ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 2. С. 136–145

УДК 517.912
MSC2010 37N10

© О. В. Александрова, О. С. Громашева, Г. Ю. Косолапкин[1]

Метод погружения для решения задачи Штурма — Лиувилля в матричной постановке

В работе предложен метод решения краевых волновых задач, описываемых системой уравнений Гельмгольца. Показано, что задача Штурма — Лиувилля с вырожденными матрицами в краевых условиях с помощью алгебраических преобразований приводится к виду с невырожденными матрицами, что позволяет получить матричные уравнения метода инвариантного погружения. Решение задачи Штурма — Лиувилля сводится к решению задачи Коши для матричного уравнения Риккати. Показано, что решение матричного уравнения Риккати можно строить для произвольных краевых условий, выбранных из соображений удобства, а решения для заданных краевых условий выражаются через решение эталонного матричного уравнения Риккати с помощью алгебраических преобразований. Также сформулировано уравнение для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля, выраженное через решение матричного уравнения Риккати, и получено эволюционное уравнение для спектрального параметра задачи Штурма — Лиувилля.

Ключевые слова: *задача Штурма — Лиувилля, матричное уравнение Риккати, метод погружения.*

Введение

Проблема решения краевых волновых задач достаточно актуальна и в то же время сложна. Для уравнений Гельмгольца построение устойчивых численных методов до сих пор остается востребованной задачей. При решении скалярных уравнений одним из эффективных подходов является метод прогонки, или метод дифференциальной прогонки [1]. Для многих физических приложений более приемлемым вариантом такого подхода является метод инвариантного погружения [1, 2, 3]. Этот метод обычно используется применительно к скалярным волновым задачам.

Часто постановка задачи имеет векторный вид, то есть описывается системой уравнений Гельмгольца с соответствующими краевыми условиями. Такая постановка возникает, например, в задачах распространения волн в неслоистых волноводах при использовании обобщений метода нормальных волн [4] или в задачах гидродинамической устойчивости [5]. Многие авторы указывают на возможность обобщения метода инвариантного погружения на матричный случай. Но вывод матричного уравнения Риккати приведен только в работе [3], в которой рассмотрен простейший случай краевых условий с невырожденными

[1]Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43; Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского, 690003, г. Владивосток, ул. Верхнепортовая, 50а. Электронная почта: gromasheva@poi.dvo.ru

матрицами. В реальных задачах матрицы, определяющие условия на границе, могут быть вырожденными (см., например, [4, 5]).

В данной работе предлагается импедансное алгебраическое преобразование, которое позволяет свести задачу Штурма — Лиувилля, описываемую системой уравнений Гельмгольца с вырожденными краевыми условиями, к регулярной задаче Штурма — Лиувилля. Для полученной задачи выводятся уравнения метода инвариантного погружения и обсуждаются методы решения матричного уравнения Риккати. Кроме того, выводится эволюционное уравнение для спектрального параметра задачи Штурма — Лиувилля, которое позволяет избежать вычисления решений задачи для большого числа значений спектрального параметра, а также трудностей, связанных с большими производными в дисперсионном уравнении.

Таким образом, целью данной работы является вывод уравнений инвариантного погружения, то есть сведение матричной краевой волновой задачи к задаче с начальными условиями в случае вырожденных краевых условий. В рамках метода инвариантного погружения выведено дисперсионное уравнение для задачи Штурма — Лиувилля, сформулировано эволюционное уравнение для спектрального параметра задачи Штурма — Лиувилля. Кроме того, в работе показано, что решения задачи Штурма — Лиувилля и дисперсионные уравнения при различных краевых условиях связаны алгебраическими соотношениями, включающими коэффициенты краевых условий и решение эталонного уравнения Риккати.

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{\Gamma}(x)\frac{d}{dx} + \mathbf{K}(\mathbf{x},\lambda)\right)\vec{\mathbf{U}}(x) = \vec{\mathbf{0}} \tag{1}$$

с краевыми условиями вида

$$\left(\mathbf{A}\frac{d}{dx}\vec{\mathbf{U}}(x) + \mathbf{B}\vec{\mathbf{U}}(x)\right)|_{x=L_0} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \left(\mathbf{A}_1\frac{d}{dx}\vec{\mathbf{U}}(x) + \mathbf{B}_1\vec{\mathbf{U}}(x)\right)|_{x=L} = \vec{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Gamma}(x), \mathbf{K}(x,\lambda)$ – непрерывные на промежутке (L_0, L) квадратные $n\times n$ матрицы-функции, $\vec{\mathbf{U}}(x)$ – неизвестная вектор-функция (столбец размерности n), а $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ – постоянные $n \times n$ матрицы, где n считаем произвольным. Ниже мы будем помечать векторы стрелкой, чтобы отличать их от матриц. Используем стандартные обозначения: $\mathbf{E}$ для единичной матрицы, $\mathbf{0}$ для нулевой матрицы и $\vec{\mathbf{0}}$ для нулевого вектора. Для части результатов достаточно непрерывности матрицы $\mathbf{K}(x,\lambda)$ как функции спектрального параметра λ. Мы будем считать ее дважды непрерывно дифференцируемой функцией этого параметра на всей вещественной оси. Здесь мы рассматриваем однородные краевые условия, поскольку нас интересует решение задачи Штурма — Лиувилля [1]–[9]. Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ должны обеспечивать полный набор краевых условий, то есть сумма рангов матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и сумма рангов матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$ должны быть не меньше n.

Как показано в [2], [3], [8], краевая задача (1)–(2) может быть сведена к эволюционной задаче для уравнений метода инвариантного погружения, по крайней мере, при невырожденных матрицах $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$.

Уравнения метода инвариантного погружения

Рассмотрим вспомогательную матричную краевую задачу [2, 3]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{\Gamma}(x)\frac{d}{dx} + \mathbf{K}(\mathbf{x},\lambda)\right)\mathbf{U}(x;L) = \mathbf{0} \tag{3}$$

с условиями

$$\left(\mathbf{A}\frac{d}{dx}\mathbf{U}(x;L)+\mathbf{B}\mathbf{U}(x;L)\right)|_{x=L_0}=\mathbf{0},\quad \left(\mathbf{A}_1\frac{d}{dx}\mathbf{U}(x;L)+\mathbf{B}_1\mathbf{U}(x;L)\right)|_{x=L}=\mathbf{E}. \tag{4}$$

Здесь мы считаем положение правой границы промежутка переменным параметром задачи и вводим в неизвестную матрицу-функцию зависимость от этого параметра. Нас, конечно, интересует решение векторной задачи (1), (2), но уравнения метода инвариантного погружения получаются только для матричной задачи. Неизвестная вектор-функция, которая является решением исходной задачи, будет выражена через матрицу-функцию $\mathbf{U}(x;L)$. Отметим, что функция $\mathbf{U}(x;L)$ фактически представляет собой аналог функции Грина с источниками, расположенными на границе. С другой стороны, это уравнение описывает падение плоской волны на слой с проницаемыми границами [2]. Отметим, что в качестве вспомогательных источников на второй границе вместо единичной матрицы можно использовать произвольную невырожденную матрицу. Тогда мы получим решение задачи о падении произвольной комбинации волн на правую границу. Мы использовали единичную матрицу, поскольку нас интересует задача Штурма — Лиувилля, а источники поля на правой границе области играют вспомогательную роль.

В работе [3] для частного случая задачи (3), (4) с невырожденной матрицей $\mathbf{A}_1$ получены уравнения метода инвариантного погружения. Для большей наглядности приведем первое из этих уравнений (процедура вывода будет обсуждена ниже)

$$\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}(x;L)=\mathbf{U}(x;L)\mathbf{\Lambda}(L),\quad \mathbf{U}(x;L)\,|_{L=x}=\mathbf{U}(x;x)=\mathbf{U}_x, \tag{5}$$

где введено обозначение $\mathbf{U}(x;x)=\mathbf{U}_x$, а матрица $\mathbf{\Lambda}(L)$ имеет вид

$$\mathbf{\Lambda}(L)=\mathbf{A}_1\left[\mathbf{\Gamma}(L)-\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}_1\right]\mathbf{A}_1^{-1}+\mathbf{A}_1\left[\mathbf{K}(L)+\mathbf{A}_1^{-2}\mathbf{B}_1^2-\mathbf{\Gamma}(L)\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}_1\right]\mathbf{U}_L. \tag{6}$$

Задачу Коши (5) нужно дополнить матричным уравнением Риккати [3] для матрицы-функции $\mathbf{U}_L$, которое мы приведем ниже.

В данном случае существенно, что полученное уравнение не имеет смысла при вырожденной матрице $\mathbf{A}_1$. Если матрица $\mathbf{A}_1$ вырожденная, но невырожденна матрица $\mathbf{B}_1$, то вывод уравнений погружения из [3] можно повторить, используя функцию $\mathbf{V}_L=\frac{d}{dx}\mathbf{U}(x;L)\,|_{x=L}$. В случае, когда обе матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ из краевого условия на правой границе интервала вырожденны, получить уравнения метода инвариантного погружения напрямую из задачи (3), (4) не удается. Именно этот случай нас интересует, поскольку такая ситуация возникает в реальных задачах (см., например, [5]). В принципе эту проблему можно попытаться решить, выводя уравнения метода инвариантного погружения покомпонентно, используя частично компоненты матрицы $\mathbf{U}_L$ и частично компоненты матрицы $\mathbf{V}_L$. При таком подходе процедура вывода становится очень громоздкой, а получающиеся матричные уравнения Риккати неудобны для решения. Главная же проблема состоит в том, что вывод уравнений погружения остается невозможным и в частном случае, когда матрица $\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1$ вырожденная, что тоже встречается в реальных задачах.

Мы предлагаем алгебраическое преобразование, которое приводит сингулярную краевую задачу, то есть задачу с вырожденными матрицами в краевых условиях, к регулярному виду. Это преобразование аналогично импедансному преобразованию, полученному для скалярного случая в [7].

Для сокращения выкладок введем обозначение $\mathbf{V}(x;L)=\frac{d}{dx}\mathbf{U}(x;L)$, $\mathbf{V}_L=\mathbf{V}(L;L)$ и рассмотрим новые неизвестные матрицы функции $\mathbf{U}_q(x;L)$, $\mathbf{V}_q(x;L)=\frac{d}{dx}\mathbf{U}_q(x;L)$, связанные с исходными преобразованием вида

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_q(x;L)&=\mathbf{V}(x;L)\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}_2\mathbf{U}_L-\mathbf{B}_2\mathbf{V}_L\right)^{-1},\\ \mathbf{U}_q(x;L)&=\mathbf{U}(x;L)\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}_2\mathbf{U}_L-\mathbf{B}_2\mathbf{V}_L\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Также будем использовать матрицы-функции $\mathbf{U}_{qL}$, $\mathbf{V}_{qL}$, выражения для которых через матрицы $\mathbf{U}_L$, $\mathbf{V}_L$ получаются из (7), если положить в них $x = L$. Обратные преобразования для матриц-функций без индекса "q" через новые матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x;L) = \mathbf{U}_q(x;L)\left(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\mathbf{V}_{qL} + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_{qL}\right)^{-1}\\ \mathbf{V}(x;L) = \mathbf{V}_q(x;L)\left(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\mathbf{V}_{qL} + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_{qL}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Мы предполагаем, что матрицы $(\mathbf{E} - \mathbf{A}_2\mathbf{U}_L - \mathbf{B}_2\mathbf{V}_L))$ и $(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\mathbf{V}_{qL} + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_{qL})$ невырожденные на всем интервале изменений L, кроме конечного числа точек.

Поскольку матрицы $\mathbf{V}_q(x;L)$, $\mathbf{U}_q(x;L)$ отличаются от $\mathbf{V}(x;L)$, $\mathbf{U}(x;L)$ постоянным множителем, они будут удовлетворять системе уравнений (3) одновременно с исходными. Подставляя (8) в условия (4), получаем, что матрицы-функции с индексом "q" удовлетворяют системе уравнений (3) с условиями

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{A}\mathbf{V}_q(x;L) + \mathbf{B}\mathbf{U}_q(x;L)\right)|_{x=L_0} = \mathbf{0},\\ \left((\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\,\mathbf{V}_q(x;L) + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\,\mathbf{U}_q(x;L)\right)|_{x=L} = \mathbf{E}.\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь мы можем выбрать матрицы $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$ таким образом, чтобы матрицы $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ и матрица $(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\mathbf{V}_{qL} + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_{qL})$ были невырожденными. Естественно, выбор матриц преобразования зависит от конкретного вида исходных матриц, входящих в краевое условие (4). Еще одно замечание состоит в том, что, вообще говоря, нам нужно обеспечить невырожденность только одной из матриц. А преобразование (7) позволяет обеспечить невырожденность двух матриц $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{B}_3$ в краевых условиях (9). Этой возможностью следует воспользоваться, поскольку невырожденность двух матриц упрощает вывод уравнений погружения.

Благодаря выбору вида матриц преобразования, мы можем вывести уравнения метода инвариантного погружения для регулярной краевой задачи (3), (9).

Кратко повторим процедуру вывода, предложенную в [3]. Дифференцируя уравнение (3) для матрицы функции $\mathbf{U}_q(x;L)$ по параметру L, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{\Gamma}(x)\frac{d}{dx} + \mathbf{K}(\mathbf{x},\lambda)\right)\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}_q(x;L) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Уравнение (10) совпадает с исходным и, следовательно, можно написать равенство

$$\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}_q(x;L) = \mathbf{U}_q(x;L)\mathbf{\Lambda}(L), \quad \mathbf{U}_q(x;L)\,|_{L=x} = \mathbf{U}_q(x;x) = \mathbf{U}_{qx}, \tag{11}$$

которое мы дополнили очевидным начальным условием.

Матрицу $\mathbf{\Lambda}(L)$ найдем с помощью краевого условия (9) при $x = L$. Умножая выражение (9) справа на матрицу $\mathbf{\Lambda}(L)$, получаем соотношение

$$\mathbf{A}_3\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{V}_q(x;L)\Big|_{x=L} + \mathbf{B}_3\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}_q(x;L)\Big|_{x=L} = \mathbf{\Lambda}(L).$$

Дифференцируя же это краевое условие по L, получаем

$$\mathbf{A}_3\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{V}_q(x;L)\Big|_{x=L} + \mathbf{B}_3\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}_q(x;L)\Big|_{x=L} = -\mathbf{A}_3\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{V}_q(x;L)\Big|_{x=L} - \mathbf{B}_3\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{U}_q(x;L)\Big|_{x=L}.$$

Вычислим правую часть последнего выражения

$$\mathbf{\Lambda}(L) = \mathbf{A}_3\left[\mathbf{\Gamma}(L) - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\right]\mathbf{A}_3^{-1} + \mathbf{A}_3\left[\mathbf{K}(L) + \mathbf{A}_3^{-2}\mathbf{B}_3^2 - \mathbf{\Gamma}(L)\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\right]\mathbf{U}_{qL}. \tag{12}$$

Полученное для матрицы выражение совпадает с (6) с той только разницей, что оно выведено для матриц функций с индексом "q". Входящие в него постоянные матрицы невырожденные. Далее, дифференцируя матрицу-функцию $\mathbf{U}_{qL}$ по L, получаем соотношение

$$\frac{d}{dL}\mathbf{U}_q(L;L) = \frac{\partial}{\partial L}\mathbf{U}_q(x;L)\,|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{U}_q(x;L)\,|_{x=L}\,.$$

Первый член в правой части находим из уравнения (11), а второй — из краевого условия (9), после чего получаем матричное уравнение Риккати

$$\begin{gathered}\frac{d}{dL}\mathbf{U}_{qL} = \mathbf{A}_3^{-1} - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{U}_{qL} + \mathbf{U}_{qL}\mathbf{A}_3\left[\mathbf{\Gamma}(L) - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\right]\mathbf{A}_3^{-1} + \\ + \mathbf{U}_{qL}\mathbf{A}_3\left[\mathbf{K}(L) + \mathbf{A}_3^{-2}\mathbf{B}_3^2 - \mathbf{\Gamma}(L)\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\right]\mathbf{U}_{qL}.\end{gathered} \tag{13}$$

Начальное условие для матричного уравнения Риккати получаем из условия совместности краевых условий (9) при $L \to L_0$:

$$\mathbf{U}_{qL_0} = \left(\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{A}_3^{-1}. \tag{14}$$

В случае, если матрица $\mathbf{A}$ вырожденная, начальное условие нужно получать по-другому, но это не сложно, и мы не будем рассматривать этот случай (см., например, [8]).

Таким образом, процедура решения вспомогательной краевой задачи, которая может представлять и самостоятельный интерес, состоит в следующем. Мы должны решить матричное уравнение Риккати (13) с начальным условием (14). Затем решаем задачу Коши (11), (12) для линейного матричного уравнения. И, наконец, с помощью преобразований (8) получаем решение краевой задачи (3), (4).

Преобразование (8) удобно представить в виде, не зависящем от матрицы-функции $\mathbf{V}_{qL}$. Используем краевое условие (9), из которого следует

$$\mathbf{V}_{qL} = \mathbf{A}_3^{-1} - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{U}_{qL}, \tag{15}$$

и

$$\mathbf{U}(x,L) = \mathbf{U}_q(x,L)\left(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\right)\mathbf{A}_2^{-1}\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{E} + \left(\mathbf{E} - \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B}_2\right)\mathbf{U}_{qL}\right)^{-1}. \tag{16}$$

Дисперсионное уравнение для задачи Штурма — Лиувилля

Условия разрешимости задачи на собственные значения могут быть выражены через решение уравнения Риккати [9]–[11]. Такой подход хорошо изучен для скалярной постановки задачи. Для матричной задачи Штурма — Лиувилля нам не известны работы, в которых получено дисперсионное уравнение через решение матричного уравнения Риккати.

Для выявления условий разрешимости задачи Штурма — Лиувилля (1), (2) нам потребуется некоторое преобразование вспомогательной задачи. Сначала упростим матричное уравнение Риккати, введя замену

$$\mathbf{U}_{qL} = \left(\mathbf{X}\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3\right)^{-1}. \tag{17}$$

Для сокращения выкладок, не теряя общности, мы положили $\mathbf{\Gamma}(L) = 0$. Получим матричное уравнение Риккати вида

$$\frac{d}{dL}\mathbf{X} = -\mathbf{X}^2 + \mathbf{R}^2, \qquad \mathbf{R}^2 = -\mathbf{A}_3\mathbf{K}(L)\mathbf{A}_3^{-1} - \mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3^2\mathbf{A}_3^{-1} + \mathbf{B}_3\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{A}_3^{-1}. \tag{18}$$

Таким образом, наши преобразования, кроме регуляризации краевых условий, позволили свести задачу к уравнению Риккати простого вида, методы решения которого хорошо изучены [12]–[14].

Уравнение для поля преобразуем с помощью замены $\mathbf{U}_q(x;L) = \mathbf{\Phi}(x;L)\mathbf{U}_{qL}$, $\mathbf{\Phi}(x;L)\,|_{L=x} = \mathbf{E}$ и получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial L}\mathbf{\Phi}(x;L) = \mathbf{\Phi}(x;L)\left\{-\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}_3\right\}, \quad \mathbf{\Phi}(x;L)\,|_{L=x} = \mathbf{E}\,. \tag{19}$$

Особенно просто уравнения (18), (19) выглядят, если выбрать матрицу $\mathbf{A}_2$ так, что $\mathbf{A}_3 = \mathbf{E}$. Такой выбор матрицы преобразования возможен всегда, поэтому далее мы будем рассматривать этот вариант. Уравнения погружения при этом принимают вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dL}\mathbf{X} = -\mathbf{X}^2 + \mathbf{R}^2, \qquad \mathbf{R}^2 = -\mathbf{K}(L), \\ &\tfrac{\partial}{\partial L}\mathbf{\Phi}(x;L) = \mathbf{\Phi}(x;L)\mathbf{X}, \quad \mathbf{\Phi}(x;L)\,|_{L=x} = \mathbf{E}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку матрицы функции $\mathbf{U}_q(x;L)$ и $\mathbf{\Phi}(x;L)$ отличаются постоянным множителем, не зависящим от положения первой границы, а $\mathbf{U}_q(x;L)$ удовлетворяет условию (4) на первой границе, то и $\mathbf{\Phi}(x;L)$ удовлетворяет этому условию и исходному матричному уравнению Гельмгольца (3).

Матрица $\mathbf{\Phi}(x;L)$ является фундаментальной матрицей уравнения (1). Благодаря начальному условию для решения матричного уравнения Риккати она удовлетворяет краевому условию (4)на левой границе области.

Таким образом, решение задачи Штурма — Лиувилля будем искать в виде $\mathbf{\Phi}(x;L)\vec{\mathbf{a}}$. Получим условие для решения матричного уравнения Риккати (20), при котором вектор-функция $\mathbf{\Phi}(x;L)\vec{\mathbf{a}}$ будет удовлетворять второму однородному краевому условию (2) [9]. Из этого условия получаем

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}_1\tfrac{d}{dx}\mathbf{\Phi}(x;L)\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_1\mathbf{\Phi}(x;L)\vec{\mathbf{a}}\right)|_{x=L} = \left(\mathbf{A}_1\tfrac{d}{dx}\mathbf{U}_q(x;L)\mathbf{U}_{qL}^{-1} + \mathbf{B}_1\right)\vec{\mathbf{a}}\,|_{x=L} = \\ &= \left(\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{B}_1\right)\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Полученное однородное алгебраическое уравнение для определение вектора $\vec{\mathbf{a}}$ имеет нетривиальное решение при условии

$$\det\left(\mathbf{A}_1\mathbf{X}(L,\lambda) + \mathbf{B}_1\right) = 0. \tag{22}$$

Итак, решение задачи Штурма — Лиувилля следует проводить следующим образом. Нужно решать дисперсионное уравнение (22), при этом для каждого значения спектрального параметра λ следует решать задачу Коши для матричного уравнение Риккати (20).

Для найденного значения спектрального параметра λ_j, где j — номер собственного значения, нужно решить задачу Коши для линейного матричного уравнения (20) и найти какое-либо решение $\vec{\mathbf{a}}$ однородного алгебраического уравнения (21). Полученная вектор-функция $\mathbf{\Phi}(x;L,\lambda_j)\mathbf{a}(\vec{\lambda_\mathbf{j}})$ будет собственной функцией задачи (1), (2).

Проиллюстрируем полученное дисперсионное уравнение на простом примере. Пусть $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ — вырожденные матрицы такие, что $\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}$, например:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и выберем $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{E}$.

Тогда уравнение (22) выглядит как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

а условие разрешимости задачи Штурма — Лиувилля сводится к равенству

$$X_{33}(L, \lambda) = 0. \tag{23}$$

При этом собственной функцией будет третий столбец фундаментальной матрицы.

Таким образом, решение задачи Штурма — Лиувилля сведено к решению задачи Коши для матричного уравнения Риккати, нахождению значения спектрального параметра из дисперсионного уравнения, решению алгебраической системы и решению задачи Коши для линейного уравнения (20), которое дает собственные функции.

Метод эволюции спектрально параметра

Решение дисперсионного уравнения (22), как правило, не очень сложная задача. Тем не менее область, в которой определитель из (22) меняет знак, может быть очень узкой. Это связано с тем, что решение уравнения Риккати часто имеет зависимость от параметра, аналогичную тангенсу. В такой ситуации применение стандартных подходов, например, метода Ньютона, может быть затруднено или может потребоваться вычисление значения определителя для большого числа значений спектрального параметра. В этом случае необходимость многократного решения матричного уравнения Риккати снижает эффективность численного моделирования. Тогда можно дополнительно использовать вторую производную от определителя по спектральному параметру, либо воспользоваться методом эволюции спектрального параметра. В любом случае, даже при использовании метода Ньютона, требуется знать производную определителя из дисперсионного уравнения по спектральному параметру. Ниже мы получим эволюционное уравнение для спектрального параметра, а также уравнение для упомянутой производной.

Рассмотрим вместо (1) систему уравнений [7]–[9]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{K}(x, \lambda, \beta)\right) \vec{\mathbf{U}}(x) = \mathbf{0}, \tag{24}$$

где параметр β введен так, что решение спектральной задачи известно при некотором его значении, например, $\mathbf{K}(x, \lambda, \beta) = \mathbf{K}_0(1-\beta) + \mathbf{K}(x, \lambda)\beta$, где $\mathbf{K}_0$ – постоянная невырожденная матрица. В последнем случае при $\beta = 0$ решение спектральной задачи легко выражается через матричные экспоненты, а при $\beta = 1$ мы получаем решение исходной спектральной задачи. Спектральный параметр зависит от β как от параметра. Запишем дисперсионное уравнение в виде (для сокращения выкладок мы ограничимся рассмотренным примером)

$$X_{33}(L, \lambda(\beta), \beta) = 0. \tag{25}$$

Дифференцируя по параметру, получаем эволюционное уравнение

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\beta} X_{33}(L, \lambda(\beta), \beta)}{\frac{\partial}{\partial\lambda} X_{33}(L, \lambda(\beta), \beta)}. \tag{26}$$

Начальным условием для данного уравнения служат известные нам значения спектрального параметра $\lambda_j(0)$. Для замыкания уравнения нужно получить выражения для частных производных.

Рассмотрим матричное уравнение Риккати

$$\frac{d}{dL}\mathbf{X} = -\mathbf{X}^2 + \mathbf{R}^2, \qquad \mathbf{R}^2 = -\mathbf{K}(L, \lambda, \beta). \tag{27}$$

Дифференцируя это уравнение по по λ и β, получаем уравнения в вариациях

$$\frac{d}{dL}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{X} = -\mathbf{X}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{X} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{X}\mathbf{X} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{K}(L, \lambda, \beta), \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{X}\,|_{L=L_0} = \mathbf{0}, \tag{28}$$

и

$$\frac{d}{dL}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{X} = -\mathbf{X}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{X} - \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{X}\mathbf{X} - \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{K}(L, \lambda, \beta) \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{X}\,|_{L=L_0} = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Уравнения (28), (29) представляют собой достаточно простые линейные матричные уравнения. Их решение не составляет большого труда, по крайней мере, численно [12]. Усложнение, связанное с дифференцированием определителя в общей постановке, не является принципиальным и легко может быть рассмотрено при необходимости.

Опишем теперь полную процедуру решения исходной задачи Штурма — Лиувилля (1), (2) с использованием уравнений метода эволюции спектрального параметра. Если во втором краевом условии (2) матрицы вырожденные, с помощью преобразования (7) с учетом (15) переходим к регулярной вспомогательной краевой задаче (3), (9). Если матрицы невырожденные, можно сразу решать задачу (3), (4). Теперь нужные матрицы — невырожденные и можно вывести уравнения погружения. В нашем случае это уравнения (18) и (19) или (20). Далее решаем численно эволюционное уравнение (26) для спектрального параметра с начальными условиями, которые получаем аналитически при $\beta = 0$, на интервале $(0, 1)$ по β. Отметим, что в общем случае эволюционное уравнение получается аналогично (26), дифференцированием дисперсионного уравнения (22). При этом для всех значений β, которые необходимы для вычисления правой части (26), потребуется решать матричное уравнение Риккати (27) и линейные матричные уравнения (28), (29). Получив нужное значение спектрального параметра λ_j, решаем для него матричные уравнения (18) и (19). В результате получим спектр исходной задачи Штурма — Лиувилля и собственные функции.

Отметим, что решение матричного уравнения Риккати и линейных матричных уравнений численно значительно проще, чем решение исходной волновой краевой задачи [10, 11].

Обсуждение результатов

Нам удалось вывести уравнения метода инвариантного погружения, сводящего краевую задачу к задаче с начальными данными для системы уравнений Гельмгольца в случае сингулярных краевых условий, то есть при вырожденных матрицах, определяющих условия на границах. Преимущества метода инвариантного погружения перед исходными уравнениями Гельмгольца при численном моделировании и анализе стохастических краевых задач хорошо известны. Вместе с тем предложенное нами алгебраическое преобразование решает еще одну проблему. Если краевые условия на обеих границах одинаковые, то постановка начального условия к матричному уравнению Риккати невозможна, тогда как в выведенных нами уравнениях инвариантного погружения такой проблемы нет. Кроме обычных преимуществ, уравнения метода инвариантного погружения позволяют сформулировать дисперсионное уравнение для задачи Штурма — Лиувилля. Для систем уравнений этого сделано не было. Мы восполнили этот пробел и вывели эволюционное уравнение для спектрального параметра. Также нами были получены уравнения для производных решения матричного уравнения по спектральному параметру. Эти производные полезны при решении дисперсионного уравнения методом Ньютона. В силу характерных особенностей решения уравнения Риккати (наличие сингулярностей в некоторых точках интервала), в том числе матричного, решение дисперсионного уравнения напрямую может быть непростой задачей. В этом случае удобно воспользоваться эволюционным уравнением для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. Вариант такого уравнения также был получен. Таким образом, мы сформулировали подход и вывели все необходимые уравнения для решения векторной задачи Штурма — Лиувилля при произвольных краевых условиях, в том числе сингулярных.

Отметим, что сингулярности в решении матричного уравнения Риккати не являются проблемой при численном решении данного уравнения [8], [9], [15]. Отметим, что решение матричного уравнения Риккати общего вида, даже в случае постоянных коэффициентов, задача довольно трудная [12]. Полученное нами в рамках метода инвариантного погружения матричное уравнение Риккати в случае постоянных коэффициентов легко решается с помощью матричных экспонент. Последнее свойство позволяет получать рекуррентные соотношения для численного решения этого уравнения, аналогичные использованным в скалярном случае [9], [15]. Более того, подобные рекуррентные соотношения сразу же приводят к выражениям для собственных функций в виде матрицанта [16]. Исследование решений в виде матрицанта является направлением для дальнейшей работы.

Список литературы

[1] S. Bramley , L. Dieci , R. D. Russell, “Numerical Solution of Eigenvalue Problems for Linear Boundary Value ODES”, *Journal of Computational Physics*, **94** (1991), 382–402.

[2] В. И. Кляцкин, *Метод погружения в теории распространении волн*, Наука, М., 1986, 284 с.

[3] В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике.* Т. 1: *Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2008, 320 с.

[4] R. F. Pannatoni, “Coupled mode theory for irregular acoustic waveguides with loss”, *Акуст. журн.*, **51**:1 (2011), 41–55.

[5] В.Н. Зырянов, “Вторичные тороидальные вихри Тейлора над возмущениями дна во вращающейся жидкости”, *ДАН*, **427**:2 (2009), 192–198.

[6] В. А. Садовничий , Я. Т. Султанаев , А. М. Ахтямов, *Обратные задачи Штурма — Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями*, Изд-во Московского университета, М., 2009, 183 с.

[7] К. В. Кошель, “Численное решение задачи тропосферного распространения коротких радиоволн для конечного поверхностного импеданса”, *Радиотех. и Электр.*, **35**:3 (1990), 647–649.

[8] Дж. Касти , Р. Калаба, *Метод погружения в прикладной математике*, Мир, М., 1973.

[9] В. И. Голанд, К. В. Кошель, “Численное решение в задаче загоризонтного распространения ультра-коротких радиоволн для конечного поверхностного импеданса”, *Радиотех. и Электр.*, **35**:9 (1990), 1805–1809.

[10] В. И. Голанд, В. И. Кляцкин, “Асимптотический метод анализа стохастической задачи Штурма — Лиувилля. Метод погружения в теории распространении волн”, *Акуст. журн.*, **35**:5 (1989), 942–944.

[11] R. Bellman, G. M.P. Wing, “An Introduction to Invariant Imbedding”, *Classics in Applied Mathematics.*, 1992, № 8.

[12] А. И. Егоров, *Уравнение Риккати*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 328 с.

[13] М. И. Зеликин, “К теории матричного уравнения Риккати”, *Матем. сб.*, **182**:7 (1991), 970–984.

[14] М. Х. Захар-Иткин, “Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований”, *УМН*, **28**:3(171) (1973), 83–120.

[15] И. О. Ярощук, “О численном моделировании одномерных стохастических волновых задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **24**:11 (1984), 1748—1751.

[16] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004, 560 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 декабря 2011 г.

Alexandrova O. V., Gromasheva O. S., Kosolapkin G. Yu. The Immersion Method for the Solution of the Sturm — Liouville Problem in the Matrix Statement. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 136–145.

ABSTRACT

In this paper we propose a method for solving boundary-value wave problems described by the matrix system of Helmholtz equations. It has been shown that the Sturm — Liouville problems with singular matrices in the boundary conditions are reduced to the forms with nondegenerate matrices by using algebraic transformations. This allows to obtain matrix equations using the invariant imbedding method. The solution of the Sturm — Liouville problem is reduced to the solution of the Cauchy problem for the matrix Riccati equation. It has been shown that the solution of the matrix Riccati equation can be constructed for arbitrary boundary conditions chosen for reasons of convenience, and the solutions for given boundary conditions are expressed in terms of the reference solution of the matrix Riccati equation with algebraic transformations. An equation for the eigenvalues of the Sturm – Liouville problem has also been formulated. It is expressed through the solution of the matrix Riccati equation, and the evolution equation for the spectral parameter of Sturm — Liouville problem has been obtained.

Key words: *Sturm — Liouville problem, matrix Riccati equation, the immersion method.*