ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 2. С. 184–194

УДК 517.54
MSC2010 30A10, 30C25, 30C15

© В. Н. Дубинин[1]

Об одном классе однолистных функций

Изучаются мероморфные и однолистные функции, заданные в комплексной плоскости с радиальными разрезами. Доказываются теоремы покрытия и многоточечные теоремы искажения для таких функций и даются некоторые приложения к оценкам рациональных функций.

Ключевые слова: *мероморфные функции, однолистные функции, теоремы искажения, рациональные функции, емкости конденсаторов, диссимметризация.*

Введение

Область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ назовем лучевой областью, если ее дополнение состоит из конечного числа радиальных лучей, то есть лучей вида $|z| \geq r$, $\arg z = \varphi$, где r – положительная, а φ – произвольная вещественные постоянные. Граничный луч такой области будем называть коротко лучом области. Пусть $m \geq 1$ натуральное число. Обозначим через $\mathcal{L}(m)$ класс функций f, каждая из которых мероморфна и однолистна в некоторой лучевой области D_f с m граничными лучами, причем $f(0) = 0$. Пусть $\mathcal{L}(m, n)$ – подкласс класса $\mathcal{L}(m)$, состоящий только из тех функций f, для которых все граничные лучи D_f расположены под углами, кратными $2\pi/n$, к вещественной оси, $m \leq n$. Класс $\mathcal{L}(m)$ не сводится к известным классам S и Σ (см. [1, Добавление]) даже в случае $m = 1$ (поскольку возможно наличие полюса функции f и неизвестно расстояние от граничного луча до начала координат). Если для голоморфной функции f класса $\mathcal{L}(m)$ известны все лучи области D_f, то суперпозиция конформного отображения круга на D_f [2, п.38] и функции f с соответствующей нормировкой является функцией класса S. Однако даже в этом случае при $m > 1$ результаты, полученные для функции f, будут выглядеть весьма громоздко. В общем случае класс $\mathcal{L}(m)$ является новым в теории функций. Более того, поскольку произвольную конечносвязную область с невырожденными граничными компонентами можно отобразить конформно на плоскость с разрезами вдоль отрезков на радиальных лучах [3, § 1], то, например, теоремы искажения в классе $\mathcal{L}(m)$ дают информацию об искажении мероморфными и однолистными функциями в произвольных областях. В данной статье доказываются теоремы покрытия и искажения в классах $\mathcal{L}(m)$ и $\mathcal{L}(m, n)$. Метод доказательства опирается на применение свойств конформной емкости конденсаторов и диссимметризацию [4]. Для удобства читателя в §1 приводятся некоторые определения и вспомогательные утверждения. Второй параграф посвящен доказательству теорем покрытия и искажения. В заключительном, третьем параграфе даются приложения к рациональным функциям, в частности, к оценкам этих функций в окрестности некритической точки.

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru`

1. Конформная емкость конденсатора

Конденсатором на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ называется всякая упорядоченная пара $C = (E_0, E_1)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств E_0 и E_1, принадлежащих $\overline{\mathbb{C}}$. Открытое множество $G = \overline{\mathbb{C}} \backslash (E_0 \cup E_1)$ назовем полем, а сами множества E_0, E_1 – пластинами конденсатора C. Емкость $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$I(v, G) := \iint_G |\nabla v|^2 dxdy$$

по всем допустимым функциям v, т.е. вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющим условию Липшица в $\mathbb{C}$, равным нулю на E_0 и единице на E_1. Если пластины конденсатора C ограничены конечным числом кусочногладких кривых, то существует потенциальная функция u конденсатора C, непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$, гармоническая в поле G, равная нулю на E_0 и единице – на E_1. Известно, что

$$\operatorname{cap} C = I(u, G).$$

Введем следующие обозначения:

$$D_k = \{re^{i\theta} : 0 < r < \infty, \qquad |\theta - 2\pi k/m| < \pi/m\}, \qquad k = 1, \ldots, m, \qquad m \geq 1,$$

$$d_\tau(z) = \frac{z - \tau}{z + \overline{\tau}}, \qquad \mathrm{Re}\tau > 0,$$

$z = d_\tau^{-1}(w)$ – функция, обратная $w = d_\tau(z)$ (при фиксированном комплексном параметре τ).

Лемма 1. (см.[4, следствие 5.3]). *Если поле конденсатора C есть двусвязная область и если для любого $k = 1, \ldots, m\, (m \geq 2)$ одна из пластин этого конденсатора содержит некоторые точки $a_k \in D_k$, а другая пластина содержит некоторые точки $b_k \in D_k$, то выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap} C \geq 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathbf{K}(q_k)}{\mathbf{K}(\sqrt{1 - q_k^2})}, \tag{1}$$

где $q_k = d_{|\tau|}^{-1}(-|d_\tau(a_k^{m/2})|)/d_{|\tau|}^{-1}(|d_\tau(b_k^{m/2})|)$, τ – любое число с $\mathrm{Re}\tau > 0$, $\mathrm{Re}a_k^{m/2} > 0$, $\mathrm{Re}b_k^{m/2} > 0$, $\mathbf{K}(\cdot)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. В частности, если $a_k = r_k e^{i2\pi k/m}$, $b_k = R_k e^{i2\pi k/m}$ и $r_k^{m/2} \leq \tau \leq R_k^{m/2}$, то $q_k = \sqrt{r_k^m / R_k^m}$. Равенство в (1) достигается только в том случае, когда поле конденсатора C представляет собой m-кратно симметричное кольцо Тейхмюллера

$$\mathbb{C} \backslash (\{z : 0 \leq z^m \leq r^m\} \cup \{z : z^m \geq R^m\}), \qquad 0 < r < R < \infty,$$

$$\textit{и} \qquad a_k = re^{i2\pi k/m}, \qquad b_k = Re^{i2\pi k/m}, \qquad k = 1, \ldots, m, \qquad \textit{при} \qquad r^{m/2} \leq \tau \leq R^{m/2}.$$

Пусть теперь z_0 – фиксированная точка плоскости $\mathbb{C}$, $U(z_0, \tau) := \{z : |z - z_0| < \tau\}$. Параметрическое семейство областей $D(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, назовем асимптотически круговым, если выполняются включения

$$U(z_0, s(r)) \subset D(z_0, r) \subset U(z_0, t(r))$$

для некоторых положительных функций $s(r)$ и $t(r)$, $0 < r < r_0$, удовлетворяющих условиям $s(r) \sim t(r) \sim r$ при $r \to 0$. Элемент асимптотически кругового семейства $D(z_0, r)$ будем называть почти кругом с центром в точке z_0 радиуса r.

Лемма 2. *Пусть $z_1, \dots, z_n$ – произвольные различные конечные точки, отличные от точки $z_0 = 0$; $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ – произвольные положительные числа. Предположим, что для некоторого $r_0 > 0$ замыкания почти кругов $D(z_k, \mu_k r)$, $k = 0, 1, \dots, n$, попарно не пересекаются, $0 < r < r_0$. Тогда для емкости конденсатора*

$$C(r) = \left(\overline{D(0, \mu_0 r)}, \bigcup_{k=1}^{n} \overline{D(z_k, \mu_k r)} \right)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\operatorname{cap} C(r) = -2\pi \frac{n}{n+1} \frac{1}{\log r} + R(\frac{1}{\log r})^2 + o\left((\frac{1}{\log r})^2 \right), \qquad r \to 0,$$

где $$R = \frac{2\pi}{(n+1)^2} \left\{ n^2 \log \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} \log \mu_k - 2n \sum_{k=1}^{n} \log |z_k| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \log |z_k - z_l| \right\}.$$

Доказательство. Емкость конденсатора $C(r)$, умноженная на $(n+1)^2$, совпадает с емкостью "обобщенного" конденсатора в $\overline{\mathbb{C}}$ с пластинами $\overline{D(0, \mu_0 r)}$, $\overline{D(z_1, \mu_1 r)}, \dots$, $\overline{D(z_n, \mu_n r)}$ и уровнями потенциала соответственно $-n, 1, \dots, 1$. Осталось воспользоваться формулой (2.15) из [4]. $\square$

2. Теоремы покрытия и искажения

Отметим сперва, что общий подход по применению симметризации в геометрической теории функций [5], [4] с учетом теоремы 4.16 из [4] приводит к многочисленным теоремам покрытия в классе $\mathcal{L}(m)$. В качестве примера приведем следующий результат.

Теорема 1. *Для любой функции f класса $\mathcal{L}(m)$, любого натурального $n \ge m$, $n \ge 2$ и любого вещественного числа θ справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \Lambda_f(\theta + 2\pi k/n)} \ge 4^{\frac{n-m}{mn}} \rho_f |f'(0)|, \tag{2}$$

где ρ_f означает расстояние от начала координат до границы области D_f, а $\Lambda_f(\varphi)$ – расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества $f(D_f)$, расположенной на луче $\arg w = \varphi$, $0 < |w| < \infty$ *(если при данном φ указанной точки не* *существует, то полагаем* $\Lambda_f(\varphi) = +\infty$). *Равенство в* (2) *достигается, например, для функции* $f \in \mathcal{L}(m)$, *которая конформно и однолистно отображает плоскость с разрезами вдоль лучей* $\arg z^m = 0$, $|z| \geq c$ *на плоскость с разрезами* $\arg w^n = \theta n$, $|w| \geq d$, *где* c *и* d *– произвольные положительные постоянные.*

Доказательство. Учитывая теорему 4.16 в [4], получаем

$$\sqrt[m]{4}\rho_f = r(D^*, 0) \leq r(D_f, 0) = r(f(D_f), 0)|f'(0)|^{-1},$$

где D^* есть плоскость с разрезами вдоль лучей $\arg z^m = 0$, $|z| \geq \rho_f$, а $r(G, 0)$ означает конформный (внутренний) радиус области G относительно начала координат [4], [5]. С другой стороны, справедливо неравенство

$$r(f(D_f), 0) \leq \sqrt[n]{4\prod_{k=1}^{n}\Lambda_f(\theta + 2\pi k/n)},$$

равносильное неравенству (7.25) из [4]. Сравнивая оба неравенства, приходим к (2). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана. □

Неравенство (2) о покрытии отрезков приводит к следующей теореме о покрытии площадей (ср. [1, гл. IV, §6]).

Теорема 2. *Если* $f \in \mathcal{L}(m)$, *то площадь звезды области* $f(D_f)$ *относительно начала координат не меньше величины*

$$\pi(\sqrt[m]{4}\rho_f|f'(0)|)^2.$$

Доказательство. Можно считать, что область $f(D_f)$ ограничена гладкой кривой. Неравенство (2) при $\theta = 0$, а также известное соотношение между средним геометрическим и средним квадратичным дают

$$4^{\frac{n-m}{mn}}\rho_f|f'(0)| \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\Lambda_f(2\pi k/n)} \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Lambda_f^2(2\pi k/n)}.$$

Отсюда

$$\pi(4^{\frac{n-m}{mn}}\rho_f|f'(0)|)^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Lambda_f^2(2\pi k/n)\frac{2\pi}{n}.$$

Осталось перейти к пределу при $n \to \infty$. Теорема доказана. □

Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как одноточечные теоремы искажения (оценка $|f'(0)|$). В случае двуточечных теорем нам понадобится зеркальная симметрия области D_f, $f \in \mathcal{L}(m)$.

Теорема 3. *Предположим, что для двух функций* f *и* g *класса* $\mathcal{L}(m)$ *выполняется равенство* $D := D_f = D_g$, *причем область* D *симметрична относительно вещественной оси, а функция* g *конформно и однолистно отображает эту область так, что точки вещественной оси и граничные точки* D *переходят в точки на вещественной оси. Тогда* *для любых различных вещественных точек x_1 и x_2 в D, отличных от полюсов функций f и g, справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(x_1)f'(x_2)|}{|f(x_1)-f(x_2)|^2} \geq \frac{|g'(x_1)g'(x_2)|}{|g(x_1)-g(x_2)|^2}, \tag{3}$$

а для любой точки $z \in D$, отличной от полюса функции f и не лежащей на вещественной оси, выполняется неравенство в другую сторону

$$\frac{|f'(z)f'(\overline{z})|}{|f(z)-f(\overline{z})|^2} \leq \frac{|g'(z)g'(\overline{z})|}{|g(z)-g(\overline{z})|^2}. \tag{4}$$

Кроме того, для производных Шварца в любой вещественной точке $x \in D$, отличной от полюсов f и g, верно неравенство

$$\mathrm{Re}S_f(x) \geq \mathrm{Re}S_g(x) = S_g(x). \tag{5}$$

Доказательство. Неравенства (3) и (4) вытекают из теоремы 7.3 [4]. Остановимся подробнее на неравенстве (5). Пусть в некоторой окрестности точки $x \in D$ справедливо разложение

$$f(z) = c_0 + c_1(z-x) + c_2(z-x)^2 + c_3(z-x)^3 + \dots$$

Тогда для достаточно малого $\rho > 0$ выполняется

$$\frac{|f'(x+\rho)f'(x-\rho)|4\rho^2}{|f(x+\rho)-f(x-\rho)|^2} = \frac{|1+\frac{2c_2}{c_1}\rho+\frac{3c_3}{c_1}\rho^2+\dots||1-\frac{2c_2}{c_1}\rho+\frac{3c_3}{c_1}\rho^2+\dots|}{|1+\frac{c_3}{c_1}\rho^2+\dots|^2} =$$

$$= |1+4\rho^2(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2})+\dots| = |1+\frac{2}{3}\rho^2 S_f(x)+\dots|.$$

Выписывая аналогичное соотношение для функции g и применяя неравенство (3), приходим к неравенству (5). Теорема доказана. □

Следующая теорема оценивает искажения функции f в направлении лучей области D_f.

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathcal{L}(m)$, $m \geq 2$, и пусть $z_k, k = 1,\dots,m,$ – точки пересечения окружности $|z| = r$, $0 < r < \rho_f$, с продолжениями лучей области D_f до начала координат. Предположим, что $|\arg f(z_k) - 2\pi k/m| < \pi/m, k = 1,\dots,m$. (Здесь ρ_f – расстояние от начала координат до границы области D_f, а под аргументом понимается подходящая ветвь). Тогда*

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{f^{\frac{m}{2}-1}(z_k)f'(z_k)}{\mathrm{Re}f^{\frac{m}{2}}(z_k)}\right|} \geq \frac{1}{r}.$$

Равенство достигается, например, для тождественного отображения, рассматриваемого в плоскости $\mathbb{C}_z$ с радиальными разрезами $\arg z^m = 0$, $|z| \geq c$, где c – произвольная положительная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим два конденсатора

$$C^* = \left(\bigcup_{k=1}^{m} [0, re^{i2\pi k/m}], \bigcup_{k=1}^{m} \{z = \rho e^{i2\pi k/m} : \rho \geq r + \triangle r\} \right)$$

и

$$C = \left(\bigcup_{k=1}^{m} [0, z_k], \bigcup_{k=1}^{m} \{z = \rho e^{i \arg z_k} : \rho \geq r + \triangle r\} \right),$$

где положительное число $\triangle r$ выбрано настолько малым, чтобы точки $f(z_k + z_k \triangle r/r)$, принадлежали углам $D_k = \{re^{i\theta} : 0 < r < \infty, |\theta - 2\pi k/m| < \pi/m\}, k = 1, \ldots, m$. Теорема 4.14 [4] и конформная инвариантность емкости дают

$$\operatorname{cap} C^* \geq \operatorname{cap} C = \operatorname{cap} f(C). \tag{6}$$

Согласно лемме 1, справедлива оценка

$$\operatorname{cap} f(C) \geq 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathbf{K}(q_k)}{\mathbf{K}(\sqrt{1 - q_k^2})}, \tag{7}$$

где

$$q_k = \frac{1 - |d_t(f^{m/2}(z_k + z_k \triangle r/r))|}{1 + |d_t(f^{m/2}(z_k + z_k \triangle r/r))|}, \qquad t = f^{m/2}(z_k),$$

$$d_t(f^{m/2}(z_k + z_k \triangle r/r)) = \frac{f^{m/2}(z_k + z_k \triangle r/r) - f^{m/2}(z_k)}{f^{m/2}(z_k + z_k \triangle r/r) + \overline{f^{m/2}(z_k)}}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Исследуем теперь итоговое неравенство для емкостей при $\triangle r \to 0$. Вновь, по лемме 1, справедливо равенство

$$\operatorname{cap} C^* = 2m \frac{\mathbf{K}(q^*)}{\mathbf{K}(\sqrt{1 - (q^*)^2})},$$

где $q^* = \sqrt{r^m (r + \triangle r)^{-m}}$. Из асимптотических разложений для полного эллиптического интеграла вытекает равенство

$$\frac{\mathbf{K}(q^*)}{\mathbf{K}(\sqrt{1 - (q^*)^z})} = \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{\sqrt{1 - (q^*)^2}} + o(1), \qquad \triangle r \to 0,$$

(см., например [6, с.116]). Таким образом,

$$\operatorname{cap} C^* = \frac{4m}{\pi} \log \frac{4}{\sqrt{m \triangle r/r + o(\triangle r)}} + o(1).$$

Аналогично для каждого слагаемого в правой части неравенства (7) выполняется

$$\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{\sqrt{1-q_k^2}}+o(1)=\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{\sqrt{m\triangle r\left|\frac{f^{m/2-1}(z_k)f'(z_k)}{\mathrm{Re}f^{m/2}(z_k)}\right|+o(\triangle r)}}+o(1).$$

Подставляя найденные асимптотики в (6) и (7), получаем в итоге требуемое неравенство. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что левая часть неравенства теоремы 4 при дополнительном условии $\arg f(z_k)=2\pi k/m,\ k=1,\ldots,m$, имеет вид

$$\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m}|f'(z_k)/f(z_k)|}.$$

Следствие 1. *Если функция $f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots$ принадлежит классу $\mathcal{L}(2,2)$, то справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}c_3+|c_2|^2-\frac{7}{4}(\mathrm{Re}c_2)^2\geq 0$$

Доказательство. Полагаем в теореме 4 $m=2, z_1=r, z_2=-r$ и устремляем $r\to 0$. $\square$

Теорема 5. *Если функция $f\in\mathcal{L}(m,n)$, то для точек $z_k=\rho\exp(i(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n})), k=1,\ldots,n$, отличных от полюса f, при любом $\rho, 0<\rho<\infty$, справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(0)|^{n^2}|\prod\limits_{k=1}^{n}f'(z_k)|\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}|f(z_k)-f(z_l)|}{\prod\limits_{k=1}^{n}|f(z_k)|^{2n}}\geq\frac{n^n}{\rho^{n^2+n}}. \tag{8}$$

Равенство достигается, например, для тождественного отображения.

Доказательство. При достаточно малом положительном r определены конденсаторы

$$C^*(r)=\left(\overline{U(0,r)},\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U(z_k,r)}\right),\qquad C(r)=\left(f(\overline{U(0,r)}),\bigcup_{k=1}^{n}f(\overline{U(z_k,r)})\right).$$

Обозначим через u потенциальную функцию конденсатора $C(r)$, и пусть $v(z)=u(f(z))$, $z\in D_f$. Тогда

$$\mathrm{cap}\,C(r)=I(u,\mathbb{C})\geq I(u,f(D_f))=I(v,D_f).$$

Для потенциальной функции u^* конденсатора $C^*(r)$ на лучах области D_f выполняется $\partial u^*/\partial n=0$. Следовательно, по принципу Дирихле (со свободной границей) получаем

$$I(v,D_f)\geq I(u^*,D_f)=\mathrm{cap}\,C^*(r).$$

Окончательно

$$\mathrm{cap}\,C(r)\geq\mathrm{cap}\,C^*(r).$$

Заметим, что пластины конденсатора $C^*(r)$ состоят из замкнутых кругов, а пластины $C(r)$ – из замыканий почти кругов. Применяя асимптотическую формулу из леммы 2, приходим к неравенству

$$n^2 \log|f'(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log|f'(z_k)| - 2n \sum_{k=1}^{n} \log|f(z_k)| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \log|f(z_k) - f(z_l)| \geq$$

$$\geq -2n \sum_{k=1}^{n} \log|z_k| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \log|z_k - z_l|.$$

Остается заметить, что

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} |z_k - z_l| = n^n \rho^{n(n-1)}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Если производная функция f класса $\mathcal{L}(m)$ ограничена на окружности $|z| = \rho,\ 0 < \rho < \infty$, то для трансфинитного диаметра*

$$d := d\overline{\{w = 1/f(z) : z \in D_f, |z| = \rho\}}$$

выполняется неравенство

$$d \geq \frac{1}{\rho|f'(0)|}. \tag{9}$$

Доказательство. Для функций f, принадлежащих классу $\mathcal{L}(m, n_0 l)$, при всех l и достаточно большом n_0 неравенство (9) получается возведением обеих частей неравенства (8) $(n = n_0 l)$ в степень $1/(n(n-1))$ и затем предельным переходом при $l \to \infty$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{L}(m)$ неравенство (9) доказывается предельным переходом при $n_0 \to \infty$. □

Заметим, что при $\rho < \rho_f$ неравенство (9) превращается в равенство. Кроме того, в условиях следствия 2 при $\rho < \rho_f$ из неравенства (8) вытекает оценка

$$d\overline{\{w = f(z) : z \in D_f, |z| = \rho\}} \geq \rho|f'(0)|,$$

которая получается также из известного неравенства Лаврентьева (см. [4, неравенство (6.1′)]).

Теорема 6. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathcal{L}(m, n)$, n – четное число, и пусть для данного $\rho, 0 < \rho < \infty$, точки $z_k = \rho \exp(i(\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}))$, $k = 1, \ldots, n$, отличны от полюса функции f. Тогда*

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f'(z_k)\right| \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} |f(z_k) - f(z_l)|^{(-1)^{k+l}} \leq \left(\frac{n}{4\rho}\right)^n \tag{10}$$

с равенством для тождественного отображения.

Доказательство. Рассмотрим совокупность непересекающихся секторов

$$G_k = \{z : \frac{2\pi}{n}k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1)\}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$r(f(G_k), f(z_k)) = |f'(z_k)| r(G_k, z_k) = |f'(z_k)| \frac{4}{n}\rho, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

С другой стороны, из неравенства Нехари (см. [4, теорема 6.1]) следует

$$\prod_{k=1}^{n} r(f(G_k), f(z_k)) \leq \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} |f(z_k) - f(z_l)|^{-(-1)^{k+l}}.$$

Требуемая оценка вытекает из сравнения этих двух соотношений. Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана. □

Из приведенного доказательства видно, что условие $f(0) = 0$ в теореме 6 является излишним. Можно показать, что неравенство Нехари и, следовательно, теорема 6 вытекают из монотонности емкости обобщенных конденсаторов. Более того, следуя приведенным доказательствам, можно получить аналоги и обобщения теорем 5 и 6 в случае точек z_k, расположенных не на одной окружности, а на объединении концентрических окружностей. Близкие неравенства для конечных множеств приводятся в §5.1 [4].

3. Неравенства для рациональных функций

Всюду ниже под рациональной функцией R понимается функция вида $R = P/Q$, где P и Q – комплексные полиномы. Изучая поведение функции R в окрестности некритической точки z_0, можно считать, что $z_0 = R(z_0) = 0$. Значение функции R в критической точке ζ называют критическим значением $R(\zeta)$. Обозначим через $S(R)$ максимальную область в z-плоскости, содержащую начало координат и такую, что рациональная функция $w = R(z)$ конформно и однолистно отображает эту область на область, звездообразную относительно точки $w = 0$. Понятно, что образ $R(S(R))$ представляет собой лучевую область, причем граничные лучи этой области исходят от некоторых критических значений функции R. Нетрудно увидеть, что если S – лучевая область в w-плоскости с граничными лучами, выходящими из всех критических значений функции R, то $f(S) \subset S(R), \overline{f(S)} = \overline{S(R)}$, где f – мероморфная ветвь обратной к R функции, заданная на $D_f := R(S(R)), f(0) = 0$. Функция f принадлежит классу $\mathcal{L}(m)$ при некотором m. Применяя к f теоремы предыдущего параграфа, получим утверждения для рациональной функции R. Рассмотрим некоторые из них. Так, непосредственно из теоремы 2 вытекает теорема 7.

Теорема 7. *Для любой рациональной функции R, $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$, существует область однолистности, площадь звезды которой относительно начала координат не меньше, чем*

$$\pi \left(\frac{C(R)}{|R'(0)|} \right)^2,$$

где $C(R) = \min\{|R(\zeta)| : R'(\zeta) = 0\}$.

Следующий результат показывает, как в одном частном случае расположение критических значений рациональной функции влияет на ее начальные коэффициенты.

Теорема 8. *Если все критические значения рациональной функции R лежат на вещественной оси и в некоторой окрестности начала координат выполняется разложение*

$$R(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots,$$

то справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}(a_2^2 - a_3) \geq 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{Re} a_3 + |a_2|^2 - \frac{9}{4}(\mathrm{Re} a_2)^2 \leq 0. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку все критические значения R расположены на вещественной оси, то область $D_f = R(S(R))$ имеет не более двух граничных лучей, лежащих на этой оси. Следовательно, она симметрична относительно указанной оси и выполняются условия теоремы 3 с $m = 2$ и $g(z) \equiv z$. Неравенство (5) этой теоремы дает

$$\mathrm{Re}(c_3 - c_2^2) \geq 0,$$

где $f(w) = w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \ldots$. Из условия $f(R(z)) \equiv z$ следует

$$c_2 = -a_2, \qquad c_3 = 2a_2^2 - a_3.$$

Таким образом, справедливо неравенство (11). Доказательство неравенства (12) получаем из следствия 1. Теорема доказана. □

Следующий результат является, по-видимому, новым даже в случае $R = P$.

Теорема 9. *Пусть R – рациональная функция, $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$. Тогда для любого положительного числа ρ такого, что $|R(\infty)| \neq \rho$, выполняется оценка*

$$d\{w : 1/w \in E_\rho(R)\} \geq d\{w : 1/w \in E_\rho(R) \cap \overline{S(R)}\} \geq |R'(0)|/\rho.$$

Здесь $d(E)$ означает трансфинитный диаметр множества E, а $E_\rho(R) = \{z : |R(z)| = \rho\}$.

Доказательство. Содержательной частью теоремы 9 является правое неравенство, которое вытекает из следствия 2. □

Согласно классической теореме Фекете, для полинома $P(z) = z^n + \ldots$ степени n выполняется равенство

$$d(E_\rho(P)) = \sqrt[n]{\rho},$$

то есть существует связь между трансфинитным диаметром множества $E_\rho(P)$ и старшим коэффициентом полинома [1, гл. VII, §1]. Теорема 9 дает некоторую связь между трансфинитным диаметром множества $\{w : 1/w \in E_\rho(P)\}$ и первым коэффициентом, причем независимо от степени полинома P (см. также замечания к следствию 2).

Следующее утверждение не требует специальных пояснений.

Теорема 10. *Если при некотором четном n все критические значения рациональной функции R, $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$, расположены на лучах, выходящих из начала координат под углами, кратными $2\pi/n$ к вещественной оси, то для мероморфной ветви f функции, обратной R, заданной в $R(S(R))$, $f(0) = 0$, справедливо неравенство* (10).

Список литературы

[1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973.

[3] М. Шиффер, "Некоторые новые результаты в теории конформных отображений", Приложение к книге Р. Куранта, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953.

[4] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[5] W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Univ. Press. Second ed., Cambridge, 1994.

[6] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 мая 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00038) и ДВО РАН (проект 12-I-ОМН-02)

Dubinin V. N. On a Class of Univalent Functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 184–194.

ABSTRACT

In this paper we study the meromorphic univalent functions in the complex plane with radial slits. Covering and multipoint distortion theorems for such functions are proved. Some applications for rational functions are also given.

Key words: *meromorphic functions, univalent functions, distortion theorems, rational functions, condenser capacity, dissymmetrization.*