ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 2. С. 127–135

УДК 517.956
MSC2010 35R12

© С. А. Алдашев[1]

Критерий единственности решения задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона

В работе получен критерий единственности регулярного решения задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона.

Ключевые слова: *критерий, уравнение, решение, область.*

Введение

В работе [1] в двумерном случае было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как замечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В работе [4] было показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые вызывают сложности при применении в приложениях.

В многомерном случае [6, 7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений, а в [8, 9] доказаны корректность задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько нам известно, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для сингулярных гиперболических уравнений ранее не изучались.

В работе получен критерий единственности регулярного решения задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона.

1. Постановка задачи и результат

Пусть Ω_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t): \ |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\beta$ области Ω_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области Ω_β рассмотрим многомерное уравнение Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{1}$$

[1]Актюбинский государственный университет имени К. Жубанова, 030000, г. Актобе, Казахстан, ул. Бр. Жубановых, 263. Электронная почта: aldash51@mail.ru

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$, α — действительное число.

Через $u_\alpha(x,t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_β из класса $C(\overline{\Omega}_\beta \setminus S_0) \cap C^2(\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha\Big|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\, u_\alpha\big|_{S_\beta} = 0,\, \alpha < 1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}\Big|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\, u_\alpha\big|_{S_\beta} = 0,\, \alpha = 1; \tag{3}$$

$$(t^{\alpha-1}u_\alpha)\Big|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\, u_\alpha\big|_{S_\beta} = 0,\, \alpha > 1. \tag{4}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области Ω_β из класса $C(\overline{\Omega} \setminus S_0) \cap C^2(\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\Big|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\, u_\alpha\big|_{S_\beta} = 0,\, \alpha \geqslant 0; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha (u_\alpha - u_{\alpha,1})_t = 0, \quad u_\alpha\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\, u_\alpha\big|_{S_\beta} = 0,\, \alpha < 1; \tag{6}$$

где $u_{\alpha,1}(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1) с данными $u_{\alpha,1}(x,0) = \tau(x)$, $\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,1}(x,0) = 0$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$ — пространства Соболева.

Справедлива следующая лемма (см. [10]).

Лемма. *Если $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$ и $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int\limits_H f(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *1) Пусть $\alpha \leqslant 0$ или $\alpha \geqslant 2$. Решение задачи 1 будет нулевым тогда и только тогда, когда*

$$\sin \mu_{s,n}\beta \neq 0,\, s = 1, 2, \dots . \tag{7}$$

2) При $0 < \alpha < 2$ решение задачи 1 тривиальное тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\cos \mu_{s,n}\beta \neq 0,\; s = 1, 2, \dots . \tag{8}$$

3) Решение задачи 2 для любого α тривиальное тогда и только тогда, когда выполняется условие (8), где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Отметим, что при $\alpha = 0$ эта теорема получена в [8, 9].

2. Сведение задач 1 и 2 к двумерным задачам

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{9}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \, g_1 = 1, \, g_j = (\sin \theta_1 \ldots \sin \theta_{j-1})^2, \, j > 1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение $u_\alpha \in C^2(\Omega_\beta)$, то его можно находить в виде ряда

$$u_\alpha(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{10}$$

где $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (10) в (9), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([10]), получим

$$L_\alpha \bar{u}_{\alpha,n}^k = \bar{u}_{\alpha,nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{\alpha,nr}^k - \bar{u}_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} \bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_{\alpha,n}^k = 0, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots,$$

которое с помощью замены $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t)$ сводится к уравнению

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k = u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} u_{\alpha,nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{\alpha,n}^k = 0, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{11_α}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}.$$

Далее, из краевых условий (2)–(6) для функций $u_{\alpha,n}^k(r, t)$ в силу (10), с учетом леммы, получаем

$$u_{\alpha,n}^k(r, 0) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \, \alpha < 1, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

$$\left. \frac{u_{\alpha,n}^k}{\ln t} \right|_{t=0} = 0, \, u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \, \alpha = 1, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

$$\left. (t^{\alpha-1} u_{\alpha,n}^k) \right|_{t=0} = 0, \, u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \, \alpha > 1, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

$$\left. \frac{\partial u_{\alpha,n}^k}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \, u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \, \alpha \geqslant 0, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha (u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,1})_t = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \, u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \, \alpha < 0, \, k = \overline{1, k_n}, \, n = 0, 1, \ldots . \tag{16}$$

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерным задачам Дирихле и Пуанкаре для уравнения (11_α). Решение этих задач будем изучать в п.4 и п.5.

Наряду с уравнением (11_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \bar{u}_{0,n}^k = 0, \tag{11_0}$$

которое с помощью замены переменных $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ сводится к уравнению

$$Mu^k_{0,n} \equiv u^k_{0,n\xi\eta} + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2} u^k_{0,n} = 0. \qquad (17)$$

Решение задачи Коши для (17) с данными

$$u^k_{0,n}(\xi,\xi) = \tau^k_n(\xi),\ \left(\frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta} = \nu^k_n(\xi),\ 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$$

имеет вид ([11])

$$\begin{gathered} u^k_{0,n}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau^k_n(\eta) R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau^k_n(\xi) R(\xi,\xi;\xi,\eta) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_\eta^\xi [\nu^k_n(\xi_1) R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau^k_n(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}] d\xi_1, \end{gathered} \qquad (18)$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi\eta+\xi_1\eta_1)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}] = P_\mu(z)-$ функция Римана для уравнения (17) ([12]), а $P_\mu(z)-$ функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}.$$

3. Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (11_α) и (11_0).

Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований.

1^0. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$u_{2-\alpha} = t^{\alpha-1} u_\alpha \qquad (19)$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha} u = 0$.

2^0. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = u_{\alpha+2} \qquad (20)$$

будет решением уравнения $L_{\alpha+2} u = 0$.

3^0. Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha = t^{1-\alpha} L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1} u_\alpha). \qquad (21)$$

Теперь докажем эти свойства. Пусть $B_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t}\frac{\partial}{\partial t}$. Тогда

$$L_\alpha u_\alpha \equiv \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\bar{\lambda}_n}{4r^2} u_\alpha - B_\alpha u_\alpha.$$

Положим $\omega(r,t) = t^{\alpha-1} u_\alpha(r,t),\ \omega_t = (\alpha-1) t^{\alpha-2} u_\alpha + t^{\alpha-1} u_{\alpha t}$,

$$\omega_{tt} = (\alpha-1)(\alpha-2) t^{\alpha-3} u_\alpha + 2(\alpha-1) t^{\alpha-2} u_{\alpha t} + t^{\alpha-1} u_{\alpha tt},$$

$$\omega_{tt} + \frac{2-\alpha}{t}\omega_t = t^{\alpha-1}\left(u_{\alpha tt} + \frac{\alpha}{t} u_{\alpha t}\right) = t^{\alpha-1} B_\alpha u_\alpha.$$

Отсюда

$$B_{2-\alpha}\omega = t^{\alpha-1}B_\alpha u_\alpha = t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}u_\alpha\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)(t^{\alpha-1}u_\alpha) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)\omega$$

или

$$-B_{2-\alpha}\omega + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)\omega = L_{2-\alpha}\omega = L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1}u_\alpha) = 0.$$

Свойство 1^0 доказано.

Пусть теперь $\upsilon(r,t) = \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial t}$.

Вычислим

$$\upsilon_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right) = -t^{-2}u_{\alpha t} + t^{-1}u_{\alpha tt},\ \upsilon_{tt} = 2t^{-3}u_{\alpha t} - 2t^{-2}u_{\alpha tt} + t^{-1}u_{\alpha ttt}.$$

Тогда

$$\upsilon_{tt} + \frac{\alpha+2}{t}\upsilon_t = t^{-1}u_{\alpha ttt} - \alpha t^{-3}u_{\alpha t} + \alpha t^{-2}u_{\alpha tt},$$

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}(B_\alpha u_\alpha) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{\alpha tt} + \frac{\alpha}{t}u_{\alpha t}\right) = t^{-1}u_{\alpha ttt} - \alpha t^{-3}u_{\alpha t} + \alpha t^{-2}u_{\alpha tt}.$$

Отсюда

$$\upsilon_{tt} + \frac{\alpha+2}{t}\upsilon_t = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)(B_\alpha u_\alpha) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}u_\alpha\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)\upsilon$$

и

$$L_{2+\alpha}\upsilon = 0,\ L_{2+\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right) = 0.$$

Свойство 2^0 доказано.

Теперь переходим к доказательству свойства 3^0.

$$t^{\alpha-1}L_\alpha u_\alpha = t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}u_\alpha - B_\alpha u_\alpha\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)(t^{\alpha-1}u_\alpha) - t^{\alpha-1}B_\alpha u_\alpha.$$

Тогда, по свойству 1^0 получаем

$$t^{\alpha-1}L_\alpha u_\alpha = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\bar\lambda_n}{4r^2}\right)\omega - B_{2-\alpha}\omega = L_{2-\alpha}\omega = L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1}u_\alpha),$$

откуда вытекает свойство 3^0.

Из равенства (19) следует, что $u_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p}$, применив к которому p раз формулу (20), а затем (19), получим

$$u_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p}). \tag{22}$$

Соотношение (22) является фундаментальной формулой ([13]) для решения задачи Коши.

Пусть $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha + 2p \geqslant m-1,\ 2-\alpha+2q \geqslant m-1.$$

Утверждение 1. *Если $u_{0,n}^{k,2}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{k,2}(r,0)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,2}(r,0)=\nu_n^k(r), \tag{23}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)=\gamma_{-\alpha}t^{-\alpha}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,2}(r,\xi t)\xi(1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv\gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}}u_{0,n}^{k,2}(r,t) \tag{24}$$

при $\alpha<0$ будет решением уравнения (11_α), удовлетворяющим условию

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ \lim_{t\to 0}t^\alpha\frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,n}^{r,2}=\nu_n^k(r). \tag{25}$$

Если же $0<\alpha<1$, то функция

$$\begin{gathered}u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)=\gamma_{2-\alpha+2q}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left[t^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv\\ \equiv\gamma_{2-\alpha+2q}2^{q-1}\Gamma(q-\tfrac{\alpha}{2}+1)D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right]\end{gathered} \tag{26}$$

является решением уравнения (11_α) с начальными данными (25), где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha=2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, D_{0t}^α — оператор Римана — Лиувилля [3], *а $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ — решение уравнения (11_0) с начальными условиями*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)},\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0. \tag{23$'$}$$

Утверждение 2. *Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r),\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{27}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t)=\gamma_\alpha\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)t^{1-\alpha}D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right], \tag{28}$$

при $\alpha>0$ есть решение уравнения (11_α), удовлетворяющее условию (27).

Утверждение 3. *Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0), удовлетворяющее условию (27), то функция*

$$u_{1,n}^{k,1}(r,t)=\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln[t(1-\xi^2)]d\xi \tag{29}$$

является решением задачи для уравнения $L_1u=0$ с начальными данными

$$\left.\frac{u_{l,n}^{k,1}}{\ln t}\right|_{t=0}=\tau_n^k(r). \tag{30}$$

Справедливость приведенных утверждений устанавливается аналогично тому, как она доказана для уравнения (1) и многомерного волнового уравнения ([11, 14 − 16]).

Приведем некоторые следствия из утверждений 2, 3. Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0, 1 \ldots$. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0) с данными

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(\alpha-1)\ldots(\alpha+2p-1)},\ \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{31}$$

то из утверждения 2 следует, что функция

$$u_{\alpha+2p,n}^{k,1}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+p-1}d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p}u = 0$, удовлетворяющим начальному условию (31).

Тогда из соотношений (22) и (19) вытекает, что функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t) = t^{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\left(t^{\alpha+2p-1}u_{\alpha+2p,n}^{k,1}\right) \equiv \gamma_{\alpha+2p}2^{p-1}\Gamma(\tfrac{\alpha}{2}+p)t^{1-\alpha}D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right] \tag{32}$$

есть решение уравнения (11_α) и удовлетворяет условию (27).

Теперь пусть $\alpha = -(2r+1)$. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Коши для (11_0) с данными (27), то из (19), (22) и из утверждения 3 не трудно получить, что функция

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r,t) = t^{2(r+1)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r+1}\left[\int\limits_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(t(1-\xi^2))d\xi\right] \tag{33}$$

является решением задачи Коши для $L_{-(2r+1)}\upsilon = 0$, удовлетворяющее условию (27).

Используя [17], соотношение (33) можно записать в виде

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r,t) = \frac{a}{2}t^{2(r+1)}D_{0t^2}^{\frac{1}{2}+r}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t}\right],\ a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t. \tag{34}$$

4. Доказательство теоремы для задачи 1

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha < 1$. Учитывая формулы (24) и (26), задачи (11_α), (12) сводим к задаче Дирихле для (11_0) с данными

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(1,t) = 0,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{35}$$

при $\alpha \leqslant 0$ и к задаче Пуанкаре — для уравнения (11_0), с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(1,t) = 0,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{36}$$

при $0 < \alpha < 1$.

В [8] показано, что решение задачи (13_0), (35) $u_{\alpha,n}^k(r,t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (7).

В [9] доказано, что решение задачи (13_0), (36) тривиальное, если и только если выполняется соотношение (8).

Далее, используя утверждения 1–3, устанавливаем аналогичные результаты и для задачи (11_α), (12).

2) В случае, когда $\alpha = 1$, решение задачи (11_α), (13) будем искать в виде

$$u_{1,n}^k(r,t) = u_{1,n}^{k,1}(r,t) + u_{1,n}^{k,2}(r,t), \tag{37}$$

где $u_{1,n}^{k,1}(r,t)$ — решение уравнения (11_1), с данными $\left.\frac{u_{1,n}^{k,1}}{\ln t}\right|_{t=0} = 0$, а $u_{1,n}^{k,2}(r,t)$ — решение задачи Пуанкаре для (11_1) с условием

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}u_{1,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ u_{1,n}^{k,2}(1,t) = -u_{1,n}^{k,1}(1,t),\ u_{1,n}^{k,2}(r,\beta) = -u_{1,n}^{k,1}(r,\beta).\\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots .\end{gathered} \tag{38}$$

Из соотношений (29) и (18) получаем $u_{1,n}^{k,1}(r,t) \equiv 0$. Далее, используя формулу (28) задачи (11_1), (38) сводим к задаче Пуанкаре (13_0), (36).

Используя формулы (21), (19) задача (11_α), (14) при $\alpha > 1$ приводим к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Таким образом, показано, что теорема справедлива для двумерных задач Дирихле и Пуанкаре для уравнения (11_α).

Следовательно, из п.1 с учетом леммы вытекает ее справедливость и для задачи 1.

5. Доказательство теоремы для задачи 2

Задача 2 сводится к задачам (11_α), (15)и (11_α), (16).

Если $\alpha \geqslant 0$, то из (28) следует, что задача (11_α), (15) приводится к задаче Пуанкаре для уравнения (11_0) с данными (36).

При $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0,1,\dots$, решение задачи (11_α), (16) будем искать в виде (37), где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)$ — решение задачи Коши (11_α) с условием

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ \lim_{t\to 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t) = 0, \tag{39}$$

а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Пуанкаре для (11_α) с условием (38).

Задача (11_α), (39) в силу формулы (24) сводится к однородной задаче Коши для (11_0) с данными $u_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{k,2}(r,t) = 0$, которое имеет тривиальное решение, что следует из (18).

Задача (11_α), (38), в свою очередь, в силу (32) приводится к задаче Пуанкаре (11_0), (36).

Пусть далее $\alpha = -(2r+1)$. Решение задачи (11_α), (16) ищем в виде (37), где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t)$ — решение задачи Коши (11_α), (39), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t)$ — решение задачи Пуанкаре для (11_α) с условием (38).

Так как $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t) \equiv 0$, как ранее показано, то в силу (34) задача (11_α), (38) сводится к задаче Пуанкаре (11_0), (36).

Таким образом, теорема доказана и для задачи 2.

Список литературы

[1] J. Hadamard, "Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique", *Princeton University Bulletin*, **13** (1902), 49–52.

[2] А. В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, АН СССР, М., 1959, 164 с.

[3] А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с.

[4] D. G. Bourgin and R. Duffin, "The Dirichlet problem the vibrating string eguation", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45** (1939), 851–858.

[5] D. W. Fox and C. Pucci, "The Dirichlet problem the wave eguation", *Annali di Mathematica Pura ed Applicata*, **46** (1958), 155–182.

[6] А. М. Нахушев, "Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области", *Дифференциальные уравнения*, **6**:1 (1970), 190–191.

[7] D. R. Dunninger, E. C. Zachmanoglou, "The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains", *J. Math. Mech.*, **18**:8 (1969), 763–766.

[8] S. A. Aldashev, "The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation", Article ID 653215, *Mathematical problems Engineering*, **2010**, 2010, 1–7 pp.

[9] С. А. Алдашев, "Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения", *Современная математика и ее приложения*, Уравнения с частными производными, **67**, 2010, 28–32.

[10] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962, 254 с.

[11] С. А. Алдашев, *Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений*, Гылым, Алматы, 1994, 170 с.

[12] E. T. Copson, "On the Riemann — Green function", *J. Rath. Mech and Anal.*, **1** (1958), 324–348.

[13] A. Weinstein, "On the wave equation and the equation of Euler — Poisson", *The Fifth simposium in applied Math.*, MCGraw-Hill, New York, 1954, 137–147.

[14] С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*, НГУ, Новосибирск, 1973, 144 с.

[15] С. А. Алдашев, "О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных", *Дифференц. уравнения*, **12**:6 (1976), 3–14.

[16] С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени*, ИМ СОАН СССР, Новосибирск, 1982, 167 с.

[17] А. М. Нахушев, *Элементы дробного исчесления и их применение*, КБНЦ РАН, Нальчик, 2000, 298 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 ноября 2011 г.

Aldashev S. A. Criterion for the Uniqueness of the Regular Solution of the Dirichlet and Poincare Problems for the Multi-Dimensional Euler — Darboux — Poisson Equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 127–135.

ABSTRACT

This paper establishes the criterion for the uniqueness of the regular solution of the Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for the multi-dimensional Euler — Darboux — Poisson equation.

Key words: *criterion, equation, solution, domain.*