

© А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, И. А. Терлецкий¹

К формированию поля остаточных напряжений в окрестности сферической полости вязкоупругопластического материала

Приведены точные решения последовательности одномерных краевых задач о деформировании окрестности одиночного сферического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала гидростатическим давлением с последующей разгрузкой и нагреванием. Рассчитываются уровень и распределение остаточных напряжений и релаксация последних при нагревании. Принято, что свойства материала подчиняются линейной вязкоупругой модели Фойгта на стадии, предваряющей пластическое течение, и при разгрузке, а предел текучести зависит от температуры.

Ключевые слова: *упругость, вязкость, пластичность, остаточные напряжения.*

1. Введение

Усталостная прочность материалов определяется, главным образом, степенью роста их повреждаемости [1], то есть развитием в них дефектной структуры. Основными элементами такой структуры, ответственными за усталостную прочность, являются дефекты сплошности: микропоры, микротрещины. Такие дефекты могут развиваться, увеличиваясь в размерах, а могут «залечиваться» [2, 3]. В идеальной упругопластической среде наблюдался [4, 5] пороговый эффект приспособляемости дефектов сплошности к циклическим нагрузкам по типу «нагрузка – разгрузка». После каждой разгрузки геометрические размеры дефектов оставались неизменными; не изменялись также уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности дефектов сплошности. Очевидно, что подобная парадоксальная ситуация связана с тем, что не учитываются реологические свойства материала. Если учитывать вязкие свойства среды в процессах ее пластического течения, то размеры дефектов сплошности будут только увеличиваться с ростом числа циклов [5]. В работе [6] была решена краевая задача теории больших деформаций для одиночного дефекта при учете вязкости на стадиях, предшествующих пластическим течениям, и при разгрузке. В этой работе была предпринята попытка объяснить, что упрочнение материала происходит за счет «залечивания» в нем микродефектов сплошности. Было показано, что такой эффект действительно наблюдается, но количественно данный механизм упрочнения, связанный с уменьшением дефектов в размерах с каждым циклом «нагрузка-разгрузка», оказался незначительным из-за использования в [6] тензорно-линейного определяющего соотношения вязкоупругости и условия несжимаемости материала. В настоящей статье откажемся от последнего ограничения, но с целью получения аналитических решений ограничимся случаем малых деформаций. Необходимо отметить публикацию [7], где для случая цилиндрической симметрии

¹Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 5, Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова 8. Электронная почта: burenin@iacp.dvo.ru, lk@iacp.dvo.ru, iterlik@mail.ru

получено решение аналогичной краевой задачи упругопластичности, но без учета вязких свойств материала на всех стадиях его деформирования, включая процессы разгрузки.

2. Активное нагружение

Полагаем, что пространство заполнено вязкоупругой средой, свойства которой задаются определяющей зависимостью

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \xi \dot{e}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \dot{e}_{ij}. \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} , e_{ij} – компоненты тензоров напряжений и малых деформаций; λ , μ – параметры Ламе; ξ , η – объемная и сдвиговая вязкость; точками обозначены производные по времени. Соотношение (1) записано в прямоугольной декартовой системе координат и определяет линейную вязкоупругую среду Фойгта [8]. Считается, что среда может деформироваться и пластически, так что для полных деформаций d_{ij} справедливо разложение

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (2)$$

В (2) u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек соответственно.

Пусть в безграничной среде имеется сферическая полость радиусом r_0 . Переходя к сферической системе координат r , φ , θ , действующую активную нагрузку зададим в виде

$$\sigma_{rr} |_{r=R} = -\beta t, \quad \sigma_{rr} |_{r=r_0} = 0, \quad R \gg r_0. \quad (3)$$

Пренебрегая силами инерции в уравнении движения (квазистатическое приближение), во введенной сферической системе координат в рассматриваемом случае сферической симметрии уравнение равновесия записывается в форме

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0.$$

Пока пластическое течение не происходит ($p_{ij} = 0$), уравнение равновесия с учетом (1) и (2) принимает вид

$$(\lambda + 2\mu) \left(u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} \right) + (\xi + 2\eta) \frac{d}{dt} \left(u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} \right) = 0, \quad (4)$$

где $u = u_r(r, t)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений; штрихом обозначена частная производная функции по r . С учетом однородного начального условия, проинтегрировав (2), найдем

$$\begin{aligned} u(r, t) &= c_1(t) r + \frac{c_2(t)}{r^2}, \\ \sigma_{rr} &= (3\lambda + 2\mu) c_1 + (3\xi + 2\eta) \dot{c}_1 - \frac{4}{r^3} (\mu c_2 + \eta \dot{c}_2), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \frac{6}{r^3} (\mu c_2 + \eta \dot{c}_2), \\ c_1(t) &= \frac{\beta}{\gamma_0 r_0^3 (3\lambda + 2\mu)} \left(d^{-1} (1 - e^{-dt}) - t \right), \\ c_2(t) &= \frac{\beta}{4\gamma_0 \mu} \left(b^{-1} (1 - e^{-bt}) - t \right), \\ b &= \frac{\mu}{\eta}, \quad d = \frac{3\lambda + 2\mu}{3\xi + 2\eta}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{R_0^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение (5) справедливо только до того момента времени, когда напряженное состояние в некоторой точке среды выйдет на поверхность нагружения. В качестве последней принимаем цилиндр Мизеса

$$\Phi(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}) = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 - 8k^2 = 0. \quad (6)$$

В (6) k является постоянной среды (предел текучести). Согласно (6), среда оказывается пластически несжимаемой. Далее полагаются выполненными условия принципа максимума, то есть (6) является пластическим потенциалом, и скорости пластических деформаций связываются с напряжениями ассоциированным законом пластического течения. Подставляя (5) в (6), получаем, что впервые условие пластичности выполнится на границе полости $r = r_0$ в момент времени t_0 , вычисляемый зависимостью

$$t_0 = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{r_0^3}{R^3} \right), \quad q = \frac{3\beta}{4k}.$$

В последующее за t_0 время в среде будут присутствовать две области деформирования: область $m(t) \leq r \leq R$, где материал продолжает деформироваться вязкоупруго, и область $r_0 \leq r \leq m(t)$, где осуществляется пластическое течение. Положение упругопластической границы $r = m(t)$ следует определить решением задачи; оно однозначно связано с задаваемым нагружающим усилием. С целью получения аналитического решения примем $m(t)$ в виде

$$m(t) = r_0 e^{\frac{\beta}{4k}(t-t_0)}. \quad (7)$$

Данный закон продвижения упругопластической границы является следствием краевого условия

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = -\beta \left(t - \frac{m^3(t) - r_0^3}{qR^3} \right) \quad \text{при } t > t_0. \quad (8)$$

В области вязкоупругого деформирования $m(t) \leq r \leq R$ зависимости (5) остаются справедливыми с тем только отличием, что функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ снова неизвестны. Введем для данных функций новые обозначения $c_1 = b_1(t)$, $c_2 = b_2(t)$, учитывая начальные условия $b_1(t_0) = c_1(t_0)$, $b_2(t_0) = c_2(t_0)$. Проинтегрировав уравнение равновесия в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ с учетом (6), найдем

$$\sigma_{rr} = 4k \ln \frac{r_0}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(2 \ln \frac{r_0}{r} - 1 \right). \quad (9)$$

Неизвестные функции времени $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определим из условия равенства напряжений на упругопластической границе $r = m(t)$:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= B \left[e^{-d(t-t_0)} \left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d} \right) - \frac{e^{-dt}}{dt_0} - q \left(t - t_0 - \frac{1}{d} \right) - 1 \right], \\ b_2(t) &= \frac{k}{3(\mu + q\eta)} \left(r_0^3 e^{-b(t-t_0)} - m^3(t) \right) + \frac{kr_0^3}{3\mu} \left(e^{-b(t-t_0)} \left(\frac{\eta}{\mu t_0} - 1 \right) - \frac{\eta}{\mu t_0} e^{-bt} \right), \\ B &= \frac{4k}{3(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты напряжений в области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, согласно (1), можно выразить через обратимые деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi} + (\xi + 2\eta) \dot{e}_{rr} + 2\xi \dot{e}_{\varphi\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\lambda + \mu) e_{\varphi\varphi} + \lambda e_{rr} + 2(\xi + \eta) \dot{e}_{\varphi\varphi} + \xi \dot{e}_{rr}. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая зависимости для σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (9) и (11), для определения компонент упругих деформаций в области пластического течения, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi} + (\xi + 2\eta) \dot{e}_{rr} + 2\xi \dot{e}_{\varphi\varphi} &= 4k \ln \frac{r_0}{r}, \\ \mu (e_{rr} - e_{\varphi\varphi}) + \eta (\dot{e}_{rr} - \dot{e}_{\varphi\varphi}) &= k. \end{aligned} \quad (12)$$

Решением системы (12) являются функции

$$e_{rr} = 3F \ln \frac{r_0}{r} + \frac{3\lambda}{2\mu} F + \frac{2}{3} z(r) e^{-bt} + g(r) e^{-dt}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{rr} - \frac{k}{\mu} - z(r) e^{-bt}, \quad (13)$$

где $z(r)$, $g(r)$ – неизвестные функции.

Следуя [9, 10], найдем перемещения в области пластического течения. Согласно выражениям (2), для приращений деформаций справедливы зависимости

$$dd_{rr} = de_{rr} + dp_{rr}, \quad dd_{\varphi\varphi} = de_{\varphi\varphi} + dp_{\varphi\varphi}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения $\varepsilon_{ij}^p = \delta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$, учитывая, что поверхность нагружения задана в виде (6), получим

$$\frac{dp_{rr}}{2} = -dp_{\varphi\varphi} = -dp_{\theta\theta} = d\delta, \quad \varepsilon_{rr}^p + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = 0. \quad (14)$$

Согласно второй зависимости (14), в случае сферической симметрии при использовании условия пластичности (6) материал является пластически несжимаемым. Интегрируя по времени первое соотношение (14), найдем

$$p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi}. \quad (15)$$

Условие (15), согласно выражениям (2) и (12), может быть переписано в виде

$$e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi} = u' + \frac{2u}{r}. \quad (16)$$

Из второго соотношения (13) и из (16) следуют зависимости

$$e_{rr} = \frac{1}{3} \left(u' + \frac{2u}{r} + \frac{2k}{\mu} + 2z(r) e^{-bt} \right), \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3} \left(u' + \frac{2u}{r} - \frac{k}{\mu} - z(r) e^{-bt} \right). \quad (17)$$

Подстановка последних зависимостей в первое уравнение (12) позволяет получить уравнение для перемещений в области необратимого деформирования

$$(3\lambda + 2\mu) \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) + (3\xi + 2\eta) \frac{d}{dt} \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) - 4k \left(3 \ln \frac{r_0}{r} - 1 \right) = 0. \quad (18)$$

Решением уравнения (18) является функция

$$u = 3Br \ln \frac{r_0}{r} + w(r) e^{-dt} + \frac{h(t)}{r^2}, \quad (19)$$

где $h(t)$, $w(r)$ – неизвестные функции. Из первых зависимостей (13) и (17) при учете (19) следует

$$g(r) = \frac{1}{3} \left(w'(r) + \frac{2w(r)}{r} \right). \quad (20)$$

Согласно (2), (13), (18) и (20), определим компоненту p_{rr} пластических деформаций:

$$p_{rr} = -\frac{2}{3} B \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{2h(t)}{r^3} + \frac{2}{3} \left(w'(r) - \frac{w(r)}{r} \right) e^{-dt} - \frac{2}{3} z(r) e^{-bt}. \quad (21)$$

В области обратимого деформирования для компонент обратимых деформаций $e_{rr} = u' = b_1(t) - \frac{2b_2(t)}{r^3}$, $e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = b_1(t) + \frac{b_2(t)}{r^3}$ получаем зависимости

$$e_{rr} + 2e_{\varphi\varphi} = 3b_1(t), \quad e_{rr} - e_{\varphi\varphi} = -\frac{3b_2(t)}{r^3}. \quad (22)$$

Условие непрерывности компонент обратимых деформаций на границе $r = m(t)$ и равенства (13) и (22) позволяют определить неизвестные функции $z(r)$, $g(r)$ на упругопластической границе:

$$g(m) = b_1(t) + F \left(3 \ln \frac{m}{r_0} + 1 \right) e^{dt}, \quad z(m) = - \left(\frac{k}{\mu} + \frac{3b_2(t)}{m^3} \right) e^{bt}. \quad (23)$$

Учитывая равенства (7) и (10), из (23) получаем

$$\begin{aligned} g(r) &= B \left[e^{dt_0} \left(\frac{1}{dt_0} + \frac{q}{d} \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - 1 \right) \right) - \frac{1}{dt_0} \right], \\ z(r) &= \frac{k\eta}{\mu} \left[e^{bt_0} \left(\frac{q}{\mu+q\eta} - \frac{1}{\mu t_0} \right) + \frac{1}{\mu t_0} \right] \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{q}{\mu+q\eta} e^{bt_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из уравнения (20), учитывая зависимость (24) для функции $g(r)$, найдем функцию $w(r)$ с точностью до неизвестной постоянной h_0 :

$$w(r) = Br \left[e^{dt_0} \left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d} \right) - \frac{1}{dt_0} + \frac{q^2 e^{dt_0}}{d(d+q)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} \right] + \frac{h_0}{r^2}. \quad (25)$$

Неизвестную функцию $h_1(t) = h(t) + h_0 e^{-dt}$ определим из условия непрерывности перемещений в области вязкоупругого деформирования (5) и в области пластического течения (19) на упругопластической границе $r = m(t)$, учитывая полученные зависимости (10) для функций $b_1(t)$ и $b_2(t)$ и (25) для функции $w(r)$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= Bm^3 \left[3 \ln \frac{m}{r_0} - e^{-dt} \left(e^{dt_0} \left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d} \right) - \frac{1}{dt_0} \right) - \frac{q^2 e^{-d(t-t_0)}}{d(d+q)} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} \right] + \\ &+ b_1(t) m^3 + b_2(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Подстановка найденных функций $z(r)$, $w(r)$ и $h_1(t)$ в выражения (19) и (21) позволяет найти окончательные зависимости для компонент пластических деформаций и перемещений в области пластического течения:

$$\begin{aligned} u &= Br \left[3 \ln \frac{r}{r_0} + \left(e^{dt_0} \left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d} \right) - \frac{1}{dt_0} \right) e^{-dt} - A \frac{m^3}{2r^2} \right] + \\ &+ \frac{k\eta r_0^3}{3\mu r^2} \left[e^{-b(t-t_0)} \left(\frac{1}{\mu t_0} - \frac{q}{\mu+q\eta} \right) - \frac{1}{\mu t_0} e^{-bt} \right] + \\ &+ \frac{Bq^2 e^{-d(t-t_0)}}{d(d+q)} \left[r \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - \frac{m^3}{r^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} p_{rr} &= -2p_{\varphi\varphi} = \psi_1 + \psi_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} e^{-d(t-t_0)} + \psi_3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} e^{-b(t-t_0)} + \\ &+ \left(\frac{m}{r} \right)^3 \left(A + \psi_4 e^{-d(t-t_0)} \right), \\ \psi_1 &= -\frac{3B(\lambda+2\mu)}{2\mu}; \quad \psi_2 = \frac{2Bq}{d+q}; \quad \psi_3 = \frac{2kq\eta}{3\mu(\mu+q\eta)}, \\ \psi_4 &= \frac{Bq^2}{d(d+q)} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}}; \quad A = 2B \left[q \left(t - t_0 - \frac{1}{d} \right) + 1 - 3 \ln \frac{m}{r_0} \right] + \frac{2k}{3(\mu+q\eta)}. \end{aligned}$$

На рис. 1 и рис. 2 приведены распределения безразмерных перемещений (сплошная линия) и напряжений соответственно, при этом $u \rightarrow \frac{u(r)}{R}$, $\sigma \rightarrow \frac{\sigma_{rr}}{\lambda + 2\mu}$ (сплошная линия)

и $\sigma \rightarrow \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\lambda + 2\mu}$ (штриховая линия) в зависимости от пространственной координаты $\frac{r}{R}$ в момент времени $\tau_1 = \frac{\mu}{\xi} t_1 = 253.02$ ($m(t_1) R^{-1} = 0.17$). Постоянные среды принимались следующими: $\lambda\mu^{-1} = 4.1$, $k\mu^{-1} = 0.00377$, $\xi_0 = \frac{kR_0}{\xi v_0} = 4.92 \cdot 10^{-6}$ ($v_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$), $\frac{\eta}{\xi} = 2.09$, $\beta_0 = \frac{\beta\xi_0}{\mu^2} = 3.8 \cdot 10^{-18}$, (ρ – плотность среды).

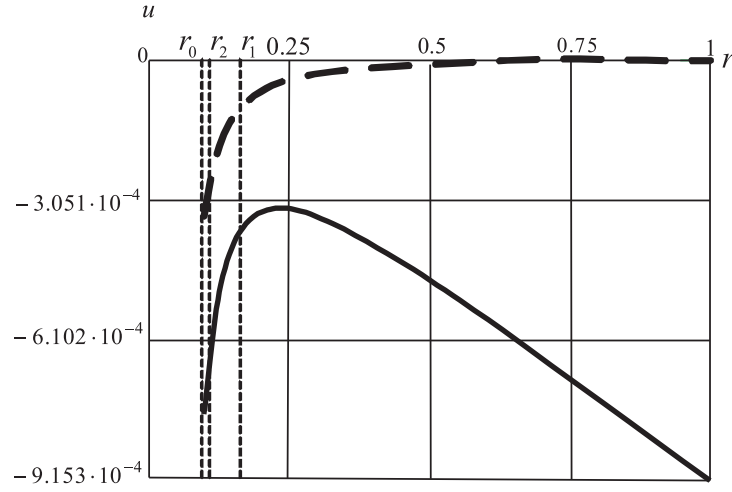


Рис. 1. Распределение перемещений

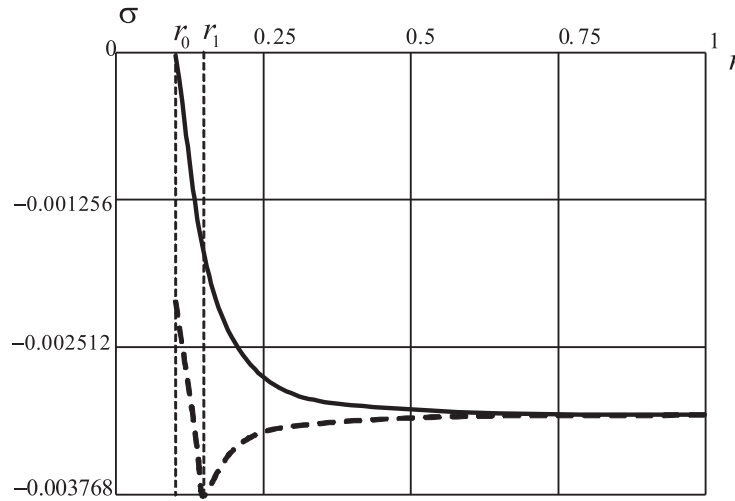


Рис. 2. Распределение напряжений в конечный момент нагрузки

3. Процесс разгрузки

Считаем, что с момента времени $t = t_1 > t_0$, среда разгружается, например, по закону

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = -\theta [1 - \alpha (t - t_1)], \quad \theta = \beta \left(t_2 - \frac{m^3(t_1) - r_0^3}{qR^3} \right), \quad \alpha = const. \quad (28)$$

Известно [4, 5, 11], что при значительном уровне достигнутого нагружающего усилия θ в процессе разгрузки возможно повторное пластическое течение, связанное с возникающими растягивающими усилиями в окрестности полости. Рассмотрим сначала случай, когда θ таково, что повторного пластического течения не возникает. Тогда в процессе разгрузки существуют две области: область $r_0 \leq r \leq m(t_1) = m_1$, где накопленные пластические деформации далее при разгрузке не изменяются, и область $m_1 \leq r \leq R$, где пластические деформации отсутствуют. В последней области справедливы зависимости (5), где функции $c_1(t) = a_1(t)$, $c_2(t) = a_2(t)$ снова следует считать неизвестными и определять их согласно новым начальным условиям при $t = t_1$ и новым краевым условиям при $r = R$ и $r = m_1$. В этой области $r_0 \leq r \leq m_1$, где пластические деформации присутствуют, компоненты напряжений, согласно (1), можно выразить через перемещения $u(r, t)$ и известные накопленные пластические деформации p_{rr} :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu (u' - p_{rr}) + \xi \frac{d}{dt} \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) + 2\eta \frac{d}{dt} (u' - p_{rr}), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left(u' - \frac{u}{r} - \frac{3}{2}p_{rr} \right) + 2\eta \frac{d}{dt} \left(u' - \frac{u}{r} - \frac{3}{2}p_{rr} \right), \\ e_{rr} &= u' - p_{rr}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} - p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{p_{rr}}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Если, как и ранее, рассмотреть квазистатический случай, то есть пренебречь силами инерции в уравнении движения, то при подстановке в него напряжений (29) получаем дифференциальное уравнение для вычисления перемещений:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} \right) + (\xi + 2\eta) \frac{d}{dt} \left(u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} \right) = \\ = \frac{12B}{r_0} e^{-d(t_1-t_0)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}-1} - \frac{4k\eta(b-q)}{r_0(\mu+q\eta)} e^{-b(t_1-t_0)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}-1} - \frac{9B(\lambda+2\mu)}{r}. \end{aligned} \quad (30)$$

Как ранее отмечалось, возможность пренебречь силами инерции при записи (30) имеется, поскольку их вклад в рассматриваемом медленном процессе разгрузки незначителен. Неизменные со временем пластические деформации исключены в (30) при помощи второй зависимости из (27), если положить в ней $t = t_1$. Первая из зависимостей (27) при $t = t_1$ является начальным условием для (30). Интегрируя уравнение (27) при таком начальном условии, найдем

$$\begin{aligned} u &= Br(1 - 3\ln r) + q_1 r_0 \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} e^{-a(t-t_1)} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}+1} + \\ &+ q_2 r_0 \left(1 - e^{-a(t-t_1)} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}+1} + y_1(t)r + \frac{y_2(t)}{r^2}, \\ q_1 &= \frac{4B\mu q^2}{3d(\lambda + 2\mu)(d + q)} e^{-d(t_1-t_0)}, \quad a = \frac{\lambda + 2\mu}{\xi + 2\eta}, \\ q_2 &= \frac{4k\eta q^2}{9b(\lambda + 2\mu)(\mu + q\eta)} e^{-b(t_1-t_0)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в (31) следует определить согласно начальным и краевым условиям задачи.

Подстановка компонент пластических деформаций (27) и перемещений (31) в зависимо-

сти для компонент напряжений (29) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (3\lambda + 2\mu) y_1(t) + (3\xi + 2\eta) \dot{y}_1(t) - \frac{4}{r^3} (\mu y_2(t) + \eta \dot{y}_2(t)) + H_4 \frac{m_1^3}{r^3} + \\
&+ 4k \left(\frac{1}{3} - \ln r \right) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} \left(H + H_1 e^{-a(t-t_1)} \right) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} \left(H_2 + H_3 e^{-a(t-t_1)} \right), \\
\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} \left(M + M_1 e^{-a(t-t_1)} \right) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} \left(M_2 + M_3 e^{-a(t-t_1)} \right) + \\
&+ 2k + M_4 \frac{m_1^3}{r^3} - \frac{4}{r^3} (\mu y_2(t) + \eta \dot{y}_2(t)), \\
H &= (3\lambda + 2\mu) q_2, \quad H_1 = -l q_2, \quad H_2 = (3\lambda + 2\mu) q_1, \quad H_3 = l q_3, \\
H_4 &= 4\mu B \left[3 \ln \frac{m_1}{r_0} - q \left(t_1 - t_0 - \frac{1}{d} \right) - 1 - \left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} \frac{q^2}{d(d+q)} e^{-d(t_1-t_0)} \right] - \\
&- \frac{4k\mu}{3(\mu + q\eta)}, \quad M = \frac{6b}{q} \mu q_2 - \frac{2kq\eta}{\mu + q\eta} e^{-b(t_1-t_0)}, \quad M_1 = \frac{3b}{2q} l q_2, \\
M_2 &= \frac{3d}{2q} \mu q_1, \quad M_3 = -\frac{3d}{2q} l q_3, \quad M_4 = \frac{3}{2} H_4, \quad l = \frac{4(\lambda\eta - \mu\xi)}{\xi + 2\eta}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Используя второе граничное условие из (3), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= 4k \ln \frac{r_0}{r} + H_4 \left(\frac{m_1^3}{r^3} - \frac{m_1^3}{r_0^3} \right) + \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} - 1 \right) \left(H + H_1 e^{-a(t-t_1)} \right) + \\
&+ \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - 1 \right) \left(H_2 + H_3 e^{-a(t-t_1)} \right) - 4 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) (\mu y_2 + \eta \dot{y}_2), \\
(3\lambda + 2\mu) y_1 + (3\xi + 2\eta) \dot{y}_1 &= 4k \left(\ln r_0 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{r_0^3} (\mu y_2 + \eta \dot{y}_2) - \\
&- H - H_2 - e^{-a(t-t_1)} (H_1 + H_3) - H_4 \frac{m_1^3}{r_0^3}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Из условия равенства напряжений σ_{rr} на границе $r = m_1$ следует уравнение

$$\begin{aligned}
(y_2 - \gamma a_2) + \eta (\dot{y}_2 - \gamma \dot{a}_2) &= -\gamma_1 \left(\theta [1 - \alpha(t-t_1)] + N e^{-a(t-t_1)} + N_1 \right), \\
\gamma &= \frac{r_0^3 (m_1^3 - R^3)}{R^3 (m_1^3 - r_0^3)}, \quad \gamma_1 = \frac{r_0^3 m_1^3}{4 (m_1^3 - r_0^3)}, \\
N &= H_1 \left(\left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} - 1 \right) + H_3 \left(\left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - 1 \right), \\
N_1 &= 4k \ln \frac{r_0}{m_1} + H \left(\left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} - 1 \right) + H_2 \left(\left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - 1 \right) + H_4 \left(1 - \frac{m_1^3}{r_0^3} \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Решение уравнения (34) получаем в виде

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \gamma a_2(t) - \frac{\gamma_1}{\mu} \left(N_1 + \theta [1 - \alpha(t-t_1)] - \frac{\alpha\theta}{b} \right) + \frac{\gamma_1 N}{\eta(a-b)} e^{-a(t-t_1)} + N_2 e^{-b(t-t_1)}, \\
N_2 &= y_2(t_1) - \gamma a_2(t_1) + \frac{\gamma_1}{\mu} \left(N_1 + \theta - \frac{\alpha\theta}{b} \right) - \frac{\gamma_1 N}{\eta(a-b)}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Функции $y_2(t_1)$ и $a_2(t_1)$, так же, как и функции $y_1(t_1)$ и $a_1(t_1)$ являются известными функциями – согласно условию совпадения перемещений в области $m_1 \leq r \leq R_0$ в момент времени $t = t_1$. Из второй зависимости (5) и второго соотношения (33), используя условие (28) и зависимости (35), получаем уравнение

$$\begin{aligned} (3\lambda + 2\mu) \left(y_1 - \gamma \frac{R^3}{r_0^3} a_1 \right) + (3\xi + 2\eta) \left(\dot{y}_1 - \gamma \frac{R^3}{r_0^3} \dot{a}_1 \right) &= -\frac{R^3}{m_1^3 - r_0^3} \theta [1 - \alpha(t - t_1)] + \\ + N_3 e^{-a(t-t_1)} + N_4, \quad N_3 &= -\frac{m_1^3}{m_1^3 - r_0^3} N - H_1 - H_3, \\ N_4 &= 4k \left(\ln r_0 - \frac{1}{3} \right) - \frac{m_1^3}{m_1^3 - r_0^3} N_1 - H - H_2 - H_4 \frac{m_1^3}{r_0^3}. \end{aligned} \quad (36)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{m_1^3 - R^3}{m_1^3 - r_0^3} a_1(t) + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[N_4 - \frac{R^3}{m_1^3 - r_0^3} \left(\theta [1 - \alpha(t - t_1)] + \frac{a\theta}{d} \right) \right] + \\ &+ \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d - a)} e^{-a(t-t_1)} + N_5 e^{-d(t-t_1)}, \\ N_5 &= y_1(t_1) - \gamma a_1(t_1) \frac{R^3}{r_0^3} - \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[N_4 - \frac{R^3}{m_1^3 - r_0^3} \theta \left(1 + \frac{a}{d} \right) \right] - \\ &- \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d - a)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из условия равенства перемещений при $r = m_1$, используя найденные зависимости (35) между функциями $a_2(t)$ и $y_2(t)$ и (37) между функциями $a_1(t)$ и $y_1(t)$, функцию $a_1(t)$ можно выразить через $a_2(t)$:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{1}{R^3} a_2(t) + \gamma_2 \left(N_6 - N_7 \theta [1 - \alpha(t - t_1)] + N_5 m_1 e^{-d(t-t_1)} + \frac{N_2}{m_1^2} e^{-b(t-t_1)} \right), \\ N_6 &= 3Bm_1 \ln \frac{r_0}{m_1} + q_1 r_0 \left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q} + 1} + q_2 r_0 \left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q} + 1} - \frac{\gamma}{\mu m_1^2} \left(N + \frac{\alpha\theta}{b} \right) - \\ &- \frac{m_1}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{m_1^3 - r_0^3} \left(\frac{R^3 \alpha \theta}{d} + m_1^3 N + H + H_2 + H_4 \frac{m_1^3}{r_0^3} \right) \right), \\ N_7 &= \frac{m_1}{m_1^3 - r_0^3} \left(\frac{R^3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{r_0^3}{4\mu} \right), \quad \gamma_2 = \frac{m_1^3 - r_0^3}{m_1 (R^3 - r_0^3)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Дифференциальное уравнение для функции $a_2(t)$ следует из условия равенства напряжений на упругопластической границе $r = m_1$. С использованием (38) такое уравнение записывается в форме

$$\begin{aligned} 3(\lambda + 2\mu) a_2 + 3(\xi + 2\eta) \dot{a}_2 &= -R^3 \left(N_8 - N_9 \theta [1 - \alpha(t - t_1)] + N_{10} m_1 e^{-b(t-t_1)} \right), \\ N_8 &= -\gamma_2 ((3\lambda + 2\mu) N_6 + (3\xi + 2\eta) \alpha \theta N_7), \\ N_9 &= 1 - (3\lambda + 2\mu) \gamma_2 N_7, \quad N_{10} = \frac{\gamma_2}{m_1^2} N_2 (3\lambda + 2\mu - b(3\xi + 2\eta)). \end{aligned} \quad (39)$$

Решением уравнения (39) является функция

$$\begin{aligned} a_2(t) &= -\frac{R^3}{3(\xi + 2\eta)} \left[\frac{1}{a} (N_8 - N_9 \theta [1 - \alpha(t - t_1)]) + N_{10} \frac{e^{-b(t-t_1)}}{a - b} - N_9 \frac{\alpha\theta}{a^2} \right] + \\ &+ N_{11} e^{-a(t-t_1)}, \\ N_{11} &= a_2(t_1) + \frac{R^3}{3(\xi + 2\eta)} \left[\frac{1}{a} \left(N_8 - N_9 \theta \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) \right) + \frac{N_{10}}{a - b} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, по известной функции $a_2(t)$ из соотношений (38), (37) и (35) находим $a_1(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

4. Повторное пластическое течение при разгрузке

В случае возникновения при разгрузке повторного пластического течения [4, 11], вызываемого растягивающими напряжениями в окрестности границы $r = r_0$, полученное в области $r_0 \leq r \leq m(t)$ решение неприменимо. Полагаем, что процесс разгрузки происходит, в соответствии с ранее полученным решением, до момента времени $t = t_2$. В последующее время от границы $r = r_0$ развивается новая область течения в условиях продолжающейся разгрузки. Теперь уравнение равновесия следует проинтегрировать в трех областях: в области $m_1 \leq r \leq R$, где пластические деформации отсутствуют; в области $f(t) \leq r \leq m_1$, где накопленные пластические деформации не изменяются; и в области повторного пластического течения $r_0 \leq r \leq f(t)$. В первой из этих областей перемещения и напряжения соответствуют зависимостям (5), в которых неизвестные функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ необходимо найти, используя новые краевые условия. Во второй области для перемещений и напряжений справедливыми остаются зависимости (9), (13) и (19). Однако в них неизвестные функции $z(r)$, $g(r)$, $w(r)$ и $h(t)$ подлежат определению, исходя из новых краевых и начальных условий.

Интегрируя уравнение равновесия в области повторного пластического течения, получаем

$$\sigma_{rr} = -4k \ln \frac{r_0}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right). \quad (41)$$

Упругие деформации и перемещения в данной области найдем аналогично приведенной выше цепочке соотношений (11) — (20). На таком пути следует

$$\begin{aligned} e_{rr} &= -3B \ln \frac{r_0}{r} + \frac{3\lambda}{2\mu} B + \frac{2}{3} z_1(r) e^{-bt} + g_1(r) e^{-dt}, \\ e_{\varphi\varphi} &= e_{rr} + \frac{k}{\mu} - z_1(r) e^{-bt}, \\ u &= 3Br \ln \frac{r_0}{r} + w_1(r) e^{-dt} + \frac{h_1(t)}{r^2}, \\ g_1(r) &= \frac{1}{3} \left(w_1'(r) + \frac{2w_1(r)}{r} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Соотношениями (42) вводятся новые неизвестные функции $z_1(r)$, $g_1(r)$, $w_1(r)$ и $h_1(t)$. Для их отыскания следует воспользоваться начальными и краевыми условиями. К ним относятся найденное в предыдущем пункте решение, вычисленное при $t = t_2$, и условие непрерывности перемещений и напряжений при $r = f(t)$.

Способ нахождения, согласно этим условиям, неизвестных функций $c_1(t)$, $c_2(t)$, $z(r)$, $g(r)$, $w(r)$, $h(t)$, $z_1(r)$, $g_1(r)$, $w_1(r)$ и $h_1(t)$ мало отличается от того, каким вычислялась часть таких функций в предыдущем параграфе, поэтому здесь опускаем соответствующие громоздкие вычисления. Приведем лишь графические зависимости, иллюстрирующие решения. В момент времени $\tau_k = 6692.8$ (конечный момент разгрузки) распределение безразмерных остаточных напряжений представлено на рис. 3.

Отметим основные качественные особенности в поведении сферической поры и в распределении остаточных напряжений в ее окрестности, следующие из полученных решений соответствующих краевых задач теории вязкоупругости. После разгрузки размеры полости уменьшаются и далее практически не изменяются за счет продолжающейся ползучести материала. Также едва заметной оказывается и послеразгрузочная релаксация остаточных напряжений. Таким образом, при учете реологических свойств материала на стадиях,

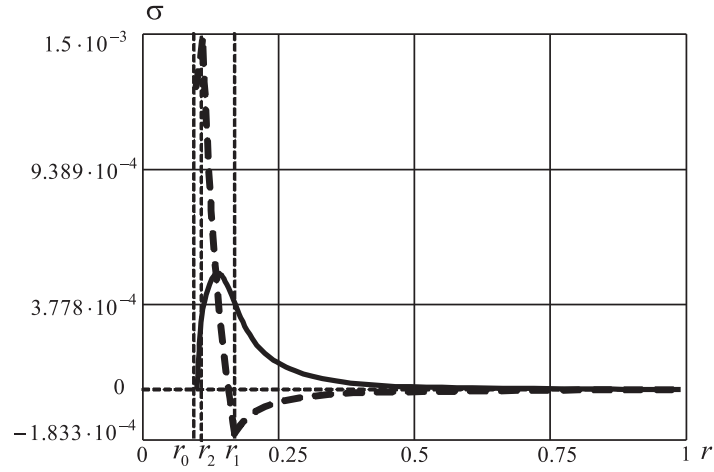


Рис. 3. Распределение напряжений при полной разгрузке

предваряющих пластическое течение, и на стадиях разгрузки отмечаем эффект упрочнения материала за счет его интенсивного гидростатического сжатия. Однако количественная сторона данного эффекта незначительна, что противоречит опытным данным. Считаем, что такой эффект связан с использованием теории малых деформаций в условиях линейной зависимости напряжений от деформаций и скоростей их изменения.

5. Влияние нагрева на интенсификацию процесса релаксации напряжений

Уменьшение уровня остаточных напряжений связано с технологическим приемом отпуска, основанном на нагревании готового изделия и выдерживании его при такой повышенной температуре. Полагаем, что в момент времени $t = t_3$ нагружающее давление уменьшилось до нуля. Считаем, что достигнутый уровень напряжений в таком механическом воздействии не приводит к возникновению повторного пластического течения. Начиная с момента времени $t = t_3$, нагреваем материал изделия. Для вычисления напряжений используем обобщенный закон Дюгамеля — Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\lambda \epsilon_{kk} - \alpha_0 \zeta(t) + \xi \epsilon_{kk}^e) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} + 2\eta \epsilon_{ij}^e, \\ \alpha_0 &= 3K\alpha T_0^{-1}, \quad \zeta(t) = \frac{T(t) - T_0}{T_0}, \quad \epsilon_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}, \end{aligned} \quad (43)$$

$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — коэффициент всестороннего сжатия, α — коэффициент линейного расширения.

Зададим функцию $\zeta(t)$ в виде линейной зависимости от времени

$$\zeta(t) = \gamma(t - t_3).$$

В области вязкоупругого деформирования $m_1 \leq r \leq R$ перемещения определяются уравнением равновесия и имеют вид

$$u(r, t) = a_3(t)r + \frac{a_4(t)}{r^2}. \quad (44)$$

При этом, согласно начальным условиям, $a_3(t_3) = a_1(t_3)$, $a_4(t_3) = a_2(t_3)$. С учетом

краевого условия $\sigma_{rr}|_{r=R} = 0$, исходя из (43) и (44), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 4 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) (\mu a_4 + \eta \dot{a}_4), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{6}{r^3} (\mu a_4 + \eta \dot{a}_4), \\ (3\lambda + 2\mu) a_3 + (3\xi + 2\eta) \dot{a}_3 &= \frac{4}{R^3} (\mu a_4 + \eta \dot{a}_4) + \alpha_0 \zeta(t).\end{aligned}\tag{45}$$

В области с накопленными пластическими деформациями $r_0 \leq r \leq m_1$ последние неизменны (тепловое расширение относим к обратимому процессу деформирования) и, согласно второй зависимости (27), записываются в виде

$$\begin{aligned}p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi} &= \psi_1 + \psi_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} e^{-d(t_1-t_0)} + \psi_3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} e^{-b(t_1-t_0)} + \\ &+ \left(\frac{m_1}{r} \right)^3 \left(A_1 e^{-d(t_1-t_0)} + A_2 \right), \quad A_1 = \frac{Bq^2}{d(d+q)} \left(\frac{m_1}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}}, \\ A_2 &= 2B \left[q \left(t_1 - t_0 - \frac{1}{d} \right) + 1 + 3 \ln \frac{m_1}{r_0} \right] + \frac{2k}{3(\mu + q\eta)}.\end{aligned}\tag{46}$$

Исключая с помощью (46) необратимые деформации из рассмотрения, получаем распределение напряжений и, как следствие решения уравнения равновесия, перемещений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 4k \ln \frac{r_0}{r} + H_4 \left(\frac{m_1^3}{r^3} - \frac{m_1^3}{r_0^3} \right) + \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} - 1 \right) (H + H_1 e^{-a(t-t_1)}) + \\ &+ \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} - 1 \right) (H_2 + H_3 e^{-a(t-t_1)}) - 4 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) (\mu x_4 + \eta \dot{x}_4), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}} (M + M_1 e^{-a(t-t_1)}) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}} (M_2 + M_3 e^{-a(t-t_1)}) + \\ &+ 2k + M_4 \frac{m_1^3}{r^3} - \frac{6}{r^3} (\mu x_4(t) + \eta \dot{x}_4(t)), \\ u &= Br(1 - 3 \ln r) + q_1 r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}+1} + q_2 r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}+1} + \\ &+ e^{-a(t-t_1)} r_0 \left(q_3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3d}{q}+1} - q_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{3b}{q}+1} \right) + x_3(t) r + \frac{x_4(t)}{r^2}.\end{aligned}\tag{47}$$

При записи (47) учитывалось отсутствие радиального напряжения на границе $r = r_0$. Функции $x_3(t)$ и $x_4(t)$ в (47) неизвестны; для них выполнены начальные условия $x_3(t_3) = x_1(t_3)$, $x_4(t_3) = x_2(t_3)$. Краевые условия, заключающиеся в равенстве напряжений σ_{rr} при $r = m_1$, вместе с последним соотношением из (45) позволяют записать обыкновенные дифференциальные уравнения для этих функций:

$$\begin{aligned}(3\lambda + 2\mu) \left(x_3 - \gamma \frac{R^3}{r_0^3} a_3 \right) + (3\xi + 2\eta) \left(\dot{x}_3 - \gamma \frac{R^3}{r_0^3} \dot{a}_3 \right) &= \\ = \frac{R^3 - r_0^3}{m_1^3 - r_0^3} \alpha_0 \zeta(t) + N_3 e^{-a(t-t_1)} + N_4, \\ \mu (x_4 - \gamma a_4) + \eta (\dot{x}_4 - \gamma \dot{a}_4) &= -\gamma_1 \left(N e^{-a(t-t_1)} + N_1 \right).\end{aligned}\tag{48}$$

В уравнения (48) входят четыре неизвестных функции. Интегрирование (48) позволяет установить зависимость между ними:

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \frac{m_1^3 - R^3}{m_1^3 - r_0^3} a_3(t) + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[N_4 + \frac{R^3 - r_0^3}{m_1^3 - r_0^3} \alpha_0 \gamma \left(t - t_3 - \frac{1}{d} \right) \right] + \\
&+ \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d - a)} e^{-a(t-t_1)} + \Gamma_1 e^{-d(t-t_3)}, \\
x_4(t) &= \gamma a_4(t) - \frac{\gamma_1 N_1}{\mu} + \frac{\gamma_1 N}{\eta(a - b)} e^{-a(t-t_1)} + \Gamma_2 e^{-b(t-t_1)}, \\
\Gamma_1 &= x_3(t_3) - \frac{m_1^3 - R^3}{m_1^3 - r_0^3} a_3(t_3) - \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[N_4 - \frac{R^3 - r_0^3}{m_1^3 - r_0^3} \frac{\alpha_0 \gamma}{d} \right] - \\
&- \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d - a)} e^{-a(t_3-t_1)}, \\
\Gamma_2 &= x_4(t_3) - \gamma a_4(t_3) + \frac{\gamma_1 N_1}{\mu} - \frac{\gamma_1 N}{\eta(a - b)} e^{-a(t_3-t_1)}.
\end{aligned}$$

Связь между функциями $a_3(t)$ и $a_4(t)$ находится из условия равенства перемещений на упругопластической границе $r = m_1$:

$$a_3(t) = -\frac{1}{R^3} a_4(t) + \gamma_2 \left(N_6 + N_5 m_1 e^{-d(t-t_1)} + \frac{N_2}{m_1^2} e^{-b(t-t_1)} \right) + \frac{\alpha_0 \gamma (t - t_3 - d^{-1})}{3\lambda + 2\mu}.$$

Подстановка последней зависимости в последнее соотношение (45) позволяет найти $a_4(t)$ и, следовательно, все неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned}
a_4(t) &= -\frac{R^3}{3(\xi + 2\eta)} \left[\frac{N_{11}}{a} + N_{10} \frac{e^{-b(t-t_3)}}{a - b} \right] + \Gamma_3 e^{-a(t-t_3)}, \\
\Gamma_3 &= a_4(t_3) + \frac{R^3}{3(\xi + 2\eta)} \left[\frac{N_8}{a} + \frac{N_{10}}{a - b} \right], \quad N_{11} = \gamma_2 (3\lambda + 2\mu) N_6.
\end{aligned}$$

Расчеты остаточных напряжений по зависимостям полученных точных решений показали, что их заметной релаксации при нагревании не происходит. Данный опытный факт не может быть промоделирован на основе линейной вязкоупругой модели Фойгта даже в условиях падения предела текучести материала с ростом температуры. Для моделирования технологического приема отпуска материала изделий необходимо использовать нелинейные модели ползучести, не ограничиваясь случаем малых деформаций.

Список литературы

- [1] В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова, *Нелинейная механика разрушения*, «Самарский университет», Самара, 2001, 632 с.
- [2] Г. П. Анастасиади, М. В. Сильников, *Неоднородность и работоспособность стали*, «Полигон», Санкт-Петербург, 2002, 624 с.
- [3] В. И. Горелов, «Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов», *Прикл. механика и техн. физика*, 1984, № 5, 157–158.
- [4] А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник, «Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды», *ДАН*, **375**:6 (2000), 767–769.
- [5] А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, *Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании*, Из-во ДВГТУ, Владивосток, 2011, 280 с.
- [6] А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Е. В. Мурашкин, «Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала», *Прикл. механика и техн. физика*, **47**:2 (2006), 110–119.

- [7] А. А. Буренин, Л. В. Ковтаниук, “Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде”, *Проблемы механики неупругих деформаций. Сборник статей, посвященный 70-летию Д. Д. Ивлева*, 2001, 74–94.
- [8] А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, *Основы математической теории термоупругости*, Наука, М., 1970, 328 с.
- [9] Д. Д. Ивлев, “Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности”, *В кн. Успехи механики деформируемых сред (к 100-летию со дня рождения академика Б. Г. Галеркина)*, 1975, 236–240.
- [10] А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев, *Математическая теория пластичности*, Физматлит, М., 2001, 704 с.
- [11] А. А. Буренин, Л. В. Ковтаниук, М. В. Полоник, “Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды”, *Прикл. математика и механика*, **67**:2 (2003), 316–325.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 5 июня 2012 г.

Burenin A. A., Kovtaniuk L. V., Terletskiy I. A. To the Formation of Residual Stress Field in the Vicinity of a Spherical Cavity Viscoelastoplastic Material. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 146–159.

ABSTRACT

Exact solution of a sequence of one-dimensional boundary value problems on the formation of a neighborhood of single spherical defect continuity viscoelastoplastic hydrostatic pressure, followed by unloading and heating are resulted. The level and distribution of residual stresses and the relaxation of the latter when heated are calculated. It is accepted, that properties of a material submit to linear viscoelastic Voigt model at a stage anticipating plastic flow, and at unloading, and the yield stress depends on temperature.

Key words: *elasticity, viscosity, plasticity, residual stresses.*