УДК 519.624.8
MSC2010 74P01

© Э. М. Вихтенко[1]

О методе поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа для задачи теории упругости с заданным трением

Рассмотрена полукоэрцитивная задача условной минимизации, возникающая при решении полной контактной задачи теории упругости с трением. Для решения поставленной задачи была использована схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа. Разработан и обоснован метод поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа с переменным шагом сдвига по двойственной переменной.

Основные результаты статьи доложены на секционном докладе Международной конференции «Торическая топология и автоморфные функции» (5-10 сентября 2011 г., г. Хабаровск, Россия).

Ключевые слова: *контактная задача теории упругости, схема двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, седловая точка, метод Удзавы.*

Пусть $\Omega \in R^2$ — область с достаточно регулярной границей Γ, $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, где Γ_0, Γ_1, Γ_2 — открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ, причем $mes(\Gamma_0) > 0$, $mes(\Gamma_1) > 0$. При решении плоской контактной задачи между упругим телом $\overline{\Omega}$ и абсолютно твердой опорой (рис. 1) возникает задача с заданным трением [1, 2]

$$\left\{ \begin{array}{l} J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) + \int\limits_{\Gamma_1} g^k |v_t| \, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} f\, v \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_2} T\, v\, d\Gamma \to min \\ v \in \mathrm{K}, \end{array} \right. \tag{1}$$

где $a(u,v)$ — билинейная форма, определенная на $[W_2^1(\Omega)]^2 \times [W_2^1(\Omega)]^2$,

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)\varepsilon_{ij}(v)\, d\Omega.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $v = (v_1, v_2)$ — вектор перемещений; $\varepsilon_{ij}(v)$ — компоненты тензора деформаций,

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right);$$

$\sigma_{ij}(v) = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(v)$ — компоненты тензора напряжений; $f = (f_1, f_2)$ — объемная сила, $T = (T_1, T_2)$ — боковое усилие, g^k — заданная сила трения, $g^k \geq 0$ на Γ_1; $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, v_n и v_t — нормальная и тангенциальная

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: vikht@mail.khstu.ru

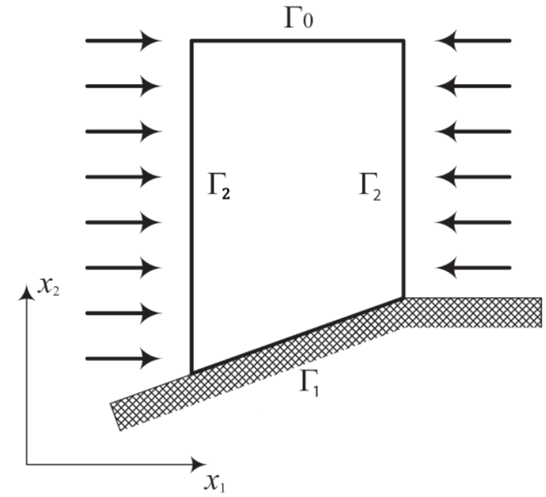

Рис. 1. Контакт между упругим телом и абсолютно твердой опорой

составляющие вектора перемещений v, $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$, $\sigma_t = \sigma - \sigma_n n$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Связь между тензором напряжений и тензором деформаций описывается законом Гука для однородного изотропного тела,

$$c_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}),$$

где λ, μ — константы Ламе, δ_{ij} — компоненты единичного тензора.

Пусть $f \in [L_2(\Omega)]^2$; $T \in [W_2^{1/2}(\Gamma_2)]^2$. Через К и W обозначим множества функций вида

$$W = \left\{ v \in [W_2^1(\Omega)]^2 : \ v_n \equiv v_2 = 0 \text{ п.в. на } \Gamma_0 \right\}, \ \mathrm{K} = \left\{ v \in W : \ v_n \leq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_1 \right\}.$$

Минимизируемый функционал $J(v)$ в (1) не является сильно выпуклым на всем множестве W, поэтому задача (1) является полукоэрцитивной задачей [1, 2]. В [3] показано, что из условия

$$\int\limits_{\Omega} f_1 \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_2} T_1 \, d\Gamma > 0 \tag{2}$$

следует свойство

$$J(v) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \to \infty \quad \forall v \in K,$$

что обеспечивает разрешимость задачи (1). В дальнейшем будем считать указанное условие выполненным.

Задача (1) является оптимизационной задачей с ограничениями. Для решения таких задач традиционно применяются методы двойственности, основанные на использовании функционалов Лагранжа. Известно [4], что если решение u задачи (1) принадлежит пространству $[W_2^2(\Omega)]^2$ и $mes\{x \in \Gamma_1 : \sigma_n(u) < 0\} > 0$, то u является единственным решением задачи (1), а пара $(u, -\sigma_n(u))$ — единственной седловой точкой классического функционала Лагранжа

$$L(v, l) = J(v) + \int\limits_{\Gamma_1} l v_n \, d\Gamma.$$

Из определения седловой точки следует, что для пары $(u, -\sigma_n(u))$ выполняется двустороннее неравенство

$$L(u, l) \leq L(u, -\sigma_n(u)) \leq L(v, -\sigma_n(u)) \quad \forall (v, l) \in W \times (L_2(\Gamma_1))^+,$$

где через $(L_2(\Gamma_1))^+$ обозначено множество неотрицательных функций из $L_2(\Gamma_1)$. В дальнейшем будем предполагать, что решение u удовлетворяет сформулированным выше требованиям.

Применение известных алгоритмов поиска седловых точек классического функционала Лагранжа $L(v,l)$ для полукоэрцитивных задач не представляется возможным. В случае, когда задача является полукоэрцитивной, сходимость последовательности решений в итерационном процессе доказывается только для прямой переменной [5, 6]. При этом необходимо согласовывать длину шага сдвига по двойственной переменной l с константой положительной определенности квадратичной формы $a(v,u)$ минимизируемого функционала. В полукоэрцитивной задаче (1) квадратичная форма $a(v,u)$ лишь неотрицательно определена. Для преодоления этого затруднения в работах [4], [7]–[11] построен модифицированный функционал Лагранжа. Для облегчения понимания дальнейшего текста повторим некоторые результаты указанных работ.

На пространстве $W \times L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)$ определим функционал [4]

$$\mathsf{K}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l+rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma, & \text{если } v_n \le m \text{ п.в. на } \Gamma_1, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $r > 0$ — постоянная.

Определим модифицированный функционал Лагранжа

$$\mathrm{M}(v,l) = \inf_m \mathrm{K}(v,l,m). \tag{3}$$

Определение 1. *Пара $(v^*,l^*) \in W \times L_2(\Gamma_1)$ называется седловой точкой функционала Лагранжа $M(v,l)$, если выполняется двустороннее неравенство*

$$M(v^*,l) \le M(v^*,l^*) \le M(v,l^*) \quad \forall (v,l) \in W \times L_2(\Gamma_1).$$

Множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [9], и, следовательно, точка $(u, -\sigma_n(u))$ является единственной седловой точкой функционала $M(v,l)$. Применение функционала Лагранжа модифицированного вида позволяет снять ограничение на двойственную переменную $l \in (L_2(\Gamma_1))^+$ и проводить поиск седловой точки на всем пространстве $W \times L_2(\Gamma_1)$.

Функционал $M(v,l)$ можно записать в следующем виде [4, 8]:

$$\mathrm{M}(v,l) = J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left((l + r\,v_n)^+ \right)^2 - l^2 \right) d\Gamma.$$

Известно ([4]), что функционал $M(v,l)$ является выпуклым по v при фиксированном l и вогнутым по l при фиксированном v и, более того, модифицированный функционал Лагранжа дифференцируем по l.

Определим функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ следующим образом:

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_v \mathrm{M}(v,l).$$

Функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ может быть представлен двумя способами [9]:

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left[(l + rv_n)^+ \right]^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}, \tag{4}$$

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\}, \tag{5}$$

где $\chi(m) = \inf\limits_{v_n \le m} J(v)$ — функция чувствительности, $(x)^+ = \max\{0, x\}$.

В [9] показано, что задача

$$\inf_m \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\}$$

имеет решение для любого $l \in L_2(\Gamma_1)$, т.е. существует элемент $m(l)$, такой, что

$$\underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_m \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\} = \chi(m(l)) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm(l))^2 - l^2 \right) \, d\Gamma.$$

Известно, что для любого $m \in L_2(\Gamma_1)$ при выполнении условия (2) задача

$$\begin{cases} J(v) \ \to \ \min, \\ v_n \le m \end{cases}$$

имеет решение [4]. Можно показать [9], что решение задачи

$$\inf_v \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\left[(l + rv_n)^+ \right]^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}$$

также также существует и равно

$$v(l) = \arg \min_{v_n \le m(l)} J(v).$$

Следовательно, функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ — вогнутый конечнозначный функционал на $L_2(\Gamma_1)$.

Как показано в [4], функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma_1)$ и его производная $\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $1/r$, то есть для любых l_1, $l_2 \in L_2(\Gamma_1)$ справедливо неравенство

$$\|\nabla\underline{\mathrm{M}}(l_1) - \nabla\underline{\mathrm{M}}(l_2)\|_{L_2(\Gamma_1)} \le \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma_1)}. \tag{6}$$

Более того, доказано [4], что

$$\nabla\underline{\mathrm{M}}(l) = m(l) = \arg\min_m \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int\limits_{\Gamma_1} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) \, d\Gamma \right\}.$$

Легко показать, что

$$m(l) = \max \left\{ -\frac{l}{r}, v_n(l) \right\}.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{M}}(l) \ \to \ \max, \\ l \in L_2(\Gamma_1), \end{cases} \tag{7}$$

которую назовем двойственной к задаче (1). Известно, что $-\sigma_n(u)$ есть единственное решение двойственной задачи [4].

Так как градиент функционала $\underline{\mathrm{M}}(l)$ удовлетворяет условию Липшица, то для решения двойственной задачи можно использовать градиентный метод поиска максимума функционала [12, 13]

$$l^{k+1} = l^k + \beta_k \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k) = l^k + \beta_k m(l^k) \tag{8}$$

с произвольным стартовым значением $l^0 \in L_2(\Gamma_1)$ и $\beta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, где $\beta \in (0, r]$. В [12, 13] рассматриваются методы решения конечномерных экстремальных задач. Однако часть результатов переносится на бесконечномерный случай гильбертовых пространств.

Теорема 1. *Для последовательности $\{l^{k+1}\}$, построенной градиентным методом (8), имеет место предельное равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} \|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\nabla \underline{\mathrm{M}}(l)$ удовлетворяет условию Липшица, то справедливо равенство [12, 14]

$$\underline{\mathrm{M}}(l_1 + l_2) = \underline{\mathrm{M}}(l_1) + \int\limits_0^1 (\nabla \underline{\mathrm{M}}(l_1 + \tau l_2), l_2)_{L_2(\Gamma_1)}\, d\tau. \tag{9}$$

Построим выпуклый функционал $M_1(l) = -\underline{\mathrm{M}}(l)$. Функционал $M_1(l)$ является конечнозначным, ограниченным снизу величиной $M_1^* = \inf\limits_{l \in L_2(\Gamma_1)} M_1(l) > -\infty$, дифференцируемым функционалом, производная которого удовлетворяет условию Липшица (6). Выполнение условия $M_1^* > -\infty$ следует из того, что двойственная задача (7) имеет решение.

Для $M_1(l)$ рассмотрим метод градиентного спуска, в котором строится итерационная последовательность

$$l^{k+1} = l^k - \beta_k \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k).$$

Для функционала $M_1(l)$ при $l_1 = l^k$, $l_2 = -\beta_k \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)$ формула (9) будет иметь следующий вид:

$$M_1(l^{k+1}) = M_1(l^k) - \beta_k \int\limits_0^1 \left(\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k - \tau \beta_k \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)), \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k) \right)_{L_2(\Gamma_1)} d\tau =$$

$$= M_1(l^k) - \beta_k \|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} +$$

$$+ \beta_k \int\limits_0^1 \left(\left(\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k - \tau \beta_k \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)) - \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k) \right), \nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k) \right)_{L_2(\Gamma_1)} d\tau.$$

Из последнего равенства и из (6) следует, что

$$M_1(l^{k+1}) \le M_1(l^k) - \beta_k \|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \frac{1}{r} \beta_k^2 \|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \int\limits_0^1 \tau\, d\tau =$$

$$= M_1(l^k) - \beta_k \left(1 - \frac{\beta_k}{2r} \right) \|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Отсюда и из оценки $\beta_k \left(1 - \frac{\beta_k}{2r}\right) > 0$ получаем неравенство $M_1(l^{k+1}) \le M_1(l^k)$. Последовательность $\{M_1(l^k)\}$ является убывающей, ограниченной снизу последовательностью, следовательно, существует $\tilde{M}_1 = \lim\limits_{k\to\infty} M_1(l^k) \ge M_1^* > -\infty$. Тогда

$$\|\nabla \underline{\mathrm{M}}(l^k)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le \frac{1}{\beta_k} \left(1 - \frac{\beta_k}{2r} \right)^{-1} \left(M_1(l^k) - M_1(l^{k+1}) \right) \le \frac{2r}{\beta_k^2} \left(M_1(l^k) - \tilde{M}_1 \right) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|m(l^k)\|_{L_2(\Gamma_1)}=0$.

Используя градиентный метод (8), можно для решения задачи (1) построить следующий алгоритм метода Удзавы:

$$\begin{aligned} &(i) \quad u^{k+1}=\arg\min_{v\in W}\mathrm{M}(v,l^k) \quad (l^0\in W_2^{1/2}(\Gamma_1)\ ),\\ &(ii) \quad l^{k+1}=l^k+\beta_k\max\left\{-u_n^{k+1},-\tfrac{l^k}{r}\right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

$\beta_k\in[\beta,2r-\beta]$, $\beta\in(0,r]$.

Как было отмечено выше,

$$u^{k+1}=v(l^k):\ J(v(l^k))=\inf_{v_n\le m(l^k)}J(v)=\chi(m(l^k)).$$

В силу свойств выпуклости и конечнозначности функционал $\chi(m)$ является непрерывным. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}J(u^k)=\lim_{k\to\infty}\chi(m(l^k))=\chi(0)=\min_{v\in\mathrm{K}}J(v)=J(u).$$

Тем самым доказана сходимость по функционалу последовательности $\{u^k\}$ к решению u.

При $\beta_k=r$, $k=1,2,\ldots$ шаг алгоритма (ii) примет вид

$$l^{k+1}=l^k+r\,m(l^k)=l^k+r\max\left\{v_n^{k+1},-\frac{l^k}{r}\right\}=$$

$$=l^k+\max\left\{r\,v_n^{k+1},-l^k\right\}=\max\left\{l^k+r\,v_n^{k+1},0\right\}=\left(l^k+r\,v_n^{k+1}\right)^+.$$

Алгоритм Удзавы с фиксированным шагом по двойственной переменной исследован в [4].

Для любого $\xi\in[\beta,2r-\beta]$, где $\beta\in(0,r]$, рассмотрим отображение $\mathrm{P}:L_2(\Gamma_1)\to L_2(\Gamma_1)$, действующее по правилу $\mathrm{P}(l)=l+\xi\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)$.

Теорема 2. *Отображение* $\mathrm{P}(l)=l+\xi\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)$ *удовлетворяет следующим двум условиям:*
1. $\mathrm{P}(-\sigma_n(u))=-\sigma_n(u)$*;*
2. $\|\mathrm{P}(-\sigma_n(u))-\mathrm{P}(l)\|_{L_2(\Gamma_1)}<\|-\sigma_n(u)-l\|_{L_2(\Gamma_1)}\quad\forall l\ne-\sigma_n(u)$.

Доказательство. Так как $-\sigma_n(u)$ есть решение двойственной задачи (7), то из свойства дифференцируемости функционала $\underline{\mathrm{M}}(l)$ следует, что $\nabla\underline{\mathrm{M}}\left(-\sigma_n(u)\right)=0$. Отсюда $\mathrm{P}\left(-\sigma_n(u)\right)=-\sigma_n(u)$.

Пусть $l\ne-\sigma_n(u)$. Так как

$$\nabla\underline{\mathrm{M}}\left(-\sigma_n(u)\right)=m\left(-\sigma_n(u)\right),\quad\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)=m(l),$$

то

$$\begin{aligned}\|\mathrm{P}\left(-\sigma_n(u)\right)-\mathrm{P}(l)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}&=\|-\sigma_n(u)+\xi\nabla\underline{\mathrm{M}}\left(-\sigma_n(u)\right)-l-\xi\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}=\\ &=\|-\sigma_n(u)-l+\xi\left(m\left(-\sigma_n(u)\right)-m(l)\right)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}=\end{aligned}\tag{11}$$

$$=\|-\sigma_n(u)-l\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+\xi^2\left\|m\left(-\sigma_n(u)\right)-m(l)\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+2\xi\left(-\sigma_n(u)-l,m\left(-\sigma_n(u)\right)-m(l)\right)_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Так как

$$m(l)=\arg\min_m\left\{\chi(m)+\int\limits_{\Gamma_1}l\,m\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1}m^2\,d\Gamma\right\},$$

то

$$\chi(m(l))+\int\limits_{\Gamma_1}l\,m(l)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1}(m(l))^2\,d\Gamma+\frac{r}{2}\|m-m(l)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\le\chi(m)+\int\limits_{\Gamma_1}l\,m\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1}m^2\,d\Gamma$$

для всех $m \in L_2(\Gamma_1)$.

Поэтому при $l_1, l_2 \in L_2(\Gamma_1)$, $m_1 = m(l_1)$, $m_2 = m(l_2)$ имеют место неравенства

$$\chi(m_1) + \int\limits_{\Gamma_1} l_1\, m_1\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1} (m_1)^2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\|m_2 - m_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le \chi(m_2) + \int\limits_{\Gamma_1} l_1\, m_2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1} (m_2)^2\, d\Gamma,$$

$$\chi(m_2) + \int\limits_{\Gamma_1} l_2\, m_2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1} (m_2)^2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\|m_1 - m_2\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le \chi(m_1) + \int\limits_{\Gamma_1} l_2\, m_1\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma_1} (m_1)^2\, d\Gamma.$$

Складывая неравенства, получаем

$$r\|m_1 - m_2\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le \int\limits_{\Gamma_1} (l_1 - l_2)(m_2 - m_1)\, d\Gamma. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$\|\mathrm{P}\left(-\sigma_n(u)\right) - \mathrm{P}(l)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \le \|-\sigma_n(u) - l\|^2_{L_2(\Gamma_1)} +$$

$$+\xi^2 \left\|m\left(-\sigma_n(u)\right) - m(l)\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - 2\xi r \left\|m\left(-\sigma_n(u)\right) - m(l)\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} =$$

$$= \|-\sigma_n(u) - l\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - \xi(2r - \xi) \left\|m\left(-\sigma_n(u)\right) - m(l)\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} =$$

$$= \|-\sigma_n(u) - l\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - \xi(2r - \xi) \|m(l)\|^2_{L_2(\Gamma_1)} < \|-\sigma_n(u) - l\|^2_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает, что последовательность $\{l^k\}$, построенная при помощи алгоритма (10), ограничена в $L_2(\Gamma_1)$. Как было отмечено выше, $\lim\limits_{k\to\infty} m(l^k) = 0$ в $L_2(\Gamma_1)$.

Теорема 3. *Пусть для последовательности $\{m(l^k)\}$ существует элемент $m^* \in L_2(\Gamma_1)$ такой, что $m(l^k) \le m^*$ почти всюду на Γ_1 для любых $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда последовательность $\{u^k\}$ ограничена в $[W_2^1(\Omega)]^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$u^* = \arg\min_{v_n \le m^*} J(v),\ G = \{w \in W:\ w_n \le m^*\},\ G^{k+1} = \{w \in W:\ w_n \le m(l^k)\}.$$

Легко показать, что $\mathrm{K} \subset G$, $G^k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из условия (2) вытекает, что функционал $J(v)$ является коэрцитивным на множестве G [3], то есть $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \to \infty$, $v \in G$. Отсюда, с учетом того, что $u^k \in G^k \subset G$ и $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k) = J(u) = \min\limits_{v_n \le 0} J(v)$, следует, что последовательность $\{u^k\}$ ограничена в пространстве $[W_2^1(\Omega)]^2$.

Теорема доказана.

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}(v, l^{k-1}) \ \to\ \min, \\ v \in [W_2^1(\Omega)]^2. \end{array} \right. \tag{13}$$

Ранее было доказано, что при выполнении условия (2) задача (13) имеет решение. Известно [4], что если решение задачи (13) принадлежит пространству $[W_2^2(\Omega)]^2$, то оно единственно.

Теорема 4. *Пусть выполнены условие (2) и предположение теоремы 3. Пусть, кроме того, точки*

$$u^k = \arg\min_{v \in W} \mathrm{M}(v, l^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяют следующим условиям

(A) $u^k \in [W_2^2(\Omega)]^2$*;*

(B) $\|u^k\|_{[W_2^2(\Omega)]^2} \le C$, $C > 0$ *— const.*

Тогда последовательность $\{(u^k, l^k)\}$*, построенная по алгоритму (10), сходится в пространстве* $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$ *к седловой точке* $(u, -\sigma_n(u))$ *при любом выборе начальной точки* $l^0 \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$.

Доказательство. Из теорем 2, 3 следует, что последовательность $\{(u^k, l^k)\}$ ограничена в пространстве $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$, из условий (A), (B) — что последовательность $\{(u^k, l^k)\}$ компактна в $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_1)$. Напомним, что $u^k \in G^k = \{w \in W : w_n \le m(l^{k-1})\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\tilde{u} = \lim\limits_{k\to\infty} u^{k_j}$ в $[W_2^1(\Omega)]^2$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0$, то существует подпоследовательность $\{m(l^k)\}$, сходящаяся почти всюду на Γ_1. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $m(l^{k_j-1}) \to 0$ при $k_j \to \infty$ почти всюду на Γ_1. В этом случае $\tilde{u}_n \le 0$ почти всюду на Γ_1, то есть $\tilde{u} \in \mathrm{K}$ и

$$J(\tilde{u}) = \lim_{k_j\to\infty} J(u^{k_j}) = \lim_{k\to\infty} \chi(m(l^{k_j-1})) = \chi(0) = \inf_{v_n\le 0} J(v) = J(u).$$

Следовательно, $\tilde{u}$ есть решение задачи (1). Так как решение задачи (1) единственно, то $\tilde{u} = u$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - u\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} = 0$.

Из теоремы 2 следует, что последовательность $\{l^k\}$ ограничена в $L_2(\Gamma_1)$. Из условия (A) следует, что функция u^k является решением краевой задачи

$$\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i & \text{в } \ \Omega,\ i = 1, 2, \\ u_n = 0,\ \sigma_t = 0 & \text{на } \ \Gamma_0, \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{на } \ \Gamma_2,\ i = 1, 2 \end{array}$$

с условием в зоне контакта $L_2(\Gamma_1)$

$$-\sigma_n = l^{k-1} + \beta_k\, m(l^{k-1}),$$

где $m(l^{k-1}) = \max\left\{u_n, -\frac{l^{k-1}}{r}\right\}$.

Если выполняется условие $l^0 \in W^{1/2}(\Gamma_1)$ (см.(10)) и $u^k \in (W_2^2(\Omega))^2$, то величина $l^1 = l^0 + \beta_1 \max\left\{u_n^1, -\frac{l^0}{r}\right\}$ также принадлежит пространству $W^{1/2}(\Gamma_1)$. Применяя метод математической индукции для k=2,3,..., получим, что $l^k \in W^{1/2}(\Gamma_1)$ для всех k=0,1,2,.... Из условия (B) следует, что последовательность $\{u^k\}$ компактна в пространстве $(W_2^1(\Omega))^2$ и, из теорем вложения, — что последовательность $\{l^{k-1} + \beta_k\, m(l^{k-1})\}$ компактна в пространстве $L_2(\Gamma_1)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0$, то компактной будет и последовательность $\{l^k\}$.

Пусть $\tilde{l} = \lim\limits_{k\to\infty} l^{k_j} \ne -\sigma_n(u)$. Так как оператор P в $L_2(\Gamma_1)$ непрерывен, то из теоремы 2 получим

$$\left\|-\sigma_n(u) - \tilde{l}\right\|_{L_2(\Gamma_1)} = \left\|\mathrm{P}(-\sigma_n(u) - \mathrm{P}(\tilde{l})\right\|_{L_2(\Gamma_1)} < \left\|-\sigma_n(u) - \tilde{l}\right\|_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Следовательно, $\tilde{l} = -\sigma_n(u)$ почти всюду на Γ_1. Отсюда, с учетом неравенства

$$\left\|-\sigma_n(u) - l^k\right\|_{L_2(\Gamma_1)} < \left\|-\sigma_n(u) - l^{k_j}\right\|_{L_2(\Gamma_1)}, \quad k > k_j,$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \left\|-\sigma_n(u) - l^k\right\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0.$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986.

[2] N. Kikuchi, T. Oden, *Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[3] Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*, Мир, М., 1974.

[4] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, "Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:12, (2007), 2023–2036.

[5] Р. Гловински, Ж. Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М, 1979.

[6] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer, New York, 1984.

[7] Г. Ву, Р. В. Намм, С. А. Сачков, "Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:1, (2006), 26–36.

[8] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, "Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:9, (2008), 1571–1579..

[9] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, "Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением", *Дальневосточный матем. журнал*, **9**:1–2, (2009), 38–47.

[10] Э. М. Вихтенко, Г. Ву, Р. В. Намм, "О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:8, (2010), 1357–1366.

[11] R. V. Namm, E. M. Vikhtenko, "Modified Lagrangian Functional for Solving the Signorini Problem with Friction", *Advances in Mechanics Research*, **1**, Nova Science Publishers, New-York, 2010, 435–446.

[12] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М, 1983.

[13] К. Гроссман, А. А. Каплан, *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации*, Наука, Новосибирск, 1981.

[14] Л. В. Канторович, Г. Л. Акимов, *Функциональный анализ*, Наука, М, 1984.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 29 сентября 2011 г.

Vikhtenko E. M. On the method of searching a saddle point of modified Lagrangian functional for elasticity problem with friction. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 03–11.

ABSTRACT

The semicoercive elasticity problem with the friction is considered. The scheme of duality with modified Lagrangian functional is used. A method of searching a saddle point of modified Lagrangian functional is constructed and proved with various step of shift according to dual variable.

The main results of the paper were reported on the section talk at the International conference «Toric Topology and Automorphic Functions» (September, 5-10th, 2011, Khabarovsk, Russia).

Key words: *contact problem, modified Lagrangian functional, saddle point, Uzawa method.*