УДК 515.145.23, 515.145.25
MSC2010 55R20

© Ю. М. Устиновский[1]

О почти свободных действиях тора и гипотезе Хоррокса

Мы рассматриваем модель когомологий пространства X с действием тора, представляющую собой комплекс Кошуля эквивариантных когомологий X. На основе изучения гомологических свойств модулей над кольцом многочленов мы получаем новые оценки гомологического ранга (полной размерности рациональных когомологий) пространства X. В частности, мы получаем простое доказательство гипотезы о торическом ранге для действующего тора размерности $\leqslant 4$.

Ключевые слова: *почти свободные действия тора, эквивариантные когомологии, комплекс Кошуля, момент-угол-комплекс, биградуированные числа Бетти.*

Введение

Изучение действий групп на различных топологических пространствах является классической и обширной областью алгебраической топологии. В последние десятилетия особый интерес к пространствам с действием торов T^m обусловлен взаимным проникновением идей и методов большого числа различных разделов математики: комбинаторики, гомологической и коммутативной алгебры, эквивариантной топологии. В настоящей работе мы уделим внимание взаимосвязям двух известных проблем эквивариантной топологии и коммутативной алгебры: гипотезе Гальперина о торическом ранге и гипотезе Бухсбаума – Айзенбада – Хоррокса о размерностях некоторых Tor-модулей над кольцом многочленов $S(m)$.

Первая часть заметки посвящена общей топологической гипотезе о торическом ранге. Она была сформулирована Гальпериным [11] для действия торов T^m. Сама гипотеза дает нижнюю оценку ранга кольца когомологий пространства с почти свободным действием тора T^m (напомним, что действие группы G на пространстве X называется *почти свободным*, если стабилизатор $G_x \subset G$ каждой точки $x \in X$ конечен).

Гипотеза (О торическом ранге). *Пусть на конечномерном CW-комплексе X почти свободно действует тор T^m, тогда*

$$\mathrm{hrk}(X, \mathbb{Q}) := \sum_i \dim H^i(X, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m.$$

Аналогичная гипотеза для свободных действий p-торов $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$ на произведениях сфер была сформулирована Коннером в 1957 г. [5]. На данный момент (см. [15]) полностью гипотеза доказана лишь при $m \leqslant 3$ для торов и 2-торов и при $m \leqslant 2$ для p-торов (p — нечетное). Однако имеется огромное количество примеров семейств многообразий с действием тора, для которых гипотеза выполняется. Так, известно [9, 7.3.3], что она верна для однородных

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991, Москва, ул. Губкина, 8. Электронная почта: `yuraust@gmail.com`

пространств компактных групп Ли, для симплектических действий на симплектических многообразиях, для многообразий, чьи когомологии удовлетворяют сильной теореме Лефшеца и многих других.

В разделе 1 при помощи спектральной последовательности Лере – Серра расслоения $\pi\colon X \times ET^m \to X_{T^m}$ мы построим удобную модель для вычисления групп когомологий $H^*(X,\mathbb{Q})$ произвольного пространства с действием тора T^m. Оказывается, что в случае почти свободного действия на конечномерных CW-комплексах наша модель обладает некоторыми важными алгебраическими свойствами.

Объекты, возникающие в первой части, естественным образом приводят нас к хорошо известной в коммутативной алгебре гипотезе Бухсбаума – Айзенбада и Хоррокса [13, prob. 24]. После первоначальной формулировки Бухсбаумом и Айзенбадом в [1, p. 453] утверждение гипотезы много раз обобщалось. Следуя [13, prob. 24], мы будем называть ее гипотезой Хоррокса. Поскольку исходная мотивировка нашего исследования лежит в области эквивариантной топологии, мы приведем тот вариант гипотезы, который непосредственным образом связан с проблемой торического ранга.

Рассмотрим кольцо многочленов $S(m) = \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$ с “топологической” градуировкой $\deg v_i = 2$.

Гипотеза (Гипотеза Хоррокса). *Пусть M — конечномерный над $\mathbb{Q}$ градуированный модуль над кольцом многочленов $S(m)$, тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Отметим, что часто гипотеза формулируется не для модулей над градуированным кольцом многочленов $\mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$, а для модулей над произвольным локальным кольцом. Имеется большое количество ярких результатов, связанных с гипотезой Хоррокса. Так, в работе Эванса и Гриффитса [7] гипотеза доказана для модулей M, являющихся прямой суммой подмодулей вида $\Bbbk[v_1, \ldots, v_m]/I$, где идеал I порожден мономами, в частности, такие модули M допускают $\mathbb{Z}^m$-мультиградуировку. При некоторых чисто алгебраических ограничениях на модуль M гипотеза доказана в [8].

В [7] указано (без доказательства), что гипотеза Хоррокса верна для $m \leqslant 4$. В разделе 2 мы подробно обсудим связь гипотезы Хоррокса с гипотезой о торическом ранге и дадим простое доказательство обеих гипотез для $m \leqslant 4$, тем самым усиливая результат [15].

В разделе 3, в качестве иллюстрации, мы изучим выполнение гипотез для важных классов многообразий и колец, возникающих в торической топологии и комбинаторной коммутативной алгебре. А именно проверим их справедливость для момент-угол-комплексов и колец Стенли – Райснера. Как следствие мы получим чисто комбинаторную интерпретацию доказанных неравенств в терминах комбинаторных инвариантов соответствующих симплициальных комплексов — биградуированных чисел Бетти $\beta^{-i,2j}(K)$ (см. [2]). Наконец, мы сформулируем проблему о биградуировке в когомологиях пространств с действием тора и, в частности, момент-угол-комплексов.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также Микие Масуде за полезные обсуждения.

1. Главные T^m-расслоения

Пусть X — CW комплекс с действием m-мерного тора T^m. Нашей ближайшей целью является построение удобной модели для вычисления когомологий пространства X.

Лемма 1.1. *Набор $(X \times ET^m, X_{T^m}, T^m, \pi)$, где $X_{T^m} = X \times_{T^m} ET^m$ — конструкция Бореля, $\pi\colon X \times ET^m \to X_{T^m}$ — проекция на пространство орбит, является локально-тривиальным, гомологически простым расслоением.*

Доказательство. Так как π — проекция на пространство орбит свободного действия компактной группы, то автоматически набор $(X \times ET^m, X_{T^m}, T^m, \pi)$ оказывается главным T^m-расслоением.

Докажем теперь гомологическую простоту этого расслоения. Выберем произвольную петлю $\gamma\colon S^1 \to X_{T^m}$ и рассмотрим расслоение $\gamma^*\pi$ над S^1. Главное T^m-расслоение над произвольным пространством Y классифицируется некоторым элементом из группы $H^2(Y, \mathbb{Z}^m)$. Так как группа $H^2(S^1, \mathbb{Z}^m)$ нулевая, то расслоение $\gamma^*\pi$ тривиально и действие всякого элемента $[\gamma] \in \pi_1(X_{T^m})$ на когомологиях слоя тоже тривиально. $\square$

Лемма 1.2 ([14, Th. 1.6]). *Спектральная последовательность Лере – Серра расслоения $(X \times ET^m, X_{T^m}, T^m, \pi)$, вычисляющая $H^*(X, \mathbb{Q})$, вырождается в члене E_3, и дифференциал d_2 определяется характеристическим классом $\tau \in H^2(X_{T^m}, \mathbb{Z}^m)$ главного T^m-расслоения $X \times ET^m \to X_{T^m}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.1 спектральная последовательность Лере – Серра (E_i, d_i) расслоения $T^m \to X \times ET^m \to X_{T^m}$ сходится к когомологиям X. Рассмотрим эту последовательность с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Поскольку дифференциал d_2 спектральной последовательности удовлетворяет правилу Лейбница, то достаточно задать его на мультипликативных образующих $E_2 = H^*(T^m, \mathbb{Q}) \otimes H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q})$. По соображениями размерности $d_2|_{E^{*,0}} = 0$, поэтому осталось найти $d_2\colon H^1(T^m, \mathbb{Q}) \to H^2(X_{T^m}, \mathbb{Q})$. Легко проверить, что для универсального расслоения $ET^m \to BT^m$ дифференциал d_2 является изоморфизмом. Поэтому, в силу естественности спектральной последовательности, $d_2\colon H^1(T^m, \mathbb{Q}) \to H^2(X_{T^m}, \mathbb{Q})$ совпадает с $i^*\colon H^2(BT^m, \mathbb{Q}) \to H^2(X_{T^m}, \mathbb{Q})$, где $i\colon X_{T^m} \to BT^m$ — классифицирующее отображение. Осталось заметить, что характеристический класс $\tau \in H^2(X_{T^m}, \mathbb{Z}^m)$ как раз соответствует отображению $i^*\colon H^2(BT^m, \mathbb{Z}) \to H^2(X_{T^m}, \mathbb{Z})$. Итак, $E_3 = H\big[H^*(T^m, \mathbb{Q}) \otimes H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q}), d_2\big]$.

Докажем теперь, что все старшие дифференциалы тривиальны. Для тора T^m алгебра когомологий $H^*(T^m, \mathbb{Q})$ есть внешняя алгебра $\Lambda(u_1, \ldots, u_m)$. Пусть $(\mathcal{M}(X_{T^m}), \partial)$ — минимальная модель пространства X_{T^m}, вычисляющая его когомологии. Тогда, согласно [10, Prop. 15.15], моделью алгебры когомологий пространства X является дифференциальная алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{M}(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$ с дифференциалом d, совпадающим с ∂ на $\mathcal{M}(X_{T^m})$ и заданным на Λ^1 так, что отображение $d\colon \Lambda^1 \to \mathcal{M}^2(X_{T^m})$ реализует характеристический класс $\tau \otimes \mathbb{Q}$. Помимо обычной топологической градуировки в алгебре $\mathcal{A}$ имеется дополнительная гомологическая градуировка: $\deg u_i = -1, \deg v = 0$ при $v \in \mathcal{M}(X_{T^m})$. Рассмотрим спектральную последовательность (E'_i, d'_i), ассоциированную с этой градуировкой, или, точнее, с убывающей фильтрацией $F^i\mathcal{A} = \bigoplus_{k \geqslant -(m-i)} \mathcal{A}^k$. Поскольку дифференциал d в $\mathcal{A}$ повышает гомологическую градуировку не более, чем на 1, мы имеем $d'_i = 0, i \geqslant 2$. Дифференциал d'_0 в $E'_0 = \mathcal{M}(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$ совпадает с ∂, тем самым $E'_1 = H^*(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$. Дифференциал d'_1 совпадает с дифференциалом d_2 в члене E_2 спектральной последовательности Лере – Серра, поэтому имеет место цепочка изоморфизмов векторных пространств:

$$H^*(X) \simeq H\big[\mathcal{A}, d\big] \simeq E'_\infty \simeq E'_2 \simeq H\big[E'_1, d'_1\big] \simeq H\big[E_2, d_2\big] \simeq E_3.$$

Так как $E_\infty \simeq H^*(X)$, то все старшие дифференциалы $d_i, i \geqslant 3$ в спектральной последовательности E тривиальны, что и требовалось доказать. $\square$

Эта лемма позволяет построить аддитивную модель для когомологий пространств с действием тора, которую мы в дальнейшем будем использовать.

Следствие 1.3. *Следующие векторные пространства изоморфны:*

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big]. \tag{1}$$

Оказывается, что во многих случаях этот изоморфизм предоставляет мультипликативную модель пространств со свободным действием тора.

Предложение 1.4. *Пусть X — пространство с действием тора T^m. Если пространство X_{T^m} формально, то следующие алгебры изоморфны:*

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big]. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(X_{T^m})$ — снова минимальная модель пространства X_{T^m}. Так как пространство X_{T^m} формально, то существует квази-изоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}(X_{T^m}) \to H^*(X_{T^m},\mathbb{Q})$. Согласно теореме [10, Lemma 14.2] φ продолжается до квази-изоморфизма

$$\varphi \otimes \mathrm{id}\colon \big[\mathcal{M}(X_{T^m}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big] \to \big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big].$$

Тем самым, алгебра $H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m), d\big]$ изоморфна алгебре когомологий $H^*(X,\mathbb{Q})$, что и требовалось. □

Вопрос о мулитпликативности изоморфизма (1) в общем случае остается открытым.

В случае конечного CW-комплекса X и почти свободного действия когомологии конструкции Бореля X_{T^m} в модели (1) можно заменить на когомологии обычного факторпространства X/T^m:

Предложение 1.5. *Пусть на конечномерном CW-комплексе X задано почти свободное действие тора T^m, тогда имеет место аддитивная модель когомологий пространств X:*

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X/T^m,\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big]. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно изоморфизму (1)

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H\big[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d\big].$$

Поэтому для доказательства предложения достаточно установить изоморфизм алгебр когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ пространств $X_{T^m} = X \times_{T^m} ET^m$ и X/T^m. Рассмотрим для каждого n естественную проекцию на первый сомножитель:

$$f\colon Y_n := X \times_{T^m} (S^{2n+1})^m \to X/T^m.$$

Заметим, что слоем $f^{-1}(z)$ над точкой $z \in X/T^m$ является пространство $(S^{2n+1})^m/G_x$. Здесь $x \in X$ — произвольный прообраз точки z при проекции на пространство орбит, $G_x \subset T^m$ — стабилизатор точки $x \in X$. Так как $|G_x| < \infty$, то $H^i\big((S^{2n+1})^m/G_x,\mathbb{Q}\big) = 0$ при $2n > i > 0$, действительно, пространство $(S^{2n+1})^m/G_x$ — остов классифицирующего пространства конечной группы G_x. Согласно теореме Виеториса – Бегле [16, 9.15] отображение

$$f^*\colon H^r(X/T^m,\mathbb{Q}) \to H^r(Y_n,\mathbb{Q})$$

является изоморфизмом при $r < 2n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем:

$$H^*(X/T^m,\mathbb{Q}) \simeq H^*(X \times_{T^m} ET^m,\mathbb{Q}),$$

что и требовалось доказать. □

Особо отметим, что в условиях теоремы алгебра $H^*(X/T^m, \mathbb{Q})$ конечномерна. Этот факт будет играть дальше ключевую роль.

Замечание. В работе Пуппе [15], в которой гипотеза о торическом ранге доказана при $m \leqslant 3$, для анализа когомологий $H^*(X, \mathbb{Q})$ вместо расслоения $T^m \to X \times ET^m \to X_{T^m}$ использовалось расслоение из конструкции Бореля $X \to X \times_{T^m} ET^m \to BT^m$. Это же расслоение было использовано в [9, §7.3.2] для изучения минимальной модели пространства X.

2. Гипотеза Хоррокса

Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру $H^*(X/T^m, \mathbb{Q})$, а внешнюю алгебру $H^*(T^m, \mathbb{Q}) = \Lambda(u_1, \ldots, u_m)$ — через $\Lambda(m)$. Далее для модулей над алгеброй многочленов $S(m) = \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$ через $\dim$ мы будем обозначать размерность соответствующего векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Изоморфизм (3) позволяет свести исходную топологическую задачу оценки когомологического ранга пространства с почти свободным действием тора к чисто алгебраической задаче вычисления когомологий дифференциальной градуированной алгебры

$$[\mathcal{A} \otimes \Lambda(m), d].$$

Дифференциал d задан на компоненте Λ^1, равен 0 на $\mathcal{A}$ и продолжен до дифференцирования алгебры по правилу Лейбница. Отображение $d\colon \Lambda^1(m) \to \mathcal{A}^2$ естественным образом задает на алгебре $\mathcal{A}$ структуру модуля над кольцом многочленов $S(m) = \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]$. При топологической интерпретации это стандартная структура $H^*_{T^m}(pt, \mathbb{Q})$-модуля в эквивариантных когомологиях $H^*_{T^m}(X, \mathbb{Q}) = H^*(X_{T^m}, \mathbb{Q})$. Интересующая нас алгебра $[\mathcal{A} \otimes \Lambda(m), d]$ совпадает с резольвентой Кошуля для вычисления градуированного модуля $\operatorname{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A}, \mathbb{Q})$, в частности, $H[\mathcal{A} \otimes \Lambda(m), d] = \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A}, \mathbb{Q})$.

В связи с естественным возникновением модулей $\operatorname{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A}, \mathbb{Q})$ сформулируем гипотезу Хоррокса (также часто называемую гипотезой Бухсбаума – Айзенбада – Хоррокса), выдвинутую впервые в работах [1, p. 453], [13, Problem 24]. Данная формулировка не является наиболее общей, однако именно в такой общности она будет применена в исходной топологической задаче. Далее все модули над кольцом $S(m)$ и их морфизмы предполагаются градуированными.

Гипотеза. *Пусть M — модуль над кольцом многочленов $S(m)$, $\dim M < \infty$, тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Также часто формулируется ослабленный вариант гипотезы.

Гипотеза. *Пусть M — модуль над кольцом многочленов $S(m)$, $\dim M < \infty$, тогда*

$$\dim \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m. \tag{4}$$

Предложение 2.1. *Из слабого варианта гипотезы Хоррокса следует гипотеза о торическом ранге.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть действие $T^m\colon X$ удовлетворяет условиям гипотезы о торическом ранге. Тогда согласно (3) имеет место изоморфизм векторных пространств

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A}, \mathbb{Q}).$$

Пространство X — конечный CW-комплекс, поэтому пространство X/T^m также конечно, следовательно, $\dim \mathcal{A} < \infty$, тем самым, согласно слабой гипотезе Хоррокса (4)

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) = \dim \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(\mathcal{A}, \mathbb{Q}) \geqslant 2^m.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Ниже мы дадим доказательство двух неравенств гипотезы Хоррокса и применим их для получения оценок слабой гипотезы Хоррокса в нескольких частных случаях.

Лемма 2.2. *Пусть M — модуль над кольцом многочленов $S(m)$, $\dim M < \infty$, тогда*

а) $\dim \operatorname{Tor}^0_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1$,

б) $\dim \operatorname{Tor}^{-1}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant m$,

в) $\dim \operatorname{Tor}^{-(m-1)}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant m$,

г) $\dim \operatorname{Tor}^{-m}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 1$.

Доказательство. Первое неравенство очевидно, так как $\dim \operatorname{Tor}^0_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ есть в точности число образующих модуля M.

Докажем теперь второе неравенство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{I} \to \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \to M \to 0,$$

где $k = \dim \operatorname{Tor}^0_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$ — минимальное число образующих модуля M, F_i — свободные модули ранга 1, $\mathcal{I}$ — ядро естественной проекции. Лемма утверждает, что минимальное число образующих $\mathcal{I}$ не меньше m. Действительно, пусть $f_1, \dots, f_s \in \bigoplus_{i=1}^k F_i$ — образующие модуля $\mathcal{I}$, тогда $\varphi_1 = \operatorname{pr}_1(f_1), \dots, \varphi_s = \operatorname{pr}_1(f_s)$ порождают некоторый однородный идеал $\mathcal{J}$ в F_1, причем $\mathcal{J}$ собственный в силу минимальности k, $\dim F_1/\mathcal{J} \leqslant \dim M < \infty$.

Итак, задача свелась к оценке минимального числа однородных образующих идеала $\mathcal{J} \subsetneq S(m)$ такого, что $\dim S(m)/\mathcal{J} < \infty$. Согласно стандартному результату из коммутативной алгебры [12, Th. 7.2], размерность пересечения конических гиперповерхностей $\varphi_i(v_1, \dots, v_m) = 0$, $i = 1, \dots, s$ в $\mathbb{C}^m$ не меньше $m - s$, с другой стороны, $\operatorname{Spec}(S(m)/\mathcal{J}) \otimes \mathbb{C} = \{0\}$, так как все элементы положительной градуировки в $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{J}$ нильпотентны. Следовательно, $s \geqslant m$, что и требовалось доказать.

Для доказательства последних двух неравенств рассмотрим наряду с комплексом Кошуля $[M \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m), d]$, вычисляющим интересующие нас Tor-модули, двойственный комплекс $[M^\star \otimes \Lambda(\xi_1, \dots, \xi_m), \partial]$, где $M^\star = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(M, \mathbb{Q})$, $\xi_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Lambda^1(m), \mathbb{Q})$, а $\partial = d^*$. Это можно сделать, так как все векторные пространства, участвующие в комплексе Кошуля, конечномерны. Заметим, что $(M^\star \otimes \Lambda(\xi_1, \dots, \xi_m), \partial)$ является резольвентой для вычисления модулей $\operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M^\star, \mathbb{Q})$, поэтому, верно равенство

$$\operatorname{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) = \operatorname{Tor}^{-(m-i)}_{S(m)}(M^\star, \mathbb{Q}).$$

В частности, применив к модулю $M^\star$ уже доказанные неравенства для $i = m-1, m$, получим требуемые неравенства для модуля M. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть M – конечномерный модуль над кольцом многочленов $S(m)$, тогда*

а) $\dim \operatorname{Tor}^*_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant 5m - 4$ *в случае четного* $m \geqslant 4$,

б) $\dim \operatorname{Tor}^*(M, \mathbb{Q}) \geqslant 3m - 1$ *в случае нечетного* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 2.2 утверждает, что $\dim \mathrm{Tor}^m(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$, поэтому, согласно свойствам функтора Tor для всех $i = 0,\dots,m$, размерность $\dim \mathrm{Tor}^{-i}(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$, так как в противном случае свободная резольвента модуля M обрывается раньше, чем в члене m. Отсюда и из утверждений $\mathrm{Tor}^{-1}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant m$, $\mathrm{Tor}^{-(m-1)}_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant m$ следует, что

$$S_{odd} := \sum_{i=2k+1} \dim \mathrm{Tor}^i_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1 + m + \frac{m-3}{2}$$

для нечетного m и

$$S_{odd} \geqslant 2m + \frac{m-4}{2}$$

для четного m. С другой стороны, гомологическая эйлерова характеристика $\chi_h(\mathrm{Tor}^*_{S(m)}(M,\mathbb{Q})) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim \mathrm{Tor}^{-i}_{S(m)}(M,\mathbb{Q})$ равна 0:

$$\chi_h(\mathrm{Tor}^*_{S(m)}(M,\mathbb{Q})) = \chi_h(M \otimes \Lambda(u_1,\dots,u_m)) = 0.$$

Следовательно, $\dim \mathrm{Tor}^*_{S(m)}(M,\mathbb{Q}) = S_{odd} + S_{even} = 2S_{odd}$, где $S_{even} := \sum\limits_{i=2k} \dim \mathrm{Tor}^{-i}(M,\mathbb{Q})$. Отсюда вытекают требуемые неравенства. □

Согласно предложению 2.1 те же неравенства выполняются и для оценки ранга кольца когомологий с почти свободным действием m-мерного тора T^m.

Следствие 2.4. *Пусть тор T^m почти свободно действует на конечномерном пространстве X, тогда*

а) $\mathrm{hrk}(X,\mathbb{Q}) \geqslant 5m - 4$ *при четном* $m \geqslant 4$,

б) $\mathrm{hrk}(X,\mathbb{Q}) \geqslant 3m - 1$ *при нечетном* m.

Следствие 2.5. *Гипотеза о торическом ранге выполняется для* $m \leqslant 4$.

3. Кольца Стенли – Райснера и момент-угол-комплексы

Торическая топология предоставляет массу примеров, в которых гипотеза о торическом ранге и гипотеза Хоррокса получают новые интерпретации. В этой части для каждого симплициального комплекса K мы рассмотрим два важных объекта: это кольцо Стенли – Райснера $\mathbb{Q}[K]$ — ключевой инструмент изучения комбинаторики симплициальных комплексов методами коммутативной алгебры; и момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ — широкий класс пространств с естественным действием тора T^m. Мы изучим выполнение для них указанных гипотез и установим связь гипотез с различными комбинаторными задачами.

Определение 3.1. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. *Идеалом Стенли – Райснера* I_{SR} называется идеал в алгебре $\Bbbk[v_1,\dots,v_m]$, порожденный всеми мономами вида $v_{i_1}\dots v_{i_k}$, где $\{i_1,\dots,i_k\} \notin K$. *Алгеброй Стенли – Райснера* $\Bbbk[K]$ называется фактор-алгебра кольца многочленов по идеалу Стенли – Райснера: $\Bbbk[K] = \Bbbk[v_1,\dots,v_m]/I_{SR}$.

Определение 3.2 [2, 7.14]. Рассмотрим пару клеточных комплексов (X,A). Для подмножеств $\omega \subset [m]$ определим

$$(X,A)^\omega := \{(x_1,\dots,x_m) \in X^m | x_i \in A \text{ при } v_i \notin \omega\}.$$

Рассмотрим теперь симплициальный комплекс K на множестве $[m]$. *K-степенью* пары (X,A) называется топологическое пространство

$$(X,A)^K := \bigcup_{\omega\in K} (X,A)^\omega.$$

Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$. *Момент-угол-комплексом* $\mathcal{Z}_K$ называется K-степень

$$\mathcal{Z}_K := (D^2, S^1)^K.$$

На пространстве $\mathcal{Z}_K$ имеется стандартное покоординатное действие m-мерного тора. Это действие несвободно, но при некоторых r возможно выбрать подтор $T^r \subset T^m$, действующий на пространстве $\mathcal{Z}_K$ почти свободно. В [17] доказано, что ранг подтора в T^m, который почти свободно действует на $\mathcal{Z}_K$, равен в точности $r = m - n$, где $n = \dim K + 1$.

Для пространств $\mathcal{Z}_K$ удается доказать следующую оценку ранга когомологий, влекущую гипотезу о торическом ранге.

Теорема 3.3 [3],[17]. *Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$ с $\dim K = n - 1$. Тогда*

$$\mathrm{hrk}(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

Кольцо когомологий пространства $\mathcal{Z}_K$ было вычислено в [2].

Теорема 3.4.

$$H^*(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}).$$

Кольцо в левой части имеет лишь топологическую градуировку, в то время как кольцо в правой части, помимо той же топологической градуировки, имеет дополнительную гомологическую градуировку, происходящую из структуры Tor-модуля. Напомним, что именно эта дополнительная градуировка играет ключевую роль в гипотезе Хоррокса. Это замечание подсказывает, что, помимо обычных чисел Бетти $b_i = \dim H^i(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q})$, можно определить более тонкие комбинаторные инварианты симплициальных комплексов — биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j} = \dim \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{S(m)}(\mathbb{Q}[K], \mathbb{Q})$. Здесь

$$\mathrm{Tor}^{*,*}_{S(m)}(\mathbb{Q}[K], \mathbb{Q}) = H^{*,*}[\mathbb{Q}[K] \otimes \Lambda(u_1, \ldots, u_m), d],$$

где биградуировка задана на образующих: $\mathrm{bideg}(v_i) = (0, 2)$, $\mathrm{bideg}(u_i) = (-1, 0)$ $\mathrm{bideg}(d) = (1, 2)$.

Сформулируем результат Эванса и Гриффитса [7, Cor 2.5] о модулях $\mathrm{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q})$.

Теорема 3.5. *Пусть M — модуль над кольцом многочленов $S(m)$ вида $M = S(m)/I$, где I — мономиальный идеал. Тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^{-i}_{S(m)}(M, \mathbb{Q}) \geqslant \binom{n}{i},$$

где $n = \mathrm{pd}M$ — проективная размерность модуля M.

В применении к кольцам Стенли – Райснера эта теорема дает следующую оценку на биградуированные числа Бетти.

Следствие 3.6. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, $n = \dim K + 1$. Тогда для всякого $i \leqslant m - n$:*

$$\sum_{j=0}^{n} \beta^{-i,2j} \geqslant \binom{m-n}{i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Ауслендера – Бухсбаума для произвольного модуля M над кольцом многочленов выполнено неравенство: $\mathrm{pd}M + \mathrm{depth}M = \mathrm{depth}S(m) = m$. Поскольку $\mathrm{depth}M \leqslant \mathrm{krdim}M$, где krdim — размерность Крулля, верно неравенство:

$$\mathrm{pd}\mathbb{Q}[K] = \mathrm{depth}S(m) - \mathrm{depth}\mathbb{Q}[K] \geqslant m - \mathrm{krdim}\mathbb{Q}[K] = m - n.$$

Из теоремы 3.5 следуют требуемые неравенства. □

Отметим, что предложение 2.1 вместе с теоремами 3.4 и 3.5 дают альтернативное доказательство гипотезы о торическом ранге для момент-угол-комплексов 3.3.

В заключение сформулируем вопрос о биградуировке в когомологиях произвольного пространства с действием тора. Согласно (1) когомологии всякого пространства X с действием тора T^m допускают (вообще говоря, не мультипликативную) биградуировку, благодаря наличию изоморфизма

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq H[H^*(X_{T^m},\mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m,\mathbb{Q}), d].$$

В связи с этим возникает естественный вопрос.

Вопрос. *Пусть T^m — максимальный по включению тор, который может эффективно действовать на пространстве X. Верно ли, что размерности биградуированных компонент в когомологиях $H^*(X,\mathbb{Q})$ не зависят от выбора тора T^m?*

Одним из следствий положительного ответа на этот вопрос будет равенство биградуированных чисел Бетти $\beta^{-i,2j}(K) = \beta^{-i,2j}(K')$ при условии наличия гомеоморфизма $\mathcal{Z}_K = \mathcal{Z}_{K'}$.

Список литературы

[1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, "Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3", *Amer. J. Math.*, **99**:3, (1977), 447–485.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2004.

[3] X. Cao and Z. Lu, *Möbius transform, moment-angle complexes and Halperin-Carlsson conjecture*, 2009, arXiv: 0908.3174.

[4] G. Carlsson, "Free $(\mathbb{Z}/2)^k$-actions and a problem in commutative algebra", *Lecture Notes in Math.*, **1217**, (1986), 79–83.

[5] P. E. Conner, "On the action of a finite group on $S^n \times S^n$", *Ann. of Math*, **66**, (1957), 586–588.

[6] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, "Convex polytopes, Coxter orbifolds and torus actions", *Duke Math. J*, **62**:2, (1991), 417–451.

[7] E. G. Evans and P. Griffith, "Binomial behavior of Betti numbers for modules of finite length", *Pacific J. Math*, **133**, (1988), 267–276.

[8] D. Erman, "A special case of the Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks rank conjecture", *Math. Res. Lett.*, **17**:06, (2010), 1079–1089.

[9] Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, "Algebraic Models in Geometry", 2008.

[10] Y. Félix, S. Halperin, J. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 2001.

[11] S. Halperin, "Rational homotopy and torus actions", *London Math. Soc. Lecture Note*, **93**, (1985), 293–306.

[12] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[13] R. Hartshorne, "Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list", *Topology*, **18**:2, (1979), 117–128.

[14] T. Höfer, "Remarks on torus principal bundles", *J.Math. Kyoto Univ*, **33**:1, (1993), 227–259.

[15] V. Puppe, "Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture", *Georgian Mathematical Journal*, **16**:2, (2009), 369–379, arXiv: 0811.3517.

[16] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, Москва, 1971.

[17] Ю. М. Устиновский, "Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов", *Матем. заметки*, **90**:2, (2011), 300–305, arXiv: 0909.1053.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 17 января 2012 г.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина "Династия" и грантов Президента РФ (НШ-5413.2010.1 и МД-2253.2011.1)

Ustinovsky Yu. M. On almost free torus actions and Horrocks conjecture. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 98–107.

ABSTRACT

We consider a model for cohomology groups of a space X with an action of torus, representing Koszul complex of its equivariant cohomology. Studying homological properties of modules over polynomial ring we derive new estimates on homological rank (total dimension of rational cohomology) of X. In particular, we obtain simple proof of toral rank conjecture in the case of torus dimension $\leqslant 4$.

Key words: *almost free torus actions, equivariant cohomology, Koszul complex, moment-angle-complex, bigraded Betti numbers.*