УДК 517.95
MSC2010 35J25, 35J60, 35P30

© Д. К. Потапов[1]

# О числе решений для одного класса уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью

Рассматривается вопрос о существовании решений в задаче Дирихле для уравнения Лапласа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Вариационным методом устанавливается теорема о числе решений для исследуемой задачи. Приведен пример такой разрывной нелинейности, которая удовлетворяет условиям теоремы, и при этом существует единственное полуправильное решение рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: *задача Дирихле, уравнение Лапласа, спектральный параметр, разрывная нелинейность, вариационный метод, число решений.*

В работах [1]–[3] получены теоремы о существовании луча положительных собственных значений и об оценке сверху величины бифуркационного параметра для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными по фазовой переменной нелинейностями. Кроме того, в работах [1], [2] установлены достаточные условия существования нетривиального полуправильного решения [4] для таких задач. В данной работе рассматривается вопрос о числе решений в задаче Дирихле для уравнения Лапласа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. Устанавливается существование по крайней мере одного ненулевого полуправильного решения, поскольку при изучении ряда прикладных задач интерес представляют именно такие решения (например, в задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика [5]).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей $\Gamma$ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$ рассматривается проблема существования решений нижеследующей задачи Дирихле:

$$-\Delta u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь $\Delta$ – оператор Лапласа, $\lambda$ – положительный параметр, называемый спектральным, функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измеримая, и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ $\forall u \in \mathbf{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$ и $|g(x,u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, фиксирована.

Пусть $X = \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1(\Omega)$. Краевой задаче (1)–(2) сопоставим функционал $J^\lambda(u)$, заданный на $X$, следующим образом: $J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega u_{x_i}^2 dx, \quad J_2(u) = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds.$$

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 35. Электронная почта: `potapov@apmath.spbu.ru`

**Определение 1.** *Сильным решением* задачи (1)–(2) называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1) и граничному условию (2).

**Определение 2.** *Полуправильным решением* задачи (1)–(2) называется такое сильное ее решение $u$, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

**Определение 3.** *Прыгающим разрывом* функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется такое $u \in \mathbf{R}$, что $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

**Определение 4.** Локально липшицева функция $f : E \to \mathbf{R}$ ($E$ – вещественное банахово пространство) удовлетворяет *(PS)-условию*, если любая последовательность $(x_n) \subset E$, для которой множество значений $(f(x_n))$ ограничено и $m(x_n) = \inf\limits_{x^* \in \partial f(x_n)} ||x^*|| \to 0$ при $n \to \infty$ содержит сходящуюся подпоследовательность, где $\partial f(x)$ – обобщенный градиент Кларка для $f$ в точке $x$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*
*1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет разрывы, причем только прыгающие, $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, фиксирована;*
*2) существует $u_0 \in X$ такой, что $J_2(u_0) > 0$.*
*Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (1)–(2) имеет по крайней мере три сильных решения, причем по крайней мере одно из ненулевых решений является полуправильным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [1] при выполнении условий теоремы существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ выполняется неравенство $\inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$. Кроме того, найдется $u_\lambda \in X$, для которого $J^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$, и любое такое $u_\lambda$ является ненулевым полуправильным решением задачи (1)–(2). Таким образом, найдется и некоторая константа $\lambda_* > 0$ такая, что для каждого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере одно ненулевое полуправильное решение $u_\lambda$ задачи (1)–(2). Наличие второго, тривиального, решения задачи (1)–(2) обусловливается условием 1) теоремы ($g(x, 0) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$). При $\lambda > \lambda_*$ задача (1)–(2) имеет по крайней мере еще одно нетривиальное решение $v_\lambda$, которое может быть найдено с помощью теоремы о горном перевале [6]. Функция $J^\lambda$ локально липшицева на $X$, что показывается стандартным способом, при этом используется условие 1) теоремы ($|g(x, u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$). В силу выполнения (PS)-условия (теорема 4.5 из работы [6]), примененного к уравнениям эллиптического типа с разрывными нелинейностями, функционал $J^\lambda$ удовлетворяет (PS)-условию для любого $\lambda > 0$. Значит, функционал $J^\lambda$ удовлетворяет условиям теоремы о горном перевале [6], следовательно, он имеет критическую точку $v_\lambda \in X$ такую, что $J^\lambda(v_\lambda) > 0$ ($J^\lambda(v_\lambda) = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \sup\limits_{t \in [0,1]} J^\lambda(\gamma(t))$, где $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$). Итак, в условиях теоремы функционал $J^\lambda$ имеет по крайней мере три различные критические точки. Таким образом, в условиях теоремы для любого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере три решения задачи (1)–(2) (нулевое, $u_\lambda \neq 0$, $v_\lambda \neq 0$). Отметим, что решения $u_\lambda$ и $v_\lambda$ различны, поскольку $J^\lambda(u_\lambda) < 0$, а $J^\lambda(v_\lambda) > 0$. В силу того, что $|g(x, u)| \le a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, из теорем о регулярности решений основных краевых задач для равномерно эллиптических линейных уравнений [7] следует, что слабое (обобщенное) решение задачи (1)–(2) является сильным ее решением. Поэтому при $\lambda > \lambda_*$ задача (1)–(2) имеет по крайней мере три сильных решения, причем по крайней мере одно из ненулевых решений $u_\lambda$ является полуправильным. Теорема доказана.

В заключение приведем пример такой функции $g(x, u)$, удовлетворяющей условиям теоремы, для которой существует единственное полуправильное решение задачи (1)–(2). Рассмотрим задачу Дирихле (1)–(2). Пусть в уравнении (1) нелинейность $g(x, u) = a(x) \cdot \chi(u)$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, $a(x) > 0$, а $\chi(u)$ – разрывная функция Хевисайда. Функция $g(x, u)$ удовлетворяет условиям теоремы с единственным разрывом $u = 0$ – “прыгающим”. При $\lambda > 0$ верно неравенство $\lambda g \ge 0$ и, в силу принципа сравнения, решение $u(x)$ задачи (1)–(2) неотрицательно. Если это решение полуправильно, то $u(x) > 0$ почти всюду на $\Omega$ и, следовательно, $g(x, u(x)) = a(x)$. Однако тогда решение $u(x)$ однозначно определено как слабое решение $u \in X$ задачи $-\Delta u = \lambda a(x)$ с нулевым граничным условием Дирихле и, значит, полуправильное решение единственно. Отметим, что нулевое решение в данном примере не является полуправильным. Если отбросить условие полуправильности, то, возможно, есть ненулевые решения, которые неотрицательны и обращаются в нуль на некотором множестве ненулевой меры. Такие решения допустимы (см., например, работу [8]).

## Список литературы


[1] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, "О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами", *Сиб. матем. журн.*, **42**:4, (2001), 911–919.

[2] Д. К. Потапов, "О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае", *Вестн. С.-Петерб. ун-та*, Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. Вып. 4, 2004, 125–132.

[3] Д. К. Потапов, "Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями", *Дифференц. уравнения*, **44**:5, (2008), 715–716.

[4] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, "Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями", *Докл. АН СССР*, **226**:3, (1976), 506–509.

[5] М. А. Гольдштик, "Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости", *Докл. АН СССР*, **147**:6, (1962), 1310–1313.

[6] K. C. Chang, "Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations", *J. Math. Anal. and Appl.*, **80**:1, (1981), 102–129.

[7] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы*, Изд-во иностр. лит., М., 1962, 208.

[8] И. И. Вайнштейн, "Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М. А. Гольдштика", *Журн. СФУ*, Сер. Матем. и физ. Вып. 3, **4**, 2011, 320–331.



Представлено в Дальневосточный математический журнал 28 ноября 2011 г.


---


*Potapov D. K.* On number of solutions for one class of elliptic equations with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 86–88.



ABSTRACT

We consider the question of existence of Dirichlet's problem solution for the Laplace equation with a spectral parameter and discontinuous on a phase variable nonlinearity. Using the variational method, we prove a theorem about a number of solutions. We result an example of discontinuous nonlinearity that satisfies to conditions of the theorem for which there is unique semiregular solution of this boundary problem.



Key words: *Dirichlet's problem, the Laplace equation, spectral parameter, discontinuous nonlinearity, variational method, number of solutions.*