ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 1. С. 48–59

УДК 517.95 + 519.633
MSC2010 Primary 35K59, Secondary 65N30

© К. В. Лисенков[1]

Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1

В работе рассматривается параболическое уравнение в нецилиндрической области с границей класса W_2^1. Приближенное решение строится проекционным методом; доказывается, что предел приближенного решения будет решением задачи. Для обоснования существования предела используются методы компактности для функций из шкалы банаховых пространств.

Ключевые слова: *квазилинейное параболическое уравнение, нецилиндрическая область, теорема компактности, теорема существования, проекционный метод.*

1. Введение

В отличие от наиболее распространенного метода решения подобных задач в нецилиндрических областях – метода замены переменных и сведения к задачам в цилиндрической области, здесь предлагается проекционный метод решения без замены переменных. Он затруднен необходимостью рассмотрения семейств проекторов и банаховых пространств, зависящих от временного параметра, а для нелинейных уравнений необходимостью рассмотрения специальных теорем компактности для пространств абстрактных функций со значениями в шкалах. Подобная задача рассматривалась в [1].

В работе [2] исследуется начально-краевая задача для параболических квазилинейных уравнений $(2m)$ порядка.

В работе [3] с помощью замены переменных исследовались существование и единственность решения смешанной задачи в нецилиндрической области.

В работе [4] методами вариационных неравенств исследовались существование и единственность обобщенного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса квазилинейных псевдопараболических уравнений в нецилиндрических областях.

Исследование методами теории потенциала линейных параболических уравнений порядка $2p$ в нецилиндрических областях с границами класса Гельдера C^α, $\alpha > \frac{1}{2}$ проведено в работе [5].

2. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $T \in (0, \infty)$ – заданное число, $x = s(t)$ заданная функция, определенная на отрезке $[0, T]$, такая, что

$$s \in W_2^1(0, T), \;\; s'(t) \geq 0, \;\; s(0) = 1. \tag{1}$$

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г.Хабаровск, ул.Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: lisenkov_kirill@mail.ru

Пусть $\overline{Q}_s$ – замкнутая ограниченная область, заключенная между прямыми $x = 0,\ t = 0,\ t = T$ и графиком функции $x = s(t)$.

В области $\overline{Q}_s$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right) + a(x,t)u_x + b(x,t)u,\ (x,t) \in Q_s, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1], \tag{3}$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u|_{x=s(t)} = 0,\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(\xi)$ – заданная непрерывная функция с производной $\varphi'(\xi)$ и первообразной $\Phi(\xi) = \int\limits_0^\xi \varphi(\eta)\,d\eta$, без ограничения общности будем считать, что $\varphi(0) = 0$.

$u_0 = u_0(x)$ – заданная функция такая, что

$$u_0 \in W_2^1(0,1),\ u_0(1) = 0. \tag{6}$$

$a = a(x,t),\ b = b(x,t)$ – заданные функции такие, что

$$a, b \in L_\infty(Q_s),\ |a| \le c_a,\ |b| \le c_b. \tag{7}$$

Определим

$$\tilde{W}_p^1(0,s(t)) = \{u \in W_p^1(0,s(t)) : u(s(t)) = 0\}.$$

Под $L_p(0,T;W_q^1(0,s(t)))$ понимаем пространство абстрактных функций со значениями $u(t,\cdot) \in W_q^1(0,s(t))$ и нормой $\|u\|_{L_p(0,T;W_q^1(0,s(t)))} = \|\|u\|_{W_q^1(0,s(t))}\|_{L_p(0,T)}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено (7) и*

1) *для всех* $\xi \in R$ *существует* $\varphi'(\xi) \ge \delta > 0$, *такая что* $\varphi'(\xi) \le c_1\Phi(\xi) + c_2$, *где* $c_1 > 0, c_2 -$ *константы;*

2) *существуют константы* $c_3, c_4, p_1 > 1$, *такие что для всех* $\xi \in R$ $|\varphi(\xi)|^{p_1} \le c_3 + c_4\xi^2$;

3) *существуют константы* c_5, c_6, c_7, *такие что для всех* $\xi \in R$ $\varphi'(\xi)\xi^2 \le c_5\Phi(\xi) + c_6\xi^2 + c_7$;

4) *функция* $u_0 = u_0(x)$ *удовлетворяет (6) и* $u_{0x} \in L_{\frac{2}{p_1}+1}(0,1)$,

тогда существует единственное решение задачи (2)–(5) из класса

$$u \in C(\overline{Q}_s) \cap L_\infty\left(0,T;\tilde{W}_2^1(0,s(t))\right),\ u_{xx} \in L_2(Q_s),\ u_t \in L_2(Q_s),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right) \in L_2(Q_s),\ \varphi(u_x) \in L_{p_1}(Q_s).$$

3. Построение приближенного решения

Пусть $\{\omega_k(x,t)\},\ k=0,1,2,\ldots$ – ортогональный базис в $L_2(0,s(t))$ и в $\tilde{W}_2^1(0,s(t))$, состоящий из собственных функций задачи $\omega_{kxx}(x,t)=\lambda_k\omega_k(x,t),\ \omega_k(s(t),t)=0,\ \omega_{kx}(0,t)=0$.

Очевидно, что $w_k(x,t)=\sqrt{2}\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{x}{s(t)}\right)$, $(\omega_k,\omega_j)_{L_2(0,s(t))}=s(t)\delta_k^j$.

Приближенное решение задачи (2)–(5) будем искать в виде суммы $u^m(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k^m(t)\omega_k(x,t)$, где $c_k^m(t)$ определяются из уравнений

$$\int\limits_0^{s(t)}u_t^m\omega_j\,dx+\int\limits_0^{s(t)}\varphi\left(u_x^m\right)\omega_{jx}\,dx-\int\limits_0^{s(t)}au_x^m\omega_j\,dx-\int\limits_0^{s(t)}bu^m\omega_j\,dx=0,\ j=\overline{0,m}. \tag{8}$$

Дополним их начальными условиями

$$c_j^m(0)=\overline{c}_j^m,\ j=\overline{0,m}, \tag{9}$$

исходя из требования $u^m(x,0)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k^m(0)\omega_k(x,0)\stackrel{\text{def}}{=}u_0^m(x)\to u_0(x)$ в $\tilde{W}_2^1(0,1)\cap W^1_{\frac{2}{p_1}+1}(0,1)$. Например, при $p_1\le 2$ можно взять $\overline{c}_k^m=\int\limits_0^1 u_0(x)\omega_k(x,0)\,dx$.

Нетрудно вычислить нормальную форму системы (8)–(9)

$$\begin{gathered}{c'}_j^m(t)=\frac{4}{s(t)}\sum_{k=0}^{m}\left(c_k^m(t)\int\limits_0^{s(t)}\left(a\omega_{kx}+b\omega_k-\omega_{kt}\right)\omega_j\,dx\right)-\frac{2\sqrt{2}}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}\varphi\left(u_x^m\right)\omega_{j\,x}\,dx,\ j=\overline{0,m},\\ c_j^m(0)=\overline{c}_j^m,\ j=\overline{0,m}.\end{gathered} \tag{10}$$

Для непрерывных a, b и s разрешимость системы (10) следует из эволюционного аналога леммы "об остром угле"[6]. Для ограниченных (не обязательно непрерывных) a, b или a, b из класса L_2, а $s\in W_2^1(0,T)$ (s' входит в первое слагаемое правой части (10)) также нетрудно установить разрешимость системы. Разрешимость системы (10) также следует из утверждения 1.

Утверждение 1. (Личное сообщение А.Г. Подгаева)
Пусть

1) $\vec{c}(t)=(c_1(t),\ldots,c_m)$ *– вещественная вектор-функция на* $[0,T]$ *и векторная функция* $\vec{F}(\vec{c},t)=(F_1,\ldots,F_n)$ *определена и непрерывна для всех пар* $(\vec{c},t)$, $\vec{c}\in R^n,\ t\in[0,T]$;

2) *для любых непрерывных* $\vec{c}(t)$ *и любых* $t\in[0,T]$ *выполняется неравенство* $\int\limits_0^t\vec{F}(\vec{c}(\tau),\tau)\cdot\vec{c}(\tau)\,d\tau\le n_0\int\limits_0^t|\vec{c}(\tau)|^2\,d\tau+k(t)$, *где постоянная* $n_0\ge 0$, $k(t)$ *– ограниченная на* $[0,T]$ *измеримая функция.*

Тогда система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{c}}{dt}=A(t)\vec{c}+\vec{F}(\vec{c}(t),t),$$

где $A(t)$ *– матрица с элементами* A_{kj} *из* $L_2(0,T)$, *имеет при любом выборе* $\vec{c}_0\in R^n$ *по крайней мере одно решение на* $[0,T]$, *удовлетворяющее начальному условию* $\vec{c}(0)=\vec{c}_0$ *и принадлежащее* $W_2^1(0,T)$.

Применим утверждение 1 к (10):

$A_{kj}(t) = \frac{4}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} (a\omega_{kx} + b\omega_k - \omega_{kt})\, \omega_j \; dx, \;\; k, j = \overline{0, m},$

$F_j(c,t) = -\frac{2\sqrt{2}}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(\sum_{k=0}^m c_k \omega_{kx}(x,t)\right) \omega_{j_x} \; dx, \;\; j = \overline{0, m}.$

Нетрудно обосновать выполнение условий утверждения 1. Значит, система дифференциальных уравнений (10) имеет при любом выборе $\vec{c}_0 = (\overline{c}_1^m, \ldots, \overline{c}_m^m)$ по крайней мере одно решение на $[0, T]$, удовлетворяющее начальному условию $\vec{c}(0) = \vec{c}_0$ и принадлежащее $W_2^1(0, T)$.

4. Оценка приближенного решения

Умножим (8) на $c_j^m(t)\lambda_j(t)$ и просуммируем по j от 0 до m, получим тождество

$$\int\limits_0^{s(t)} u_t^m u_{xx}^m \; dx - \int\limits_0^{s(t)} \varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2 \; dx - \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_{xx}^m \; dx - \int\limits_0^{s(t)} b u^m u_{xx}^m \; dx = 0. \tag{11}$$

Из условия 1 теоремы 1 следует, что для любых m функция $\varphi'(u_x^m)$ ограничена как функция переменных (x,t), поэтому второй интеграл в (11) имеет смысл. Из условия $s \in W_2^1$ следует, что u_t^m лежит в классе L_2.

Дифференцируя тождество $u^m(s(t), t) = 0$ по t, получим

$$u_t^m(s(t), t) = -s'(t) u_x^m(s(t), t). \tag{12}$$

Для преобразования первого слагаемого (11) учтем нецилиндричность Q_s и (12), поэтому, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{s(t)} u_t^m u_{xx}^m \; dx = -s'(t)(u_x^m(s(t),t))^2 - \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial t}(u_x^m)^2 \; dx = -s'(t)(u_x^m(s(t),t))^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \; dx + \tfrac{1}{2} s'(t)(u_x^m(s(t),t))^2 = -\tfrac{1}{2} s'(t)(u_x^m(s(t),t))^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \; dx.$$

Для второго слагаемого учтем условие 1 теоремы 1, получим

$$\int\limits_0^{s(t)} \varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2 \; dx \geq \delta \int\limits_0^{s(t)} \left(u_{xx}^m\right)^2 \; dx \geq 0.$$

Для третьего слагаемого учтем (7); используя неравенство Коши с ε, получим оценку

$$\left| \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_{xx}^m \; dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} c_a^2 \int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \; dx + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_0^{s(t)} (u_{xx}^m)^2 \; dx.$$

Аналогично поступим с четвертым слагаемым:

$$\left| \int\limits_0^{s(t)} b u^m u_{xx}^m \; dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} c_b^2 \int\limits_0^{s(t)} (u^m)^2 \; dx + \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_0^{s(t)} (u_{xx}^m)^2 \; dx.$$

Взяв $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, в итоге получим

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx + \delta\int\limits_0^{s(t)}(u_{xx}^m)^2\ dx \le$
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx + \int\limits_0^{s(t)}\varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2\ dx + \frac{1}{2}s'(t)(u_x^m(s(t),t))^2 =$
$-\int\limits_0^{s(t)}au_x^m u_{xx}^m\ dx - \int\limits_0^{s(t)}bu^m u_{xx}^m\ dx \le \frac{1}{\delta}c_a^2\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx + \frac{1}{\delta}c_b^2\int\limits_0^{s(t)}(u^m)^2\ dx + \frac{\delta}{2}\int\limits_0^{s(t)}(u_{xx}^m)^2\ dx.$

Тогда, так как $s' \ge 0$,

$$\frac{\delta}{2}\int\limits_0^{s(t)}(u_{xx}^m)^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le \frac{1}{\delta}c_a\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx + \frac{1}{\delta}c_b\int\limits_0^{s(t)}(u^m)^2\ dx$$

Учитывая, что (используя (1))

$$|u^m| = \left|\int\limits_x^{s(t)}u_x^m\ dx\right| \le \sqrt{s(t)\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx} \le \sqrt{s(T)}\sqrt{\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx},$$

получим

$$\int\limits_0^{s(t)}(u^m)^2\ dx \le s(T)\int\limits_0^{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx\ dx \le s^2(T)\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx.$$

В итоге

$$\delta\int\limits_0^{s(t)}(u_{xx}^m)^2dx + \frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le \frac{2}{\delta}(c_a^2 + c_b^2 s^2(T))\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t:

$$\delta\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}(u_{xx}^m)^2dxd\tau + \int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le \int\limits_0^1(u_x^m(x,0))^2\ dx + \frac{2}{\delta}(c_a^2 + c_b^2 s^2(T))\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}(u_x^m)^2\ dx\ d\tau.$$

Применяя к последнему неравенство Гронуолла, получим

$$\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le \int\limits_0^1(u_x^m(x,0))^2\ dx\exp\left(\frac{2}{\delta}(c_a^2 + c_b^2 s^2(T))T\right).$$

По построению ${u_0^m}_x(x) \to u_{0x}(x)$ в $L_2(0,1)$, значит, в силу сделанного выбора (9), равномерно ограничены (по m) интегралы $\int\limits_0^1(u_x^m(x,0))^2\ dx \le c_{u_{0x}}$.

В итоге

$$\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\ dx \le c_{u_{0x}}\exp\left(\frac{2}{\delta}(c_a^2 + c_b^2 s^2(T))T\right) = \sigma_1. \tag{13}$$

Тогда нетрудно обосновать

$$|u^m| \leq \sqrt{s(T)}\sqrt{\sigma_1} = \sigma_2, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_{xx}^m)^2 \; dx \; d\tau \leq \frac{c_{u_{0x}}}{\delta} + \frac{2T}{\delta^2}\left((c_a^2 + c_b^2 s^2(T))\right)\sigma_1 = \sigma_3 \tag{15}$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} \varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2 \; dxd\tau \leq \frac{1}{\delta}c_a^2 T\sigma_1 + \frac{1}{\delta}c_b^2\sigma_2^2 Ts(T) + \frac{\delta}{2}\sigma_3 = \sigma_4. \tag{16}$$

5. Оценка производной по времени

Получим оценку u_t^m. Для этого умножим (8) на $c'^m_j(t)$ и просуммируем по j от 0 до m:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{s(t)} u_t^m \sum\limits_{j=0}^m c'^m_j \omega_j \; dx - \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) \sum\limits_{j=0}^m c'^m_j \omega_j \; dx \\ - \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m \sum\limits_{j=0}^m c'^m_j \omega_j \; dx - \int\limits_0^{s(t)} b u^m \sum\limits_{j=0}^m c'^m_j \omega_j \; dx = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=0}^m c'^m_j \omega_j = \left(u_t^m + \frac{s'(t)}{s(t)} x u_x^m\right).$$

Тогда (17) примет вид

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{s(t)} (u_t^m)^2 \; dx - \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) u_t^m \; dx = -\tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} u_t^m x u_x^m \; dx + \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_t^m \; dx \\ + \int\limits_0^{s(t)} b u^m u_t^m \; dx + \tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) x u_x^m \; dx + \tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} x \left(a\left(u_x^m\right)^2 \; dx + b u^m u_x^m\right) dx. \end{gathered} \tag{18}$$

Существование интегралов следует из условия 1 теоремы 1 и того, что $s \in W_2^1(0,T)$.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{gathered} -\int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) u_t^m \; dx = \int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x^m\right) u_{tx}^m \; dx - \varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right) u_t^m(s(t),t) + \varphi\left(u_x^m(0,t)\right) u_t^m(0,t) = \\ = \tfrac{d}{dt} \int\limits_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx + s'(t)\left(\varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right) u_x^m(s(t),t) - \Phi\left(u_x^m(s(t),t)\right)\right). \end{gathered}$$

Последнее слагаемое в правой части последнего равенства неотрицательно, потому что $s'(t)\left(\varphi(\xi)\xi - \Phi(\xi)\right) \geq 0, \; \forall \; \xi, \; t, \; s'(t) \geq 0$.

Оценим правую часть в (18), учитывая (7), (13)–(16).

$$-\frac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)} u_t^m x u_x^m\ dx \le s'(t)\sigma_1^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}(u_t^m)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_t^m\ dx \le \sigma_1^{\frac{1}{2}} c_a\left(\int\limits_0^{s(t)}(u_t^m)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int\limits_0^{s(t)} b u^m u_t^m\ dx \le \sigma_2 c_b s^{\frac{1}{2}}(T)\left(\int\limits_0^{s(t)}(u_t^m)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) x u_x^m\ dx \le s'(t)\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_{xx}^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)} a x\left(u_x^m\right)^2\ dx \le \sigma_1 c_a s'(t),\ \frac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)} b x u^m u_x^m dx \le \sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}} s'(t) s^{\frac{1}{2}}(T) c_b.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2\ dx + \frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx \le$$
$$\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2\ dx + \frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx + s'(t)\left(\varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right)u_x^m(s(t),t) - \Phi\left(u_x^m(s(t),t)\right)\right) \le$$
$$\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}} s'(t) + \sigma_1^{\frac{1}{2}} c_a + \sigma_2 c_b s^{\frac{1}{2}}(T)\right)\left(\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+s'(t)\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_{xx}^m\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sigma_1 c_a + \sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}(T) c_b\right)s'(t). \tag{19}$$

Обозначим

$$\beta_1 = \sqrt{T}\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}} c_a + \sigma_2 c_b s^{\frac{1}{2}}(T)\right), \beta_2 = \left(\sigma_1 c_a + \sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}(T) c_b\right)\left(s(T)-1\right).$$

Интегрируя (19) по t, применив неравенство Гельдера и (16), получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dx d\tau + \int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx \le \int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx +$$
$$+\left(\beta_1 + \sigma_1^{\frac{1}{2}}\|s'(t)\|_{L_2(0,t)}\right)\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2 dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \tag{20}$$
$$+\sigma_4^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^t (s'(\tau))^2\int\limits_0^{s(\tau)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2 dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \beta_2.$$

Применим условие 3 Теоремы 1 и используем (13) к предпоследнему слагаемому правой части (20):

$$\int\limits_0^{s(\tau)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2 dx \le c_5\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx + c_6\sigma_1 + c_7 s(T).$$

Обозначим $\beta_3 = c_6\sigma_1 + c_7 s(T)$. Тогда (20) примет вид

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dxd\tau + \int\limits_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx \le \int\limits_0^1 \Phi\left(u_x^m(x,0)\right) dx +$$
$$+\left(\beta_1 + \sigma_1^{\frac{1}{2}} \|s'\|_{L_2(0,T)}\right) \left(\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2\, dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+\sigma_4^{\frac{1}{2}} \left(c_5 \int\limits_0^t (s'(\tau))^2 \left(\int\limits_0^{s(\tau)} \Phi(u_x^m)dx\right) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\sigma_4}\sqrt{\beta_3}\|s'\|_{L_2(0,T)} + \beta_2.$$

Добавив во второй множитель второго слагаемого правой части последнего неравенства величину $\int\limits_0^{s(\tau)} \Phi(u_x^m)dx$, а в предшествующее предпоследнему слагаемому в правой части – интеграл $\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dxd\tau$, получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dxd\tau + \int\limits_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx \le \int\limits_0^1 \Phi\left(u_x^m(x,0)\right) dx +$$
$$+\left(\beta_1 + \sigma_1^{\frac{1}{2}} \|s'\|_{L_2(0,T)}\right) \left(\int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2\, dxd\tau + \int\limits_0^{s(\tau)} \Phi(u_x^m)dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+\sigma_4^{\frac{1}{2}} \left(c_5 \int\limits_0^t (s'(\tau))^2 \left(\int\limits_0^{s(\tau)} \Phi(u_x^m)dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dxd\tau\right) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta_3}\sqrt{\sigma_4}\|s'\|_{L_2(0,T)} + \beta_2. \tag{21}$$

Обозначим

$$y(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dxd\tau + \int\limits_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx$$

и $Y(t) = \max_{0 \le r \le t} y(r)$, тогда (21) примет вид

$$y(t) \le Y(t) \le$$
$$\int\limits_0^1 \Phi\left(u_x^m(x,0)\right) dx + \left(\beta_1 + \sigma_1^{\frac{1}{2}} \|s'\|_{L_2(0,T)} + \sigma_4^{\frac{1}{2}} \sqrt{c_5} \|s'\|_{L_2(0,T)}\right) (Y(t))^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sqrt{\beta_3}\sqrt{\sigma_4}\|s'\|_{L_2(0,T)} + \beta_2.$$

Для оценки $\int\limits_0^1 \Phi\left(u_x^m(x,0)\right) dx$ воспользуемся условием 2 Теоремы 1:

$$|\varphi(\xi)| \le (c_3 + c_4\xi^2)^{\frac{1}{p_1}} \le C_3 + C_4 \xi^{\frac{2}{p_1}}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство от 0 до $\xi > 0$ (при $\xi < 0$ оценка проводится аналогично):

$$\left|\int\limits_0^\xi \varphi(\eta)d\eta\right| \le \int\limits_0^\xi |\varphi(\eta)|\, d\eta \le \int\limits_0^\xi \left(C_3 + C_4|\eta|^{\frac{2}{p_1}}\right) d\eta.$$

Получим $\Phi(\xi) \le C_3|\xi| + \overline{C}_4|\xi|^{\frac{2}{p_1}+1}$.

Пусть $\xi = u^m(x,0)$, тогда $\Phi(u^m(x,0)) \le C_3|u^m(x,0)| + \overline{C}_4|u^m(x,0)|^{\frac{2}{p_1}+1}$.

Проинтегрируем последнее неравенство по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 \Phi(u^m(x,0))dx \le C_3 \int_0^1 |u^m(x,0)|dx + \overline{C}_4 \int_0^1 |u^m(x,0)|^{\frac{2}{p_1}+1}dx$$

По построению $u^m(x,0) \to u_0(x)$ в $\widetilde{W}_2^1 \bigcap W^1_{\frac{2}{p_1}+1}$, $u_x^m(x,0) \to u_{0x}$ в $L_{\frac{2}{p_1}+1}(0,1) \bigcap L_2(0,1)$, $p_1 > 1$, тогда

$$\int_0^1 \Phi(u^m(x,0))dx \le \sigma. \tag{22}$$

Теперь можно показать, что

$$0 \le Y(t) \le \beta_4, \tag{23}$$

где β_4 не зависит от m.

Тогда из (22),(23), получим равномерно по m

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} (u_t^m)^2 \ dx d\tau + \int_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx \le \beta_5, \text{ где } \beta_5 \text{ не зависит от } m.$$

Взяв $t = T$, получим следующую равномерную по m оценку

$$\|u_t^m\|_{L_2(Q_s)} \le \beta_5. \tag{24}$$

6. Об одной теореме компактности

Для обоснования предельного перехода в интегральном тождестве (8), определяющем u^m, понадобится одна теорема компактности, доказанная в [7, теорема 1].

В применении к нашей задаче в [7, теорема 1] в качестве B_1^t выберем пространства $L_2(0, s(t))$, а в качестве B^t – пространства функций из $W_p^1(0, s(t))$, $1 \le p < 2$, с нормой $\|u\|_{B^t} = \left(\int_0^{s(t)} (|u_x|^p + |u|^p)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Монотонность $s(t)$ дает $B_1^{t_1} \subseteq B_1^{t_2}$, $B^{t_1} \subseteq B^{t_2}$, $t_1 > t_2$.

Кроме того, важную роль играет величина $M_t(u)$, $u = u^m(x,t)$, которую возьмем в виде

$$M_t(u) = \int_0^{s(t)} \left((u_{xx}^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2\right) dx = \|u^m\|^2_{W_2^2(0,s(t))}.$$

Обозначим множество $S_\alpha^t = \left\{\theta(x) \in \widetilde{W}_2^1(0, s(t)) : M_t(\theta) \le \alpha\right\}$. Очевидно, что при заданных числах α, t множество функций S_α^t относительно компактно в $B^t = W_p^1(0, s(t))$, $p < 2$.

Также определим множества функций F, F_1, необходимые для применения результата о компактности [7, теорема1]:

$$F_1 = \left\{ u(t) : \forall t \ u(t) \in B^t \quad vraimax\|u(t)\|_{B^t} \le L_1, \ \int_0^T M_t(u)dt \le L_2 \right\},$$

$$F = \left\{ u(t) : u(t) \in F_1, \ \int_0^T \|u_t(t)\|^2_{B_1^t} dt \le L_3 \right\}.$$

В качестве элементов $F,\ F_1$ достаточно взять множество $\{u^m\}_{m=0}^{\infty}$.

Для использования указанной теоремы необходимо доказать равностепенную непрерывность норм в B^t по параметру t на множестве F_1, то есть доказать существование такой функции $\eta(t_1,t_2)$, что для всех пар элементов $u^{m_1},\ u^{m_2}\in F_1$ и всех их разностей $U=u^{m_1}-u^{m_2}$ для $t_1\geq t_2$ выполняется неравенство $|\|U(t_1)\|_{B^{t_2}}-\|U(t_1)\|_{B^{t_1}}|\leq \eta(t_1,t_2)\to 0$ при $t_1-t_2\to 0$. Здесь $\eta(t_1,t_2)$ не зависит от $u^{m_1},\ u^{m_2}$ из F_1. Действительно, из неравенств $\left|a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{p}}\right|\leq c(p)|a-b|^{\frac{1}{p}}$, $|a+b|^{\frac{1}{p}}\leq c_1(p)|a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}}|$, имеем, взяв $p\in(1,2)$

$$
\begin{gathered}
|\|U(t_1)\|_{B^{t_2}}-\|U(t_1)\|_{B^{t_1}}|=\\
=\left|\left(\int\limits_0^{s(t_2)}(|U_x(t_1)|^p+|U(t_1)|^p)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int\limits_0^{s(t_1)}(|U_x(t_1)|^p+|U(t_1)|^p)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right|\leq\\
\leq c(p)\left|\int\limits_0^{s(t_2)}(|U_x(t_1)|^p+|U(t_1)|^p)\,dx-\int\limits_0^{s(t_1)}(|U_x(t_1)|^p+|U(t_1)|^p)\,dx\right|^{\frac{1}{p}}\leq\\
\leq c(p)\left|\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)}|U_x(t_1)|^p\,dx+\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)}|U(t_1)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}\leq\\
\leq c(p)c_1(p)\left(\left|\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)}|U_x(t_1)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}+\left|\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)}|U(t_1)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}\right)\leq\\
\leq C(p)\left(\left|\left(\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)}|U_x(t_1)|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}}|s(t_2)-s(t_1)|^{\frac{1}{\left(\frac{2}{p}\right)'}}\right|^{\frac{1}{p}}+2\sigma_2|s(t_2)-s(t_1)|^{\frac{1}{p}}\right)\leq\\
\leq C(p)\left(2\sigma_1^{\frac{1}{2}}\left|\int\limits_0^T(s'(\tau))^2d\tau\right|^{\frac{1}{2p\left(\frac{2}{p}\right)'}}|t_2-t_1|^{\frac{1}{2p\left(\frac{2}{p}\right)'}}+2\sigma_2\left|\int\limits_0^T(s'(\tau))^2d\tau\right|^{\frac{1}{2p}}|t_2-t_1|^{\frac{1}{2p}}\right)\to 0
\end{gathered}
$$

равномерно по m при $t_1-t_2\to 0$.

Следовательно, на множестве F_1 семейство элементов $\{\|U\|_{B^t},m_1,m_2\in N\}$ равностепенно непрерывно по t.

Таким образом, условия [7, теорема 1] выполнены, следовательно, есть сходимость некоторой подпоследовательности, которую снова обозначим через $\{u^m\}$:

$$u_x^m\to u_x,\ \text{в } L_p(0,T;L_p(0,s(t))),\ 1\leq p<2 \text{ и п.в. в } Q_s. \tag{25}$$

Тогда в силу непрерывности $\varphi(\xi)$, делаем вывод о том, что $\varphi(u_x^m)\to\varphi(u_x)$ почти всюду в Q_s. Кроме того, из условия 2 Теоремы 1 и (14) $\int\limits_{Q_s}|\varphi(u_x^m)|^{p_1}dQ_s\leq s(T)T(c_3+c_4\sigma_1)$, тогда по [8, лемма 1.3],[9]

$$\varphi(u_x^m)\to\varphi(u_x) \text{ слабо в } L_{p_1}(Q_s). \tag{26}$$

Из $\|u_t^m\|_{L_2(Q_S)}\leq\beta_5$, следует, что $u_t^{m_k}\to q$ слабо в $L_2(Q_s)$, где $\{u_t^{m_k}\}$ некоторая подпоследовательность $\{u_t^m\}$.

Для последней $\|u^m\|_{L_2(Q_S)}\leq\sigma_2\sqrt{\mu(Q_s)}$. Выделяя, если необходимо, еще одну подпоследовательность, можем считать, что

$$u^{m_k}\to u \text{ слабо в } L_2(Q_s) \tag{27}$$

Значит, $q=u_t$. Таким образом,

$$u_t^{m_k}\to u_t \text{ слабо в } L_2(Q_s). \tag{28}$$

При этом для u^{m_k} выполнено (25),(26). Вводя переобозначения, считаем, что (25)–(28) выполнены для u^m.

Кроме того, $u_x^m \to u_x$ $\star$-слабо в $L_\infty(0,T;L_2(0,s(t)))$, слабо в $L_2(Q_s)$ и $u_{xx}^m \to u_{xx}$ слабо в $L_2(Q_s)$. Поэтому $u \in L_\infty(0,T;W_2^1(0,s(t))) \cap L_2(0,T;W_2^2(0,s(t)))$.

7. Предельный переход по m в уравнении

Пусть $b_i(t), i = 0,1,2,...$, непрерывны на $[0,T]$ и образуют полную систему в $L_2[0,T]$. Умножая все члены (8) на $b_i(t)$, суммируя по j,i от 0 до $M, M \le m$ и интегрируя по t, получим для $F_M(x,t) = \sum\limits_{i,j=0}^{M} b_i(t)\omega_j(x,t)$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} u_t^m F_M\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x^m\right) F_{Mx}\,dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} au_x^m F_M\,dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} bu^m F_M\,dxdt=0,\ M\le m.$$

Применяя (25)–(28) к последнему уравнению, получим $\left(F_{Mx}\in C(\overline{Q}_s)\subset (L_{p_1}(Q_s))^*=L_{p_1'}(Q_s)\right)$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} u_t F_M\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x\right) F_{Mx}\,dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} au_x F_M\ dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} buF_M\,dxdt=0,\ M\le m.$$

Так как $\{\omega_j\}$ – ортогональный базис в $L_2(0,s(t))$ и в $\widetilde{W}_2^1(0,s(t)),\ \forall t\in[0,T]$ и $b_i(t)$ – полная система в $L_2[0,T]$, то по [1, теорема 2], получим плотность F_M в $L_2(0,T;\widetilde{W}_2^1(0,s(t)))$. Поэтому

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} u_t F\ dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x\right) F_x\,dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} au_x F\,dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} buF\,dxdt=0, \tag{29}$$

для любой гладкой функции $F\in C(\overline{Q}_s)$, такой, что $F_x\in C(\overline{Q}_s),\ F(s(t),t)=0$. Из этого равенства следует, что существует $\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right)\in L_2(Q_s)$ и уравнение (2) выполнено почти всюду в Q_s.

Так как $u, u_t\in L_2(0,T;L_2(0,1))$, то по теореме о следах [8, лемма 1.2] $u(x,0)\in L_2(0,1)$. По той же теореме $u_x|_{x=0}\in L_2(0,T)$, так как из (15) следует, что существует $u_{xx}\in L_2(Q_s)$.

Из вложения $\left(W_2^1(Q_s)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(0,s(t)))\right)\subset C^{\frac{1}{4}}(\overline{Q}_s)$ следует выполнение условий (3),(5) в обычном смысле.

Нетрудно обосновать выполнение условия (4) для построенного решения, так как $u_x^m\ |_{x=0}\ =\ 0$. То же касается и единственности решения в этом классе.

Заметим, что условие 2 теоремы 1 ограничивает асимптотический рост $\varphi(\xi)$ вторым порядком. В следующей теореме допускается рост $\varphi(\xi)$ любого порядка.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, но вместо условия 2 выполнено условие*

$2'$. $k_1|\varphi(\xi)|^r-k_2\xi^2-k_3\le\Phi(\xi)\le k_4+k_5|\xi|^s$, *где* $k_1>0,\ k_4\ge0,\ k_5\ge0,\ r>1,\ s\ge1,$
и вместо условия 4 выполнено условие

$4'$. *функция* $u_0=u_0(x)$ *удовлетворяет (6) и* $u_{0x}\in L_s(0,1)$.

Тогда существует и притом единственное решение задачи (2)–(5) из того же класса, что и в теореме 1, за исключением $\varphi(u_x)$: $\varphi(u_x)\in L_r(Q_s)$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. Но при получении оценки, аналогичной (22), используется правая часть неравенства $2'$ и $4'$. При выводе оценки, аналогичной (26), используем левую часть неравенства $2'$.

Список литературы

[1] Н. Е. Истомина, “О разрешимости задачи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения в области с нецилиндрической границей”, *Дальневост. матем. журн.*, **1**:1, (2000), 63–73.

[2] П. В. Виноградова, А. Г. Зарубин, “О методе Галеркина для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области”, *Дальневост. матем. журн.*, **3**:1, (2002), 3–17.

[3] J. Ferreira, N.A. Lar’kin, “Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical domains”, *Portugaliae mathematica*, **53**:4, (1996), 381-395.

[4] С. Н. Глазатов, “О некоторых задачах для дважды нелинейных параболических уравнений и уравнений переменного типа”, *Siberian Adv. Math.*, **11**:1, (2001), 45–83.

[5] Е. А. Бадерко, “О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами”, Дифференциальные уравнения, **12**, № 10, 1976, 1780–1792.

[6] Ю. А. Дубинский, “Нелинейные эллиптические и параболические уравнения”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., **9**, 1976, 1–130.

[7] А. Г. Подгаев, “Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств”, *Siberian Math. J.*, **34**:2, (1993), 320–329.

[8] Ж.Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 587 с.

[9] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 сентября 2011 г.

Lisenkov K. V. Projection method for the solution of a problem for a quasilinear parabolic equation in a noncylindrical domain with W_2^1 boundary . Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 48–59.

ABSTRACT

This article investigates the boundary value problem for the quasilinear parabolic equation in noncylindrical domain. The existence and uniqueness are proved. The approximate solution built according to projection method. We use methods of compactness for functions from Banach space scale.

Key words: *noncylindrical domain, quasilinear parabolic equation, compactness theorem, existence theorem, projection method.*