать радиус норменного цилиндра точки M и не менять его высоты, то боковая то боковая поверхность наткнется на некоторую точку решетки Λ, которая называется *соседним* с M относительным минимумом в сторону возрастания параметра ρ. Аналогично, если M не лежит на оси Oz, определяется соседний с M минимум в сторону убывания ρ (цилиндр вытягивается вверх).

Алгоритм Вороного для отыскания последовательных цилиндрических минимумов решетки Λ основан на следующей теореме (см. [3, стр. 211]).

Теорема 1. *Если приведенная шапочка Вороного $\widetilde{M}$, соответствующая примитивной точке M решетки Λ, лежит вне норменного цилиндра точки M, то M есть относительный минимум решетки и $\widetilde{M}$ есть соседний в сторону возрастания ρ относительный минимум. Если же $\widetilde{M}$ лежит в норменном цилиндре точки M, то M — не относительный минимум, и найдена точка $\widetilde{M}$, лежащая внутри норменного цилиндра точки M.*

Пусть r — радиус норменного цилиндра точки M, T_r — сам цилиндр, $R \geq r$ и T_R — цилиндр, полученный из T_r увеличением радиуса основания до R. Теорема Вороного будет доказана в следующей (эквивалентной) формулировке.

Теорема 2. *Пусть цилиндр T_R не содержит шапочек Вороного. Тогда он не содержит и других точек решетки Λ, отличных от начала координат, и точек, лежащих на границах оснований T_r.*

Для доказательства эквивалентности теорем 1 и 2 достаточно рассмотреть случай, когда приведенная шапочка лежит вне цилиндра T_r и в качестве R взять расстояние от приведенной шапочки Вороного до оси Oz.

Подчеркнем, что теоремы 1 и 2 выполняются для произвольных решеток, а не только для решеток общего положения. Сначала теорема 2 будет доказана в рамках предположений, сделанных для вырожденных случаев. Затем будет объяснено почему теорема остается справедливой, если неопределенности разрешаются произвольным образом.

2. Вспомогательные обозначения и утверждения

Для всякой точки A решетки S через $\overline{A}$ будем обозначать шапочку гвоздика с основанием A, а через A' — ортогональную проекцию $\overline{A}$ на плоскость Oxy. Множество проекций всех шапочек обозначим через S'. Напомним, что при ортогональной проекции на плоскость Oxy точка M проецируется в точку $(r, 0)$ $(r > 0)$. Поэтому все векторы вида AA' направлены вдоль положительного направления оси Ox и имеют длину строго меньшую, чем r.

Замечание 2. Из определения множества S' следует, что вдоль каждой прямой, проходящей через точки решетки S, длины проекций гвоздиков (длины отрезков вида AA') по модулю r образуют арифметическую прогрессию. При этом для всех прямых фиксированного направления разности соответствующих арифметических прогрессий будут равны друг другу.

Через a обозначим длину кратчайшего вектора решетки S, а через h — наименьшую высоту в приведенном треугольнике Зеллинга.

Лемма. *Пусть приведенная шапочка Вороного не лежит в цилиндре T_R. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Область (см. рис. 3)*

$$Z = \left\{(x, y): \quad x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ |y| \leqslant \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}\right\}$$

не содержит ненулевых узлов решетки S.

2) *Длина кратчайшего вектора решетки S удовлетворяет неравенству $a > \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}$.*

3) По крайней мере две стороны основного треугольника Зеллинга не меньше R.

4) Если шапочка некоторого гвоздика попадает в цилиндр T_R, то основание этого гвоздика должно лежать в области (см. рис. 4)

$$\Omega = \Big\{(x,y) \notin Z : x^2+y^2 \leqslant R^2 \ \vee \ (x+r)^2+y^2 < R^2 \ \vee \ (x,y) \in (-r,0] \times [-R,R]\Big\}.$$

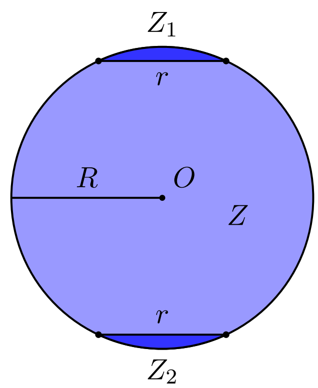

Рис. 3

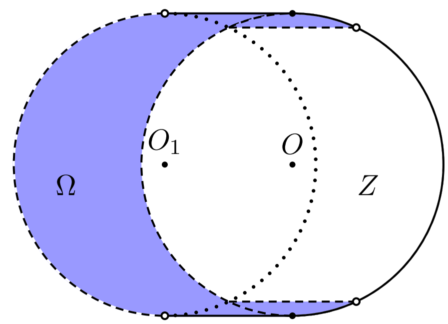

Рис. 4

Доказательство. Заметим, что первое утверждение леммы достаточно проверить только для точек первого шестиугольника Зеллинга.

Действительно, этого будет достаточно для доказательства второго утверждения леммы. (Кратчайший вектор решетки — это расстояние от начала координат до одной из вершин первого шестиугольника, а все точки за пределами области Z лежат на расстоянии большем чем $\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}$ от начала координат.) Тогда все точки второго шестиугольника Зеллинга (и шестиугольников с бо́льшими номерами) будут лежать не ближе, чем на расстоянии $\sqrt{2}a > \sqrt{\frac{3}{2}}R > R$ от начала координат, а значит, не смогут принадлежать Z.

Согласно замечанию 2, для всякого узла $A=(x,y)$ решетки S точки $(\pm A)'$ имеют вид $A' = (x+\theta_1 r, y)$, $(-A)' = (-x+\theta_2 r, -y)$, где $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 < 1$, $\theta_1+\theta_2 \equiv 0 \pmod 1$. Сумма первых координат точек $(\pm A)'$ равна 0 или r. Значит, одна из этих координат не превосходит $r/2$. Поэтому если $\pm A \in Z$, то одна из точек $(\pm A)'$ (а именно точка с наименьшей абсциссой) также будет лежать в Z, что приведет к противоречию с предположением леммы.

Для доказательства третьего утверждения леммы предположим, что две стороны основного треугольника Зеллинга OAB меньше R. Тогда одна из сторон OA, OB меньше R. Без ограничения общности будем считать, что $OA < R$. Значит, точка A лежит в сегменте (см. рис. 3)

$$Z_1 = \left\{(x,y) : x^2+y^2 < R^2, y > \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}\right\}.$$

Тогда получается, что $AB \geq R$ и $OB \geq R$, поскольку точка B лежит не выше оси Ox, находится вне Z и треугольник OAB не тупоугольный.

Четвертое утверждение леммы следует из того, что основание гвоздика не может лежать в Z, но должно попасть в круг $\big\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant R^2\big\}$ после сдвига на вектор $(r\theta, 0)$ $(0 \leqslant \theta < 1)$.

3. Доказательство теоремы Вороного

По предположению теоремы, ни одна из шапочек Вороного не лежит в цилиндре T_R. Значит, выполняется предположение леммы и можно использовать все ее утверждения.

Так как $R \geq r$, то из второго утверждения леммы следует, что $a > R\sqrt{3}/2$. В оценках также будем пользоваться тем, что длина h кратчайшей высоты в основном треугольнике удовлетворяет неравенству $h \geq a/\sqrt{2}$.

Расстояние от начала координат до периметра четвертого шестиугольника Зеллинга (и шестиугольника с бо́льшими номерами) не меньше $4h \geqslant 2\sqrt{2}a > 2R$. Поэтому точки всех шестиугольников, начиная с четвертого, не могут лежать в области Ω. Так же можно исключить и точки третьего шестиугольника: расстояние до вершин не меньше $3a > 2R$, а расстояния до точек на сторонах шестиугольника не меньше $\sqrt{R^2 + 4a^2} > 2R$ (достаточно применить теорему косинусов в $\triangle AOP$ и воспользоваться третьим утверждением леммы).

Остается рассмотреть точки на втором шестиугольнике Зеллинга. Из-за симметричности ситуации достаточно рассмотреть точки G, H, I, J, K, L. Точки G и H (см. рис. 2) могут лежать только в первой и четвертой координатных четвертях. Расстояние от начала координат до этих точек не меньше $2h \geqslant \sqrt{2}a > R$, значит, они не могут лежать в Ω. Аналогично исключаются точки I, J, если они находятся в первой координатной четверти. Если же они попадают во вторую координатную четверть, то, рассматривая $\triangle OJL$, получаем, что ордината точки J не меньше высоты, опущенной на сторону OL (см. рис. 5), т. е. не меньше $2h \geqslant \sqrt{2}a > R$; рассматривая $\triangle IBE$, получаем, что ордината точки I также не меньше высоты, опущенной из точки I (см. рис. 6), т. е. не меньше $2h \geqslant \sqrt{2}a > R$. Следовательно, находясь во второй координатной четверти, точки I, J тоже не могут лежать в Ω.

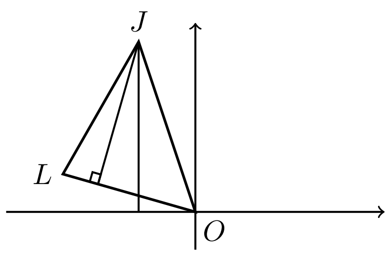

Рис. 5

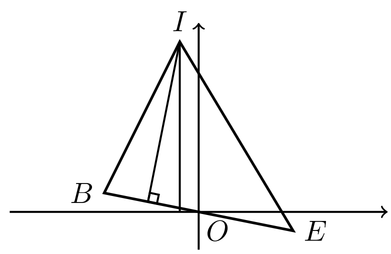

Рис. 6

Рассмотрим точку L. Если $BO \geqslant R$, то $LO \geqslant 2R$, и $L \notin \Omega$. Если же $BO < R$, то $B \in Z_1$, и ордината точки B не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Следовательно ордината точки L не меньше $\sqrt{3}R > R$, и снова получаем, что $L \notin \Omega$.

Остается рассмотреть точку K. Предположим, что $\overline{K} \in T_R$, и покажем, что одна из шапочек Вороного также будет обладать этим свойством. Заметим, что в $\triangle AOB$ только сторона AB может быть меньше R. Действительно, $K \in \Omega$, значит $B \notin Z_1$ (B — середина AK, а точка A лежит не выше оси Ox). Кроме того, $A \notin Z_2$ (Z_2 — область, симметричная Z_1 относительно начала координат, см. рис. 3), т. к. область, симметричная Z_2 относительно O_1, не имеет общих точек с Ω. Поэтому, если предположить, что $A \in Z_2$, то получится, что точка K (симметричная точке A относительно точки B) не лежит в Ω.

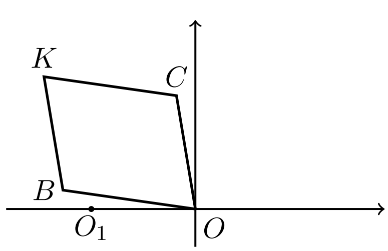

Рис. 7

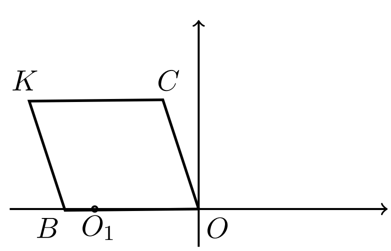

Рис. 8

Предположим сначала, что $AB \geqslant R$. Тогда параллелограмм $OBKC$ составлен из двух треугольников, все стороны которых не меньше R, т. е. $OK \geqslant \sqrt{2}R$. Расстояние O_1K не увеличится, если параллелограмм повернуть так, чтобы точка B попала на ось Ox (см. рис. 7–8). А после поворота $KO_1 \geqslant KB \geqslant R$. Из неравенств $KO_1 \geqslant R$, $KO \geqslant \sqrt{2}R$ следует, что $K \notin \Omega$.

Предположим теперь, что $AB < R$. В этом случае нельзя однозначно предъявить шапочку Вороного, которая лежала бы в T_R, но одна из шапочек $\overline{B}$, $\overline{F}$ обязательно будет обладать этим свойством. Неравенство $AB < R$ означает, что $C \in Z_1$, $F \in Z_2$. Согласно замечанию 2, возможны два варианта:

$$1)\ BB' = KK' + FF'; \qquad 2)\ BB' = KK' + FF' - r.$$

В первом случае $BB' \geqslant KK'$, $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OF} \in Z_2$. Ордината K' не меньше ординаты C, значит, $K' \in Z_1$. Записывая вектор $\overrightarrow{OB'}$ в виде

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{KK'} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OK'} + \overrightarrow{KB} + \bigl(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{KK'}\bigr),$$

получаем, что B' лежит в области (множества складываются по Минковскому)

$$\bigl(Z_1 + Z_2 + [0, r)\bigr) \cap \bigl\{y \geqslant 0, (x - r)^2 + y^2 > R^2\bigr\}, \tag{1}$$

содержащейся в Z, следовательно $\overline{B} \in T_R$ (см. рис. 9).

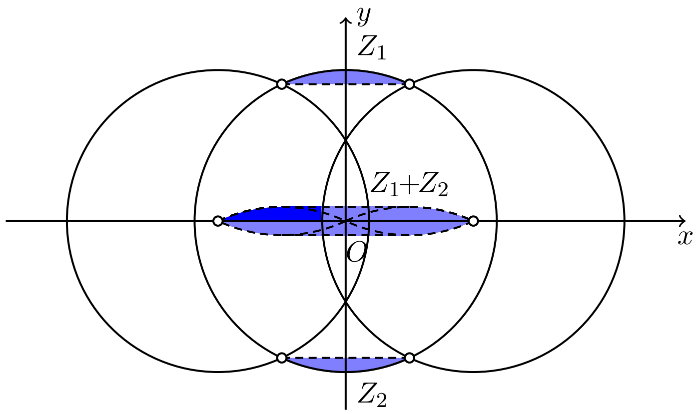

Рис. 9

На рисунке закрашена область $Z_1 + Z_2$ и дополнительно выделена подобласть, которая выделяется условиями $y \geqslant 0$, $(x - r)^2 + y^2 > R^2$.

Во втором случае $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OK'} + \overrightarrow{OF} - (r, 0)$. Если предположить, что $\overline{F} \notin T_R$, то получаем, что $K' \in Z_1$, $\overrightarrow{F} \in Z_3$, где (см. рис. 10)

$$Z_3 = \Bigl\{x^2 + y^2 > R, x > 0, -R \leqslant y < -\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}}, (x - r)^2 + y^2 \leqslant R^2 \vee x \leqslant r\Bigr\}.$$

Следовательно, B' лежит в области

$$\bigl(Z_1 + Z_3 + [-r, 0]\bigr) \cap \bigl\{y \geqslant 0,\ (x - r)^2 + y^2 \geqslant R^2\bigr\} \subset \Omega,$$

которая совпадает с областью (1). На рис. 10 закрашены области Z_1, Z_3, $Z_1 + Z_3$. Таким образом, и в оставшемся случае $\overline{B} \in T_R$.

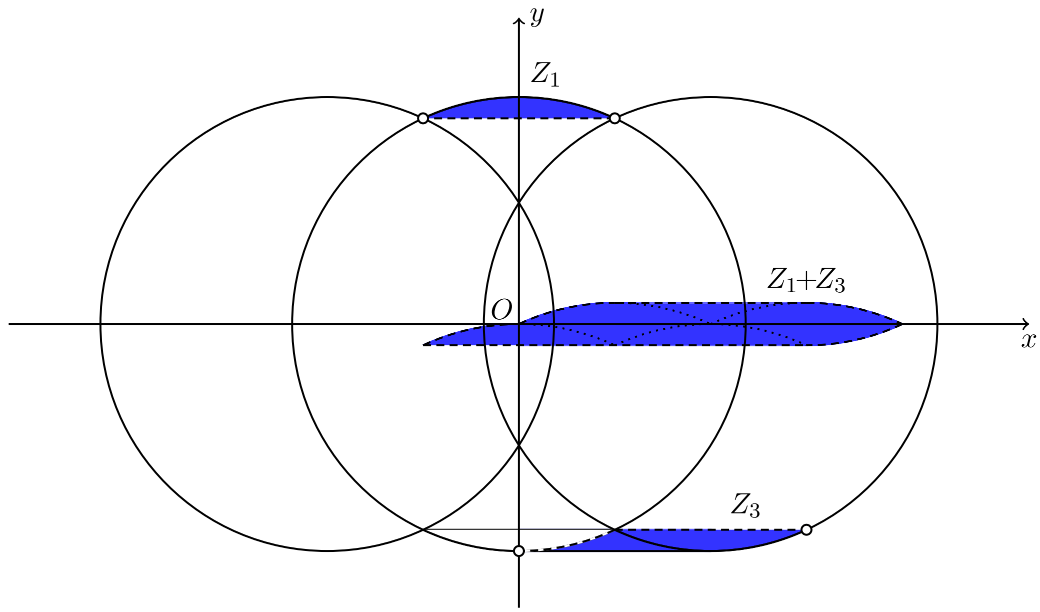

Рис. 10

Замечание 3. Оказывается, что в вырожденных случаях шапочку $\overline{N}$ можно не рассматривать. Действительно, если решетка прямоугольная, то, согласно договоренности, ось Ox пересекает один из катетов треугольника OAB (см. рис. 11). В новом базисе (см. рис. 12) точка $N = P'$ лежит уже на третьем шестиугольнике Зеллинга и не может находится в области Ω.

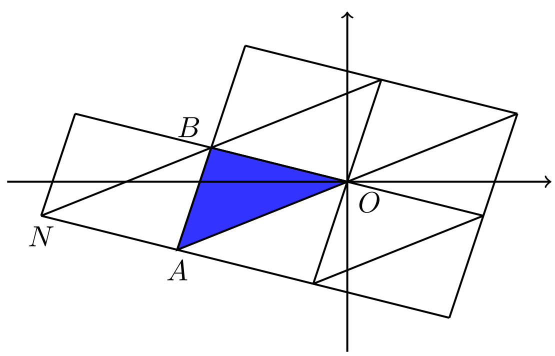

Рис. 11

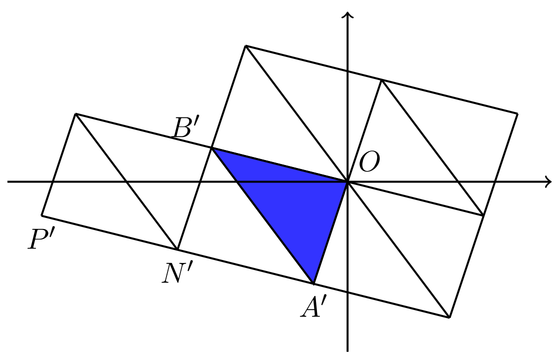

Рис. 12

Если основной треугольник остроугольный (см. рис. 13), то, согласно договоренности, кратчайшей стороной в треугольнике OAB будет либо AB либо OA. Значит, $AO \geq R$ (в первом случае согласно третьему утверждению леммы, а во втором — поскольку $A \notin Z$). Из неравенств $NA \geq R$ и $ON > \sqrt{2}R$ следует, что $N \notin \Omega$ (ситуация аналогична рассмотренной на рис. 8).

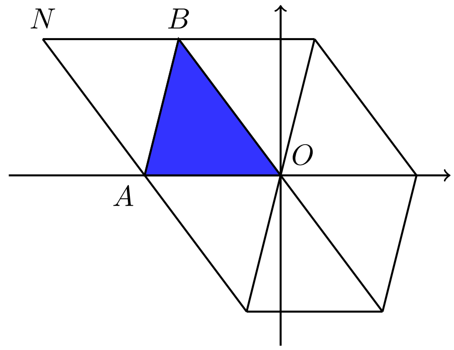

Рис. 13

Таким образом в вырожденных случаях множество точек Вороного можно сузить до вершин первого шестиугольника Зеллинга. Если же придерживаться основной формулировки теоремы Вороного, когда приведенная шапочка выбирается из 7 шапочек Вороного, то получается, что выбор основного треугольника Зеллинга можно делать произвольно.

Список литературы

[1] Г. Вороной, *Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей*, Типография Варшавского Учебного Округа, Варшава, 1896.

[2] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, изд-во АН СССР, М.–Л., 1940.

[3] Б. Н. Делоне, *Петербургская школа теории чисел*, изд-во АН СССР, М.–Л., 1947.

[4] А. А. Илларионов, "О цилиндрических минимумах трехмерных решеток", *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1, (2011), 48–55.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 августа 2011 г.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда «Династия», фонда РФФИ, гранты № 11-01-12004-офи-м-2011, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а, проекта ДВО РАН № 09-I-П4-03.

Ustinov A. V. On Voronoi's cylindric minima theorem. Far Eastern Mathematical Journal. 2011. V. 11. № 2. P. 213–221.

ABSTRACT

Voronoi's algorithm for computing a system of fundamental units of a complex number field is based on a geometric properties of 3-dimensional lattices. This algorithm is based on Voronoi's theorem about cylindric minima for a lattice in general position. In the original proof and it's refinement published by Delone and Faddeev some significant cases were skipped. In the present we give a complete proof of Voronoi's theorem. The result is extended to arbitrary lattices.

Key words: *lattice, Voronoi algorithm.*